This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06910456 4

I.C.
861
48

Elementarlehrbuch

der

Theorie der Functionen

oder

der Infinitesimalanalysis.

Mit

besonderer Beziehung auf ihre Anwendung in den Naturwissenschaften, Künsten und Gewerben.

Von

A. A. Cournot,

Generalstudieninspector zu Paris.

Deutsch bearbeitet

von

Dr. C. H. Schnuse.

Mit 8 lithographirten Figurentafeln.

Darmstadt.

Druck und Verlag von Carl Wilhelm Leske.

1845.

Dem Andenken

Poiſſon's,

Pair von Frankreich,

Mitglied der Academie der Wiſſenſchaften zu Paris und des Königlich Franzöſiſchen öffentlichen Unterrichtsrathes ꝛc.

Als Zeichen der Dankbarkeit und Anhänglichkeit

vom Verfaſſer.

Vorwort des Ueberſetzers.

Es iſt faſt unglaublich, was für verkehrte Vorſtellungen ſich viele Mathematiker und Philoſophen noch heutiges Tages von dem Weſen und dem Zwecke der höhern mathematiſchen Analyſis machen, welcher ſinn- und bedeutungsloſe Formalismus bei der Begründung der Principien der höhern Analyſis in den meiſten Lehrbüchen angewandt wird, auf was für grund- und bodenloſe Beweiſe, auf welche leere Tautologien und logiſche Zirkel, überhaupt auf welche bedauerliche Verkehrtheiten man hier ſtößt und endlich, was für wunderliche Einwürfe man gegen die Newton'ſche und Leibnitz'ſche Begründungsart der höhern Analyſis gemacht hat. So ſetzt man z. B. ſehr oft bei der Deduction der Principien der Differenzialrechnung die Entwickelung der Functionen in Reihen als bekannt voraus, und wendet umgekehrt die Taylor'ſche und Maclaurin'ſche Formel auf die Entwickelung der Functionen in Reihen an und drehet ſich ſo im Kreiſe herum.

Die Principien der Differenzialrechnung laſſen ſich aber nicht blos auf die einfachſte und eleganteſte Weiſe ohne die Einmiſchung der Reihenentwickelungen, welche nur falſche Vorſtellungen in dem Lernenden erwecken, und außerdem, wenn man nicht ganz ſinn- und gedankenlos operiren will, die Lehre von der Convergenz der Reihen als bekannt vorausſetzen, ableiten, ſondern ſie müſſen ohne dieſes Hülfsmittel, welches hier ganz überflüſſig iſt, direct aus dem Begriffe der ſtetig veränderlichen Größe und der Function derſelben deducirt werden; denn die Differenzialrechnung gibt ſelbſt erſt die directeſten und allgemeinſten Formeln zur Entwickelung der Functionen in Reihen an die Hand, und außerdem ſind die Mittel, durch welche man in der Algebra der niedern Analyſis z. B. die Functionen a^x, $\log.(1+x)$, $\sin. x$ ꝛc. in Reihen entwickelt, bei Lichte beſehen, nichts als eine verſteckte und entſtellte Anwendung der Mittel, welche die Differenzialrechnung zu demſelben Zwecke darbietet; ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Ueberhaupt ſind die Operationen der höhern Analyſis einfache Grundoperationen, welche man unmittelbar und namentlich ohne die Anwendung eines ſo ſchlüpfrigen und weitſchichtigen Hülfsmittels, wie die Theorie der Reihen,

begründen muß. Denn ſelbſt dann, wenn die Reihen convergent ſind, kann man auf unrichtige Reſultate geführt werden, wie Cauchy gezeigt hat. Indeſſen hat Cauchy und auch Cournot dennoch bei der Differenzirung der Function a^x oder log. x Reihenentwickelungen angewandt, was Letzterer gar nicht nöthig gehabt hätte, da er vorher (§. 29) allgemein bewieſen hat, daß $\lim. \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ im Allgemeinen, d. h. ſo lange für x kein ſpecieller Werth geſetzt wird, exiſtirt; alſo auch in dem beſondern Falle $f(x) = a^x$ oder $f(x) = \log. x$.

Namentlich iſt es aber die gehörige, richtige und naturgemäße Entwickelung der Grundbegriffe und des Gegenſtandes der höhern Analyſis, welche man in den meiſten Lehrbüchern vergebens ſucht. Man definirt wohl, was unter der höhern Analyſis, unter Differenzial, Ableitung ꝛc. zu verſtehen ſei; allein man zeigt nicht näher, worin das Weſen der definirten Gegenſtände beſteht, worauf die ganze Unterſuchung hinausläuft, wie der menſchliche Geiſt bei der fortſchreitenden Entwickelung der mathematiſchen Wiſſenſchaft mit Nothwendigkeit auf die Begriffe und Methoden der höhern Analyſis geführt iſt. Daß der Begriff des unendlich Kleinen oder der Grenze bei der analytiſchen Behandlung ſtetig veränderlicher Größen unentbehrlich iſt, wenn man ſich nicht mit leeren Redensarten begnügen will. Ja, man hat bis auf die neueſte Zeit nicht einmal daran gedacht, die Exiſtenz des Objectes derſelben, nämlich der Ableitung oder des Differenzialquotienten, allgemein und ſtreng zu beweiſen, ehe man zur Beſtimmung deſſelben in ſpeciellen Fällen ſchreiten kann, daß man die Principien der höhern Analyſis nur auf ſtetige Functionen anwenden darf, ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Wie weit der gedankenloſe Formalismus in dieſer Beziehung geht, ſieht man unter andern aus den Schriften des bekannten Mathematikers M. Ohm in Berlin, der uns ſogar in der neueſten Zeit in ſeiner Schrift: „Geiſt der mathematiſchen Analyſis", Berlin 1842, hat weiß machen wollen, die Buchſtaben in den allgemeinen algebraiſchen oder analytiſchen Formeln dürften weder Größen, noch Zahlen bezeichnen, ſie ſeien blos Träger (??) der Operationen — und er meint damit das Weſen der mathematiſchen Analyſis zugleich abſtracter und naturgemäßer aufzufaſſen. — Wennn aber der Mathematiker in der höhern Analyſis auch von der Größe und Zahl abſtrahirt, ſo bleibt ihm offenbar nichts mehr zu betrachten übrig, und ſeine Analyſis iſt nichts, als ein inhaltleeres und gedankenloſes Zeichenſpiel. —

Eine Folge von dieſer abſurden Vorſtellung Ohm's iſt es nun, daß er in Beziehung auf Reihenentwickelungen und deren Zuläſſigkeit und Anwendbarkeit in der Analyſis nicht minder ungereimte Behauptungen aufſtellt. Er ſagt z. B.: Man hat daher die allgemein richtigen Gleichungen:

(1) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \text{in inf.},$

(2) $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \text{in inf.},$

raus folgt:

(3) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \text{in inf.} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \text{in inf.}$

ch dieſe letzte Gleichung ſoll nach Ohm's Behauptung ebenfalls allgemein, . h. ſo lange richtig ſein, als man ſich unter x weder eine reelle, noch eine aginäre Zahl denkt. — Was ſoll man ſich aber unter x denken? Woran ders, als an Zahlen kann man aber arithmetiſche Operationen vornehmen? — as ganze Gerede des Herrn Ohm iſt offenbar eine radicale Abſurdität. —

Nach der unter allen Mathematikern der Erde üblichen Sprache haben die eihen (1) und (2) keine allgemeine Gültigkeit, weil die erſte für jeden erth von $x > 1$ und die zweite für jeden Werth von $x < 1$ divergent ird. Folglich kann die Gleichung (3) für gar keinen Werth von x ſtattfin-n, d. h. ſie iſt ein analytiſches Abſurdum; denn eine Formel, worin man h unter den darin vorkommenden Buchſtaben weder reelle, noch imaginäre ahlen oder Größen denken darf, iſt ein völlig ſinn- und bedeutungsloſes Ding. ine analytiſche Formel iſt nur dann allgemein gültig, wenn ſie für jeden ellen oder imaginären Werth der darin vorkommenden Buchſtaben ſtattfindet, nd wenn dieſes nicht der Fall iſt, ſo hat man zu unterſuchen, innerhalb wel-er Grenzen dieſe Bedingung erfüllt wird, damit man der Formel keine grö-ere Allgemeinheit beilegt, als ſie wirklich darbietet. — So etwas nennt nun err Ohm „Geiſt der mathematiſchen Analyſis"!! —

Gegen ſolchen begriffsloſen Formalismus und Mechanismus in der Mathe-atik, welchen wir hier nicht weiter verfolgen können, haben nun die reinen hiloſophen geeifert, welche das Weſen und die Tendenz der höhern Analyſis egreiflich zu entwickeln geſucht haben, aber wegen Mangel an der erforderli-en Sachkenntniß ihrerſeits in die gröbſten Irrthümer verfallen ſind, und ſtatt r ſtrengen mathematiſchen Entwickelung, bei welcher weder die Form, noch r Begriff vernachläſſigt werden darf, weitſchweifige, nichtsſagende und verkehrte laiſonnements geben. Zum Beweiſe dieſer Behauptung wird es genügen, nige Stellen aus Hegels „Wiſſenſchaft der Logik", Berlin 1833, und s C. Frantz „Philoſophie der Mathematik", Leipzig 1842, wörtlich nzuführen.

Hegel ſagt S. 286 ſeiner Logik Theil I.:

„Die gewöhnliche Beſtimmung des mathematiſchen Unendlichen iſt, daß es ne Größe ſei, über welche es, — wenn ſie als das Unendlichgroße — keine größere oder, — wenn ſie als das Unendlichkleine beſtimmt iſt — kleinere mehr gebe, oder die, in jenem Falle, größer, oder in dieſem Falle

kleiner sei, als jede beliebige Größe. — In dieser Definition ist freilich d wahre Begriff nicht ausgedrückt, vielmehr nur, wie schon bemerkt, dersel Widerspruch, der im unendlichen Progresse ist; aber sehen wir, was an s darin enthalten ist. Eine Größe wird in der Mathematik definirt, daß s etwas sei, das vermehrt und vermindert werden könne; überhaupt also ei gleichgültige Grenze. Indem nun das Unendlichgroße oder Kleine ein solch ist, das nicht mehr vermehrt oder vermindert werden könne, so ist es in d That kein Quantum als solches mehr. Diese Consequenz ist nothwendig u unmittelbar." .....

Solche Ungereimtheiten sind noch keinem Mathematiker eingefallen; v mehr versteht derselbe unter unendlich kleinen und großen Größen solche, wel nach der Voraussetzung, oder ihrer Natur nach resp. kleiner oder größer g dacht werden können, als jede gegebene noch so kleine oder große Grö

Seite 298 sagt Hegel: „In dem Sinne, daß auch an die Stelle v x und y einer Function eine unendliche, d. h. unerschöpfliche Menge von Zahl gesetzt werden könne, sind a und b so sehr veränderliche Größen als jene, x und y. Der Ausdruck: „veränderliche Größen", ist darum sehr va und unglücklich gewählt für Größebestimmungen, die ihr Interesse und ihre B handlungsart in etwas ganz Anderm liegen haben, als in ihrer bloßen Verä derlichkeit."

So etwas kann nur ein völliger Nichtkenner des Gegenstandes, wie He gel, sagen; denn es ist ein wesentlicher Unterschied zwischen einer bloß allg meinen und einer stetig veränderlichen Größe. So z. B. kann in d Gleichung des Kreises $y^2 + x^2 = r^2$ der Halbmesser r zwar einen beliebig Werth haben, aber wird nicht wie x und y als stetig veränderlich gedacht.

S. 299 sagt Hegel ferner: „Das Verhältniß einer Größe zur Potenz nicht ein Quantum, sondern wesentlich qualitatives Verhältniß; das Potenzv hältniß ist der Umstand, der als Grundbestimmung anzusehen ist. — In d Function der geraden Linie $y = ax$ aber ist $\frac{x}{y} = a$ ein gewöhnlicher Bru und Quotient; diese Function ist daher nur formell eine Function von ve änderlichen Größen, oder x und y sind hier was a und b in $\frac{a}{b}$, sie s nicht in derjenigen Bestimmung, in welcher die Differential- und Integralrec nung sie betrachtet. — Wegen der besondern Natur der veränderlichen Grö in dieser Betrachtungsweise wäre es zweckmäßig gewesen, für sie sowohl ein besondern Namen, als andere Bezeichnungen einzuführen, als die gewöhnlich der unbekannten Größen in jeder endlichen, bestimmten oder unbestimmten Gle chung; um ihrer wesentlichen Verschiedenheit willen von solchen bloß unbekan ten Größen, die an sich vollkommen bestimmte Quanta, oder ein bestimmt Umfang von bestimmten Quantis sind. — Es ist auch nur der Mangel d

Bewußtſeins, über die Eigenthümlichkeit deſſen, was das Intereſſe der höhern Analyſis ausmacht, und das Bedürfniß und die Erfindung des Differential-Kalküls herbeigeführt hat, daß Functionen des erſten Grades wie die Gleichung der geraden Linie in die Behandlung dieſes Kalkuls für ſich mit hereingenommen werden; ſeinen Antheil an ſolchem Formalismus hat ferner der Mißverſtand, der die an ſich richtige Forderung der Verallgemeinerung einer Methode dadurch zu erfüllen meint, daß die ſpecifiſche Beſtimmtheit, auf die ſich das Bedürfniß gründet, weggelaſſen wird, ſo daß es dafür gilt, als ob es ſich in dieſem Felde nur um veränderliche Größen überhaupt handle. Es wäre wohl viel Formalismus in den Betrachtungen dieſer Gegenſtände, wie in der Behandlung erſpart worden, wenn man eingeſehen hätte, daß derſelbe nicht veränderliche Größen als ſolche, ſondern Potenzenbeſtimmungen betreffe." .....

Solche Reden kann nur ein der Sache völlig Unkundiger führen. Denn gerade um für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ einen beſtimmten Werth zu erhalten, wenn der Werth von x fixirt wird, muß man $\lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ ſtatt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ betrachten, d. h. man muß eben den Fall einer beliebigen Function auf den der Function $y = ax$ des erſten Grades, für welche ohne weiteres $\frac{y}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = a$ iſt, zurückführen. Hegel meint nämlich in allem Ernſte, der Zweck und Gegenſtand der Differenzialrechnung ſei das Depotenziren, das Herabſetzen auf eine niedrigere Potenz, weil er bei dem Durchblättern mathematiſcher Werke bemerkt hat, daß wenn $y = x^n$ iſt, $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$, u. ſ. w. Wie ſteht es denn aber mit den Functionen a^x, e^x, log. x, sin. x, cos. x, ꝛc.?? — — S. 303 ſeiner Logik ſagt Hegel: „Es ſind Größen entſtanden in ihrem Verſchwinden, d. h. die nicht mehr Quanta ſind; ferner nicht Verhältniſſe beſtimmter Theile, ſondern die Grenzen des Verhältniſſes. Es ſollen alſo ſowohl die Quanta für ſich die Seiten des Verhältniſſes, als damit auch das Verhältniß (?), inſofern es ein Quantum wäre, verſchwinden; die Grenze des Größen-Verhältniſſes iſt, worin es iſt und nicht iſt; dieß heißt genauer, worin das Quantum verſchwunden, und damit das Verhältniß nur als qualitatives Quantitäts-Verhältniß (?), und die Seiten deſſelben ebenſo als qualitative Quantitäts-Momente enthalten ſind." . . .

Die Mathematik operirt überall nur mit Quantitäten; denn wo Qualitäten in Betracht kommen, z. B. die Krümmung der Linien und Flächen ꝛc., da müſſen Quantitäten dafür ſubſtituirt werden. Daß das in Rede ſtehende Verhältniß unter der Form $\frac{0}{0}$ erſcheint, hat bloß in der allgemeinen Bezeichnung

„Es kann hierzu etwa bemerkt werden, daß, indem nur um der Entwicklung willen ein Zuwachs angenommen iſt, der ohne Quantum ſei (?), es am geſchickteſten geweſen wäre, 1 (das Eins) dafür zu nehmen, indem derſelbe in der Entwickelung immer nur als Factor vorkommt, womit eben der Factor Eins den Zweck erfüllt, daß keine quantitative Beſtimmtheit und Veränderung durch den Zuwachs geſetzt werden ſolle; dagegen dx mit der falſchen Vorſtellung von einer quantitativen Differenz, und andere Zeichen, wie i, mit dem hier unnützen Scheine von Allgemeinheit behaftet, immer das Ausſehen und die Prätenſion von einem Quantum und deſſen Potenzen haben; welche Prätenſion dann die Mühe herbeibringt, ſie deſſenungeachtet wegzubringen und wegzulaſſen." .... (??)

„Ueber die Anwendbarkeit aber ergibt ſich zunächſt aus der Natur der Sache, ohne noch aus den Fällen der Anwendung ſelbſt zu ſchließen, vermöge der aufgezeigten Geſtalt der Potenzenmomente, von ſelbſt Folgendes. Die Entwickelung der Potenzengrößen, wodurch ſich die Functionen ihrer Potenzirung ergeben, enthält, von näherer Beſtimmung abſtrahirt, zunächſt überhaupt die Herabſetzung der Größe auf die nächſt niedrigere Potenz. Die Anwendbarkeit dieſer Operation findet alſo bei ſolchen Gegenſtänden ſtatt, bei welchen gleichfalls ein ſolcher Unterſchied von Potenzenbeſtimmungen vorhanden iſt."

„Es bietet ſich hierbei aber die Bemerkung an, daß es ſich keineswegs von ſelbſt verſteht, daß ſolche abgeleitete Gleichung auch richtig iſt (nämlich daß aus $x^2 - ax - b = 0$ folge $2x - a = 0$). Bei einer Gleichung mit zwei veränderlichen Größen, die darum, daß ſie veränderliche ſind, den Charakter unbekannte Größen zu ſein nicht verlieren, kommt, wie oben betrachtet wurde, nur ein Verhältniß heraus aus dem angegebenen einfachen Grunde, weil durch das Subſtituiren der Functionen der Potenzirung an die Stelle der Potenzen ſelbſt der Werth der beiden Glieder der Gleichung verändert wird, und es für ſich ſelbſt noch unbekannt iſt, ob auch zwiſchen ihnen bei ſo veränderten Werthen noch eine Gleichung ſtattfinde. Die Gleichung $\frac{dy}{dx} = P$ drückt gar nichts weiter aus, als daß P ein Verhältniß iſt, und es iſt dem $\frac{dy}{dx}$ ſonſt kein reeller Sinn zuzuſchreiben. Von dieſem Verhältniß $= P$ iſt es aber ebenſo noch unbekannt, welchem andern Verhältniſſe es gleich ſeie; ſolche Gleichung, die Proportionalität, gibt demſelben erſt einen Werth und Bedeutung." .....

„Mit dem Weglaſſen der Conſtanten hängt eine ähnliche Bemerkung zuſammen, die über die Namen von Differentiation und Integration gemacht werden kann, als früher über den endlichen und unendlichen Ausdruck gemacht wurde, daß nämlich in ihrer Beſtimmung vielmehr das Gegentheil von dem liegt, was der Ausdruck beſagt. Differentiiren bezeichnet das Setzen von Differenzen;

durch das Differentiiren aber wird eine Gleichung vielmehr auf weniger Dimensionen herabgebracht, durch das Weglaſſen der Conſtante wird ein Moment der Beſtimmtheit hinweggenommen; wie bemerkt, werden die Wurzeln der veränderlichen Größe (??) auf eine Gleichheit geſetzt, die Differenz alſo derſelben aufgehoben. In der Integration hingegen ſoll die Conſtante wieder hinzugeſetzt werden; die Gleichung wird dadurch allerdings, aber in dem Sinne integrirt, daß die vorher aufgehobene Differenz der Wurzeln (?? köſtlich!) wieder hergeſtellt, das Gleichgeſetzte wieder differenziirt wird. — Der gewöhnliche Ausdruck trägt dazu bei, die weſentliche Natur der Sache in Schatten zu ſetzen und Alles auf den untergeordneten, ja der Hauptſache fremdartigen Geſichtspunkt Theils der unendlich kleinen Differenz, des Inkrements und dergleichen, Theils der bloßen Differenz überhaupt zwiſchen der gegebenen und der abgeleiteten Function, ohne deren ſpecifiſchen, d. i. den qualitativen Unterſchied zu bezeichnen, zu ſtellen." ....

„Ebenſo der Differential- und Integralkalkul; für das dieſem Kalkul Angehörige möchte der Name des Verhältniſſes einer Potenzenfunktion und der Funktion ihrer Entwickelung oder Potenzirung der paſſendſte ſein, weil er der Einſicht der Natur der Sache am nächſten liegt." ... (?? —)

Solche ſchiefe und verkehrte Anſichten, ſolche durch und durch ungereimte Geſchwätze können nur von einem völligen Ignoranten in der höhern Analyſis aufgeſtellt werden, und es wird wohl nicht nöthig ſein, auch nur noch ein Wort zur Widerlegung derſelben hier zu verlieren. Hegel ſagt zwar in ſeiner Naturphiloſophie: „Die philoſophiſche Weiſe der Darſtellung iſt nicht eine Willkür, auch einmal zur Veränderung auf dem Kopf zu gehen, nachdem man eine lange Weile auf den Beinen gegangen iſt, oder ſein Alltagsgeſicht auch einmal bemalt zu ſehen." Allein nach dem, was er als Philoſophie der Mathematik und Naturwiſſenſchaften zu Tage gefördert hat, ſollte man faſt glauben, er hätte dieſes Princip bei ſeinen Arbeiten auf dieſem Felde wirklich zum Grunde gelegt; denn es gehört wirklich eine unbeſchreibliche Ignoranz, oder Verwegenheit dazu, der Welt ſolche Albernheiten weiß zumachen, wie ſie Hegel in ſeinen Werken mittheilt. Nach ſeiner alles übertreffenden Dialektik iſt die Intenſität der Schwere unter dem Aequator größer, als unter den Polen, wird ein Eiſender Stahlſtab durch Magnetiſiren ſchwerer, ꝛc. — ?

Herr Frantz gibt uns folgende begriffliche Deduction des Differentialquotienten:

„Im Verhältniſſe ſind zwei Größen durch einander und durch eine dritte beſtimmt. Durch und für einander beſtimmt zu ſein, iſt als ihre Qualität geſetzt. Damit dieſe Qualität in reiner Beſtimmung für ſich ſelbſt ſei, müſſen die Seiten nur ſein, was ſie für einander ſind. Darum iſt ihre Großheit, wonach ſie unmittelbar jede einzeln für ſich etwas wären, aufzuheben; ſie ſollen nur im Verhältniſſe gelten, außerhalb deſſelben gelten ſie als Größen

— und ſie ſind nichts anders — nicht, d. i. ſind null. In der Gleichung $y = ax + b$ iſt y und x für ſich als Null zu ſetzen, damit das reine Verhältniß erſcheine $\frac{dy}{dx} = a$ — der Differentialquotient, der auch das abſolute Verhältniß genannt werden kann." ....

Das ſind aber nichts als unverſtändliche, unbeſtimmte allgemeine Redensarten, wodurch das Weſen der Differenzialrechnung und die Bedeutung der Differenzialquotienten bei weitem nicht mit der Präciſion und Klarheit charakteriſirt wird, wie es die gediegene mathematiſche Darſtellung erfordert. Indeſſen zeigt die weitere Entwickelung doch, daß Herr Frantz das Weſen der Differenzialrechnung weit beſſer aufgefaßt hat wie Hegel, weil er den Begriff der Function und ihrer ſtetigen Veränderlichkeit in Betracht zieht, und nicht wie Hegel die Differenzialrechnung für eine Potenzenrechnung erklärt; obgleich wir auch Herrn Frantz keine neuen Aufſchlüſſe über den Sinn und Zweck der höhern Analyſis verdanken, und ſeine Erörterungen viel zu einſeitig und dürftig ſind, als daß dadurch Mathematiker, die den heutigen Zuſtand ihrer Wiſſenſchaft kennen, belehrt werden könnten.

Wir werden ſpäter in einer beſondern Schrift die mathematiſche und Naturphiloſophie der Hegel'ſchen Schule einer ausführlichen Kritik unterwerfen, wobei auch die Philoſophie der Mathematik von Herrn Frantz ihre nähere Beurtheilung finden wird.

Als letztes Beiſpiel der herrſchenden verkehrten Anſichten über das Weſen der Differenzialrechnung mag hier noch das ſowohl hiſtoriſch als factiſch grundfalſche Urtheil des Recenſenten von Frantz „Philoſophie der Mathematik" in den Deutſchen Jahrbüchern von 1842 Nr. 289 — 290 Platz finden.

„Die Grenzmethode iſt in Folge verſtändiger Reflexion aus der Methode des Unendlichkleinen hervorgegangen und kann ſich daher gegen eine verſtändige Reflexion nicht wehren, vor welcher ſie allerdings nicht Stand zu halten vermag. Darin zwar iſt Referent mit dem Verfaſſer vollkommen einverſtanden, daß die Reſultate der Methode des Unendlichkleinen zwar genau richtig, aber mit dem Scheine der Ungenauigkeit behaftig ſind, und daß darum jene Methode wiſſenſchaftlich nicht anzuerkennen, aber für die Praxis vollkommen ausreichend und bequem iſt. Aber ſofern die Grenzmethode zu ihrem Vortheil von dieſer Methode ſich unterſcheidet, iſt ſie mit der Functionenrechnung Lagrange's, für welche ſich auch Hegel entſcheidet, identiſch; ſofern ſie aber von dieſer abweicht, treffen ſie alle Vorwürfe, die der Methode des Unendlichkleinen gemacht werden können." — J. Z. (???)

Im Gegenſatze zu den vorhin erwähnten Mängeln und Verirrungen hat der Verfaſſer des vorliegenden Lehrbuches die höhere Analyſis ſowohl in formeller, als in philoſophiſcher und didaktiſcher Hinſicht auf eine ausgezeichnete

n heutigen Zuſtande der Wiſſenſchaft vollkommen entſprechende, und dabei ch ganz klare elementare Weiſe darzuſtellen gewußt, und namentlich hat er es h angelegen ſein laſſen, bei jeder paſſenden Gelegenheit auf Anwendungen r höhern Analyſis in den Naturwiſſenſchaften hinzudeuten, ſo daß ſich ſein erk in dieſer Beziehung vor allen bereits vorhandenen ähnlichen Werken durch s für die Gegenwart ſo wichtiges Moment höchſt vortheilhaft auszeichnet und wiſſermaßen als eine Einleitung in das Studium der mathematiſchen Phyſik trachtet werden kann.

Die wahre Philoſophie der Mathematik verdanken wir allein den Schöpfern ſer Wiſſenſchaft, wie die Geſchichte derſelben lehrt, und in der That iſt für h klar, daß die Männer, welche neue Begriffe und Methoden in die iſſenſchaft einführen, im Allgemeinen auch richtigere und gediegenere Vorſtel- ngen und Anſichten von dem wahren Weſen ihrer Wiſſenſchaft haben müſſen, s Fremdlinge in derſelben, wie Hegel und Conſorten. — Um nur ein Beiſpiel s der neueſten Zeit anzuführen, wem verdanken wir die wahre Metaphyſik r ſo lange und ſo viel beſprochenen imaginären Größen? Einem Mathematiker" der freilich ebenſo ſehr Philoſoph als Geometer iſt, wenn ch kein Hegelianer oder gar Schellingianer. — Wenn man über Ma- matik philoſophiren will, ſo ſollte man doch wenigſtens dieſe Wiſſenſchaft in ren Grundlehren nach dem gegenwärtigen Zuſtande kennen und nicht die alten rkehrtheiten wieder herausphiloſophiren, wie z. B. Frantz bei Beſprechung r imaginären Größen thut. — Aber bei Hegel trifft man faſt keinen einzigen funden, ihm eigenthümlichen Gedanken an. —

Vorrede des Verfaſſers.

Da wir uns ſchon ſeit langer Zeit mit der Philoſophie der Wiſſenſch
als unſerm Lieblingsſtudium beſchäftigt haben, ſo hielten wir uns zur B
beitung eines Gegenſtandes, wobei philoſophiſche Betrachtungen unvermei
ſind, für hinreichend vorbereitet. Der Weg, welchen wir bei der Bearbei
des vorliegenden Werkes eingeſchlagen haben, iſt in ſeinen Hauptzügen folgen

Zuerſt haben wir zu zeigen geſucht, wie man durch den Fortſchritt
mathematiſchen Abſtraction zu der Theorie gelangt iſt, welche ſich mit den
gemeinen Eigenſchaften der ſtetigen Functionen beſchäftigt, ſie
gen ſich durch algebraiſche oder andere Symbole von einem mathematiſch
ſtimmten Werthe ausdrücken laſſen, oder nicht. Es gewährt mehr als e
Vortheil, dieſe Theorie der Functionen von der Anwendung zu unterſche
welche man davon auf die Functionen der Algebra und der Trigonometrie
macht hat, und aus dieſem Grunde haben wir das vorliegende Werk „E
mentarlehrbuch der Theorie der Functionen" betitelt.

Bei dem gegenwärtigen Zuſtande der Analyſis beſteht die Theorie
Functionen faſt ganz in der Theorie der Verhältniſſe, welche zwiſchen den
Lagrange ſogenannten urſprünglichen und abgeleiteten Functio
ſtattfinden, und aus dem analytiſchen Ausdrucke dieſer Verhältniſſe entſp
die ſeit Leibnitz ſogenannte Differenzial- und Integralrechnung,
wegen des von Leibnitz eingeführten Begriffes des unendlich Kleinen,
Infiniteſimalrechnung. Jeder, welcher nur einige Kenntniſſe von
Geſchichte der mathematiſchen Wiſſenſchaft hat, weiß, daß Newton unter
Namen der Methode der Fluxionen eine Rechnung erfunden und bek
gemacht hat, welche ſich mit demſelben Gegenſtande, wie die Leibnitz
beſchäftigt, und daß durch einen ziemlich lebhaften Streit zwiſchen den
theien dieſer beiden großen Männer, jedem ein gleiches Recht an dieſer
würdigen Erfindung geſichert iſt.

Die gleichſam parallel laufende Entwickelung der Newton'ſchen
Leibnitz'ſchen Ideen iſt nicht bloß ein hiſtoriſches Factum, ſondern lieg
der Natur des Gegenſtandes und kann in einer didaktiſchen Darſtellung

ohne Nachtheil vernachläſſigt werden. Beide Theorieen ergänzen einander gegenſeitig, ohne daß man eine dritte Theorie angeben könnte, welche im Grunde nicht auf die eine oder die andere hinausliefe, und wir haben daher den Grund dieſer doppelten Behandlungsweiſe deſſelben Gegenſtandes in ſo weit anzugeben geſucht, als dieſes in einem elementaren und bis zu einem gewiſſen Punkte praktiſchen Lehrbuche geſchehen konnte.

Die Lagrange'ſche Methode, mit den Modificationen, welche damit vorgenommen ſind, ſeitdem man eingeſehen hat, daß es unmöglich iſt, die ganze Differenzialrechnung auf bloße algebraiſche Identitäten zu baſiren, wie dieſer große Geometer es wollte, iſt im Grunde nur eine Rückkehr zu der Newton'ſchen Methode. Die Lagrange'ſche Bezeichnungsart, welche ſich in vielen Fällen in Verbindung mit der Leibnitz'ſchen mit Vortheil anwenden läßt, unterſcheidet ſich nicht weſentlich von der Newton'ſchen Bezeichnungsart und die sogen Ausdrücke „urſprüngliche und abgeleitete Functionen" ſind nicht ſo zweckmäßig gewählt, als die Ausdrücke „Fluenten" und „Fluxionen", welchen Newton einen ſo präciſen Sinn beigelegt hatte. Aber in einem für Anfänger beſtimmten Lehrbuche darf man nicht vergeſſen, die allgemein eingeführte und angenommene Sprache zu reden. Wir haben daher in einem beſonderen Kapitel zuerſt die Theorie der abgeleiteten Functionen unter der jetzt üblichen Form aus einander geſetzt und alsdann uns angelegen ſein laſſen, die Theorie der unendlich kleinen Größen begreiflich zu machen, ſowie die Identität der durch die Infiniteſimalmethode und der durch die Betrachtung der Grenzen und der abgeleiteten Functionen erhaltenen Reſultate näher nachzuweiſen. Hat der Leſer dieſe Identität einmal genau aufgefaßt, ſo kann er die Beweiſe durch das unendlich Kleine ohne Bedenken als zuläſſig annehmen und die Vereinfachungen benutzen, welche dieſe Beweisart darbietet.

Auf dieſe Weiſe gelangt der Leſer zwar langſam, aber ohne Umwege zur Differenzirung der Elementarfunctionen, womit man gewöhnlich den Anfang zu machen pflegt. Hoffentlich wird man dieſen etwas längern Aufenthalt nicht tadeln, und wenn wir uns klar ausgedrückt haben, ſo werden uns Anfänger wenigſtens bei einer zweiten Lectüre verſtehen und es wird ihnen für die Folge ihrer Studien gewiß nicht ohne Nutzen ſein, wenn ſie ſich bei dieſen Allgemeinheiten anfangs etwas länger aufgehalten haben.

Zur Darſtellung der Functionen, welche ganz beliebig ſein und einen mathematiſchen Ausdruck haben können, oder nicht, haben wir uns beſtändig der Curven bedient. Durch dieſes unnatürliche und bequeme Mittel wird eine Menge von Reſultaten gleichſam augenfällig gemacht, während der rein analytiſche Beweis einen gewiſſen Kraftaufwand erfordert, wenn man nicht graphiſche Conſtructionen zu Hülfe nimmt. Allein man darf dieſe Anwendung der Curven zur leichtern Auffaſſung der Theorie der Functionen nicht mit der Anwendung der Differenzialrechnung auf die Geometrie verwechſeln, welche den Gegenſtand

eines beſondern Buches bildet. Die geometriſchen Anwendungen der Integralrechnung ſind weniger ausgedehnt und man wird ſie hinter den rein analytiſchen Theorieen auseinandergeſetzt finden, an welche ſie ſich am unmittelbarſten anſchließen.

Früher konnte man die geometriſchen Anwendungen als den Hauptzweck der Analyſis betrachten; allein ſeitdem die mathematiſche Phyſik ſo raſche Fortſchritte gemacht hat, würde dieſes nicht füglich mehr angehen. Die Unterſuchung der beſondern Aufgaben der Phyſik, auf welche die Geometer die Analyſis angewandt haben, gehört ohne Zweifel nicht in ein Lehrbuch der reinen Mathematik; allein die allgemeinen Eigenſchaften der Functionen, inſofern ſie im Raume und in der Zeit veränderliche phyſiſche Größen ausdrücken, gehören zu den allgemeinen und abſtracten Speculationen, wobei nichts aus der Erfahrung entlehnt wird, und welche folglich ebenſowohl, als die Unterſuchung der Eigenſchaften der Ausdehnung der reinen Mathematik anheim fallen. Wir haben die Aufmerkſamkeit des Leſers auf dieſe allgemeinen Eigenſchaften der phyſiſchen Functionen und der Zeitfunctionen hingeleitet, ſo oft ſich Gelegenheit dazu darbot, und in dieſer Beziehung könnte das gegenwärtige Werk als eine allgemeine Einleitung in die mathematiſche Phyſik betrachtet werden.

Da wir die Form eines Lehrbuches gewählt haben, ſo haben wir eine möglichſt *natürliche* Ordnung und Eintheilung der Gegenſtände zu erſtreben ſuchen müſſen, obgleich dabei willkührliche Verknüpfungen und nachtheilige Trennungen nicht ganz vermieden werden können. Gleich zu Anfang haben wir ſchon in der Differenzialrechnung in einem beſonderen Buche unter der Ueberſchrift „*Principien*" auch zugleich die erſten Begriffe von der *Integral-* und *endlichen Differenzenrechnung* mitgetheilt, weil uns dieſes zur Erreichung einer größern Klarheit und Vollſtändigkeit nothwendig ſchien und die ſich an die Differenzialrechnung anſchließenden Theorieen an den gehörigen Ort zu ſtehen kommen.

Dadurch, daß wir die *Variationsrechnung* in dem fünften Buche, welches ſich mit den Quadraturen beſchäftigt, vor der Theorie der Integration der Differenzialgleichungen abgehandelt haben, ſind wir von dem gewöhnlichen Gange abgewichen; allein dieſe Neuerung ſcheint ſowohl durch die Schwierigkeiten, wie durch den Zuſammenhang der Gegenſtände motivirt zu ſein. Denn wenn man die Variationsrechnung von der Theorie der Quadraturen, an welche ſie ſich ganz natürlich anſchließt, trennt, und ſie erſt nach der Integration der partiellen Differenzialgleichungen abhandelt, ſo wird der Lernende hinſichtlich der wahren Natur dieſer ſchönen Methode von *Lagrange* irre geführt, wie wenn ſie, um uns des Ausdruckes eines verdienten Schriftſtellers zu bedienen, eine neue *hypertranscendente* Rechnung bildete, während ſie nur eine elegante Anwendung der Principien der Differenzialrechnung auf Functionen unter dem Integralzeichen iſt.

Obgleich der gegenwärtige ſo raſche Fortſchritt der mathematiſchen Wiſſenſchaften nicht wie der einiger Zweige der Phyſik eine fortwährende neue Begründung der Elemente der Wiſſenſchaft nothwendig macht; ſo müſſen doch auch in der Mathematik gewiſſe Theorieen, wenn ſie ſich bei ihrer weitern Entwickelung vereinfachen und auf wichtige Gegenſtände angewandt werden, auch in die Elementarlehrbücher übergehen und darin die Stelle anderer Theorieen, welche ſich nicht ſo fruchtbar gezeigt haben, einnehmen. Es hat uns daher nothwendig und zweckmäßig geſchienen, daß die Theorie der elliptiſchen und Euler'ſchen Functionen in den Elementen der Integralrechnung vorkommen und daß die Beiſpiele der Beſtimmung beſtimmter Integrale möglichſt vervielfacht werden müſſen, und daß man endlich die neuen Verfahrungsarten zur Integration der linearen partiellen Differenzialgleichungen vollſtändiger erörtern muß, um ſo dem Leſer das Verſtändniß der ſpeciellen Unterſuchungen der mathematiſchen Phyſik zu erleichtern.

In einer didaktiſchen Darſtellung muß man nicht den logiſchen Zuſammenhang der Sätze mit dem natürlichen Zuſammenhange der phyſiſchen oder abſtracten Wahrheiten, welche dargeſtellt werden ſollen, verwechſeln. Man kann allen Bedingungen eines logiſchen Zuſammenhanges genügen, ohne über die weſentlichen Verhältniſſe der Ideen und der Theorieen, auf welche man ſie anwendet die gehörige Klarheit zu erlangen. Gute Köpfe faſſen dieſe Verhältniſſe immer auf, und wenn es auch nur auf eine unklare Weiſe geſchähe, ſo iſt für ſie hinreichend iſt, um ihnen bei der Aufſuchung neuer Wahrheiten als Richtſchnur zu dienen; allein gewöhnlichen Köpfen muß man dieſe Arbeit zu erleichtern ſuchen. Es wird daher bei dieſer unſerer Anſicht nicht auffallend erſcheinen, daß es nicht unſere alleinige Abſicht geweſen iſt, blos eine Reihe von Beweiſen zu reproduciren, und wir geſtehen ſogar, daß uns weniger daran gelegen hat, den Beweis eines Lehrſatzes in der äußerſten Strenge zu führen, wonach einige Mathematiker gegenwärtig ſo entſchieden ſtreben, als den Grund dieſes Lehrſatzes und ſeinen Zuſammenhang mit den übrigen mathematiſchen Wahrheiten zu zeigen. Wir haben uns daher der Leichtigkeit der Darſtellung wegen, und um den Leſer nicht gleich von vorn herein zu entmuthigen, Beweisführungen erlaubt, welche ſelbſt den größten Geometern ſo lange Zeit hindurch genügt haben. Beſonders hinſichtlich der etwa möglichen Rechnungs- und Druckfehler haben wir aber die Nachſicht des Leſers in Anſpruch zu nehmen, weil eine vollkommene Correctheit bei Werken, wie das vorliegende iſt nicht zu erreichen iſt, und wir werden jede uns in dieſer Beziehung mitgetheilte Bemerkung mit dem verbindlichſten Danke zur Vervollkommnung unſeres Werkes bei einer etwa nöthigen neuen Auflage zu benutzen ſuchen.

Obgleich man es ſich in einem Elementarbuche nicht zum Geſetze machen kann, die Erfinder alle zu citiren, ſo iſt dieſes doch jedesmal geſchehen in Beziehung auf die erſten Begriffe der Geſchichte der Wiſſenſchaft, weil dieſe

auch der Anfänger wiſſen muß, um ihm vor denen, deren Arbeiten den Fo
ſchritt der Wiſſenſchaft bewirkt haben, den gehörigen Reſpect einzuflöß
Diejenigen Leſer, welche in der höhern Analyſis ſchon bewandert ſind, u
deren Urtheile wir unſere eigenen Ideen unterwerfen, werden leicht erkenn
aus welchen Quellen wir geſchöpft haben, ohne daß wir ſie hier ſpeciell a
führen. Wenn wir aber insbeſondere das große Werk unſeres verehrungswü
digen Lehrers Lacroix hier nennen, ſo geſchieht dieſes aus einer beſonder
perſönlichen Dankbarkeit gegen dieſen Gelehrten, welcher durch ſeine Schrift
und Lehren ſo außerordentlich viel zur Beförderung eines gründlichen Unte
richtes in der Mathematik beigetragen hat.

Wir haben es ſorgfältig vermieden, Ausdrücke anzuwenden, welche nic
ſchon im Gebrauche waren und man findet in dieſem Lehrbuche hinſichtlich d
Terminologie nur eine einzige Neuerung von einiger Wichtigkeit, welche dar
beſteht, daß wir die verſchiedenen Stetigkeitsunterbrechungen einer Functi
nach Ordnungen unterſcheiden. So ſagen wir z. B., daß eine Functi
eine Stetigkeitsunterbrechung der erſten Ordnung erfährt, wenn ſie ei
unendlichen Werth annimmt, oder plötzlich von einem endlichen Werthe zu ei
andern endlichen Werthe übergeht. Wenn es dagegen die abgeleitete Functi
der erſten Ordnung iſt, welche eine ſolche Stetigkeitsunterbrechung erfährt, ſ
ſagen wir, daß die urſprüngliche Function eine Stetigkeitsunterbrechung d
zweiten Ordnung erfährt, u. ſ. f. Dieſe Definition ſoll nicht blos z
Abkürzung des Vortrages dienen, ſondern auch gewiſſen Grundbegriffen ei
größere Präciſion geben, und es iſt uns auffallend geweſen, daß ſie nicht ſch
früher in die Lehrbücher eingeführt iſt.

Wir haben kein Bedenken getragen, an einigen Stellen Ausdrücke zu g
brauchen, deren philoſophiſche Bedeutung zwar bekannt iſt, welche aber d
mathematiſchen Sprache nicht anzugehören ſcheinen, und diejenigen Leſe
welchen ſie vielleicht anſtößig ſind, können ſie ohne allen Nachtheil überg
hen. Wir haben dieſe Ausdrücke beibehalten, weil ſie andern Leſern vie
leicht zweckmäßig erſcheinen, und wir finden vielleicht eine andere Gelegenhei
wo wir die hier blos angedeuteten Ideen mit Nutzen weiter entwickeln könne
Das im vierten Kapitel des vierten Buches über den Zuſammenhang zwiſche
der Geometrie und Algebra Geſagte, ließe ſich noch viel weiter entwickel
worauf wir aber, um uns nicht zu ſehr von unſerm Hauptzwecke zu entfernen
nicht eingehen konnten.

Elementarlehrbuch

der

Theorie der Functionen

und der

Infinitesimalrechnung.

Erſtes Buch.

Principien.

Erſtes Kapitel.

Von den Functionen im Allgemeinen und der Theorie der Functionen ins Beſondere.

1. In der bildlichen Sprache der alten Algebraiſten wurden die Producte aus gleichen Factoren Potenzen, Dignitäten oder Functionen genannt. Gegenwärtig verbinden wir mit dem Ausdrucke Potenz noch denſelben Begriff wie der Ausdruck Dignität (dignitas) iſt noch in dem techniſchen Latein gebräuchlich; aber der Ausdruck Function hat ſeit langer Zeit dieſe particuläre Bedeutung verloren und eine weit allgemeinere Bedeutung angenommen, welche einen der merkwürdigſten Fortſchritte der mathematiſchen Abſtraction bedeutet.

Johann Bernoulli ſcheint der erſte geweſen zu ſein, welcher unter Function einer Größe x nicht blos die Potenzen dieſer Größe, wie x^n, ſondern alle Größen y, deren Beziehungen zu der Größe x durch algebraiſche Zeichen ausgedrückt werden können, ſo daß der Werth von y beſtimmt iſt, wenn der von x bekannt iſt, und umgekehrt, verſtanden hat. Es ſind alſo in dieſem Sinne die Ausdrücke:

$$y = a + (b - x)^n, \quad y = \frac{x^3 - mx + n}{\sqrt{1 + x^4}}, \quad y = \frac{1}{x}\log.(1 + x), \text{ etc.}$$

wohl Functionen von x, wie die Potenz $x^{\frac{n}{m}}$. Dieſe Erweiterung des Begriffes der Function datirt ſich vom Jahre 1690; allein ſie würde von geringer Wichtigkeit geweſen ſein, wenn ſie ſich nicht an die ein halbes Jahrhundert früher von Descartes eingeführten Begriffe angeſchloſſen hätte. Denn aus dieſen Begriffen von Descartes folgt, daß eine algebraiſche Gleichung nicht blos dazu geeignet iſt, die Rechnungsoperationen anzudeuten, durch welche man den Zahlenwerth einer beſtimmten Größe erhalten kann, ſondern daß ſie auch das Geſetz ausdrückt, nach welchem ſich zwei Größen gleichzeitig ändern, wovon die eine von der andern abhängig iſt, und welche beide von einem Werthe zu einem andern ſtetig übergehen, indem ſie alle zwiſchenliegenden Werthe durchlaufen. Dieſe gegenſeitige Abhängigkeit zwiſchen zwei veränderlichen Größen mußte auf eine allgemeine Weiſe ausgedrückt werden, was dadurch ſehr bequem geſchehen kann, daß man nach Bernoulli ſagt: die eine der veränderlichen Größen ſei eine Function der andern.

Descartes' Abſicht hierbei war, wie jeder weiß, die Algebra auf d Geometrie anzuwenden und zu dem Zwecke die Curven vermittelſt ei Gleichung zwiſchen den Coordinaten jedes ihrer Punkte algebraiſch zu deſini oder zu beſtimmen. Umgekehrt, dieſe Idee führte auch dahin, die Geomet auf die Algebra anzuwenden, indem man die beiden veränderlichen Grö jeder unbeſtimmten Gleichung als die Coordinaten einer Linie betrachtet, wo man vermittelſt dieſer Gleichung ſelbſt beliebig viele Punkte mit Genauig beſtimmen kann. Die Curve iſt alsdann blos das graphiſche und convention Bild des algebraiſchen Geſetzes, nach welchem die veränderlichen Größen einander abhängen; dieſe bildliche Darſtellung entſpricht aber der Natur dargeſtellten Sache auf die bewundernswürdigſte Weiſe, und führt die faſſung von Verhältniſſen, welche in ihrer abſtracten Form bei Anwend anderer Zeichen mit beträchtlichen Schwierigkeiten verbunden ſein würde, Thatſachen der reinen Anſchauung zurück. Denn die Stetigkeit (Con nuität) der Function wird durch die Stetigkeit der Linie verſinnlicht, die Biegungen einer Curve, ſo wie ihr ganzer Lauf zeigen oft mit ei einzigen Blicke das, was ſich durch die algebraiſche Unterſuchung der Gleich der Curve nur mit Schwierigkeit deutlich nachweiſen würde laſſen.

§. 2. Der eigenthümliche Character einer ſtetigen Function beſ darin, daß man der einen veränderlichen Größe immer Werthe beilegen k welche einander ſo nahe liegen, daß der Unterſchied zwiſchen den correſpo renden Werthen der davon abhängigen Function kleiner wird, als jede gege Größe; denn ſonſt ließe ſich dieſe Function nicht durch die Ordinate e Linie ausdrücken, wovon die andere veränderliche Größe die Abſciſſe iſt, umgekehrt iſt einleuchtend, daß dieſe Eigenſchaft der Stetigkeit jeder Funct zukommt, welche durch die veränderliche Ordinate einer gewiſſen Linie da ſtellt wird. Wenn eine durch eine algebraiſche Formel ausgedrückte Func für einen gewiſſen Werth der veränderlichen Größe, wovon ſie abh unendlich wird, ſo ſagt man: dieſe Function erfahre für dieſen Werth Unterbrechung der Stetigkeit. Dieſes findet z. B. bei der ſehr e fachen Function:

$$y = \frac{1}{x - a}$$

für den Werth $x = a$ ſtatt. Wenn man der veränderlichen Größe x einander ſehr nahe kommende Werthe beilegt, wovon aber der eine e kleiner und der andere etwas größer iſt, als a; ſo findet zwiſchen den e reſpondirenden Werthen der Function y ein ſehr großer Unterſchied ſtatt, u der eine Werth eine ſehr große negative und der andere eine ſehr g poſitive Zahl iſt, und in dieſem Falle wird die algebraiſche Differenz zwi den entſprechenden Werthen der Function y ſogar deſto größer, je kleiner Differenz zwiſchen den entſprechenden Werthen der veränderlichen Größe x w Die Hyperbel, deren Ordinate durch die Function y ausgedrückt wird, hat zwei Zweige, welche durch die der Abſciſſe a entſprechende aſymptotiſche dinate von einander getrennt werden.

Im Allgemeinen haben die Functionen, welche ſich durch die in der Alge und in der Trigonometrie gebräuchlichen Zeichen ausdrücken laſſen, wie vorhergehende Function, die Eigenſchaft, daß ſie in ihrem ganzen Verl ſtetig bleiben, abgeſehen von den Unterbrechungen der Stetigkeit, welche gewiſſe beſondere Werthe der veränderlichen Größe x, wovon ſie hängen, ſtattfinden können. Es gibt jedoch einige Ausnahmen von dieſer R auf welche man durch Anwendung der Regeln geführt wird, wonach algebra Zeichen mit einander verbunden werden. Wenn man z. B. $y = (-a)^x$ ſ

a eine positive Zahl bezeichnet, so wird y jedesmal imaginär, wenn x Bruch von einem ungeraden Zähler und von einem geraden Nenner , und da man zwischen zwei einander beliebig nahen Werthen von x sich ndlich viele Brüche mit einem ungeraden Zähler und einem geraden Nenner en kann; so folgt, daß man zwei Punkte nicht durch einen stetigen Zug inden kann, welche zwei Systemen reeller Werthe der Coordinaten x und ntsprechen, wie nahe sie einander auch liegen mögen. Allein solche anomale ctionen, wie die eben angeführte, lassen sich auf Naturerscheinungen nicht enden, und spielen selbst bis jetzt in der reinen Analysis nur eine sehr beschränkte Rolle, und erst weit später wird in dem vorliegenden Werke wieder von die Rede sein.

§. 3. Andererseits sieht man leicht ein, und diese Betrachtung ist bei ihm wichtiger, daß eine Größe von einer andern abhängen kann, ohne daß diese Abhängigkeit durch eine Verbindung algebraischer Zeichen ausdrücken . So weiß man z. B. aus der Trigonometrie, daß man zur Andeutung Sinus, Cosinus und der Tangente eines Bogens, welches geometrisch bestimmte Größen sind, sobald die Größe des Bogens gegeben ist, specielle Zeichen anwendet; allein diese trigonometrischen Größen lassen sich dennoch nicht mittelst rein algebraischer Zeichen als Functionen des Bogens ausdrücken. Wenn man ferner ein Pendel S m (Fig. 1) um einen Winkel m S V der Verticale entfernt und dasselbe im leeren Raume der Wirkung der Schwere überläßt, so sieht man leicht ein, daß zwischen der seit dem Beginnen der Bewegung verflossenen Zeit und dem Winkel, welchen die Pendelstange in Augenblick mit der Verticale bildet, eine nothwendige Relation statt findet; allein diese Relation läßt sich nicht vermittelst der algebraischen und trigonometrischen Zeichen allein ausdrücken. Dennoch nehmen wir zwischen diesen beiden Größen eine gegenseitige Abhängigkeit an, indem wir sagen, daß der Schwingungswinkel eine Function der Zeit sei, wodurch aber die Bedeutung des Wortes Function beträchtlich erweitert wird.

Diejenigen Leser, welche die Dynamik studirt haben, wissen, daß man den Zahlenwerth des Ablenkungs- oder Elongationswinkels des Pendels für einen Augenblick, so wie für jeden Werth der Länge des Pendels und seines anfänglichen Ablenkungswinkels mit jedem beliebigen Grade von Annäherung finden kann, indem man nur eine einzige Größe, nämlich den Raum, welchen ein im leeren Raume frei fallender Körper während der ersten Secunde seines Falles durchläuft, der Beobachtung entlehnt. Aber das Studium anderer Naturerscheinungen, und besonders der des socialen Lebens, bietet uns eine Menge von Fällen dar, wo zwei veränderliche Größen offenbar von einander abhängig sind, ohne daß man die eine vermittelst der andern a priori berechnen kann, weil sich der zwischen ihnen statt findende Zusammenhang entweder gar nicht mathematisch bestimmen läßt, oder weil diese Bestimmung, wenn sie möglich ist, uns noch unbekannt ist.

So ist z. B. die größte Spannkraft des Wasserdampfes eine Function der Temperatur dieses Dampfes, die mittlere Temperatur der verschiedenen Schichten einer Luftsäule eine Function der Höhe der Schicht über den Niveau des Meeres, die verlangte Quantität eines Lebensmittels eine Function des üblichen Preises, das Verhältniß der Anzahl der Individuen jedes Alters bei einer gegebenen Bevölkerung zu der ganzen Bevölkerung eine Function dieses Alters, u. s. f. Wenn man dem Ausdrucke Function, wie es jetzt geschehen muß, eine ganz allgemeine Bedeutung gibt, so wird derselbe gewissermaßen aus der mathematischen Sprache in die weniger specielle Sprache aller derer versetzt, welche die Wissenschaften, worin man meßbare Größen unter einander vergleicht, cultiviren.

Die Functionen der hier in Rede ſtehenden Art, können nur durch B
Beobachtung gegeben werden, und ſie werden als bekannt angeſehen, wenn m
eine Tafel angefertigt hat, worin ſich einerſeits ſehr viele und einander ſo
nahe liegende Werthe der veränderlichen Größe und andererſeits die correſp
direnden Werthe der davon abhängigen Function befinden, wie ſie ſehr genaue
zahlreiche Beobachtungen geben, ſo daß die möglichen Beobachtungsfehler
aus den mittleren Reſultaten verſchwinden. Die auf dieſe Weiſe beſtimm
Functionen muß man *empiriſche* Functionen nennen, im Gegenſatze
den *mathematiſch* beſtimmbaren Functionen, welche man genau, oder
einem beliebigen Grade von Annäherung berechnen kann, indem man ſich
auf ihre mathematiſche Definition ſtützt.

Die von *Descartes* angegebene graphiſche Darſtellungsart der Funct
nen iſt ſowohl auf die empiriſchen Functionen, wie auf die anwendbar, wel
ſich durch eine algebraiſche Formel ausdrücken laſſen, weil man auch für die
im Allgemeinen die Formel in eine Tafel verwandeln muß, um einzelne Pun
zu beſtimmen, welche man alsdann durch einen ſtetigen Zug verbindet, ſo
die Curve mit einer deſto größern Genauigkeit gezeichnet wird, je näher
genau beſtimmten Punkte einander liegen, und je größer ihre Anzahl iſt.

Diejenigen, welche ſich mit den phyſikaliſchen und ſocialen Wiſſenſchaf
beſchäftigen, wiſſen alle, welche Vortheile die graphiſche Darſtellung der em
piriſchen Functionen gewährt, um die ſich darauf beziehenden Aufgaben prakt
zu löſen und endlich die Reſultate kennen zu lernen, welche die bloße Betra
tung der Tafeln nicht in das gehörige Licht ſetzen würde; denn die begriffli
Vorſtellung der Continuität wird hier durch ein Inductionsverfahren erſe
welchem der menſchliche Geiſt die meiſten ſeiner Entdeckungen verdankt.

§. 4. Eine meßbare phyſiſche Größe muß immer endlich bleiben, u
kann folglich nicht, wie gewiſſe algebraiſche Functionen, Unterbrechungen
Stetigkeit erfahren, welche von dem Durchgange der Function durch einen
endlich großen Werth herrühren. So oft man findet, daß eine phyſiſche Gr
durch eine mathematiſche Function ausgedrückt wird, bei welcher ſolche Unt
brechungen der Stetigkeit ſtatt finden, muß man ſchließen, daß die mathem
tiſche Function in der Nähe der Werthe, für welche die Unterbrechung
Stetigkeit ſtattfindet, das wahre Maß der phyſiſchen Größe nicht mehr ausdr

So wird z. B. die gegenſeitige Attractionskraft zwiſchen zwei ponderab
Moleculen bekanntlich durch die Function:

$$y = \frac{a}{x^2} \qquad (1)$$

ausgedrückt, wo a eine Conſtante und x die gegenſeitige Entfernung der beid
als mathematiſche Punkte betrachteten Molecule bezeichnet. Dieſe Functi
wird unendlich, wenn x verſchwindet; allein man kann phyſiſch weder anne
men, daß ſich die Molecule auf mathematiſche Punkte reduciren, noch daß die
Punkte zuſammenfallen. Wenn die Molecule einander ſehr nahe kommen,
muß man für die Gleichung (1), welche nahezu genau war, ſo lange die D
menſionen der Molecule gegen ihre gegeſeitige Entfernung ſehr klein blieb
eine andere ſubſtituiren, welche von der Figur der Molecule abhängig iſt.

Wenn eine phyſiſche Größe ſich mit der Zeit ändert, oder blos weg
der Veränderung der Entfernungen zwiſchen den Moleculen oder den mater
len Syſtemen, oder in Folge des Verlaufes der Zeit in Verbindung mit d
Veränderung der Entfernungen; ſo wäre es den Geſetzen unſerer Vorſtellung
zuwider, wenn man annehmen wollte, daß ſie von einem endlichen Werthe
einem andern endlichen Werthe übergehen könnte, ohne während dieſes Ue
ganges alle zwiſchenliegenden Werthe anzunehmen, was ſchon das befan

wort der alten Philoſophen ausdrückt: Natura non facit saltus. Aber ern unvollkommenen Kenntniſſen hinſichtlich der Conſtitution der materiellttel ſind wir für gewiſſe phyſiſche Größen, ſo wie wir ſie definiren und können, zu der Annahme berechtigt, daß ſie Unterbrechungen der Stedarbieten, welche aus dem plötzlichen Uebergange von einem endlichen zu einem anderen entſpringen. Wenn z. B. zwei heterogene Flüſſigwie Waſſer und Queckſilber, über einander liegen, ſo betrachten wir chtigkeit wie eine Größe, welche ſich an der Berührungsfläche beider eiten plötzlich ändert, obgleich wir in philoſophiſcher Hinſicht aller einlichkeit nach annehmen können, daß die Unterbrechung der Stetigkeit inden würde, wenn wir die Conſtitution der Flüſſigkeiten und alle in he der Berührungsfläche ſtatt findenden Erſcheinungen genau und vollkennten.

5. Aber ſchon deßwegen allein, daß die mathematiſchen oder empiriunctionen dem Geſetze der Stetigkeit genügen, beſitzen ſie gewiſſe allgeEigenſchaften, welche von hoher Wichtigkeit ſind, nicht blos für die e Theorie des Calculs, ſondern noch vielmehr für die Interpretation turerſcheinungen. Wir beſchränken uns hier auf die Anführung zweier Eigenſchaften, welche ſich aus der graphiſchen Darſtellung der Functioch Curven ergeben, und ſpäter weiter entwickelt werden ſollen; aber eren gegenwärtigen Zweck hier blos angeführt zu werden brauchen.

ie erſte Eigenſchaft beſteht darin: daß die Veränderungen des es einer Function von einem beſtimmten Werthe aus nahezu rreſpondirenden Werthen der Veränderungen der veränen Größe der Function proportional ſind, wenn dieſe Verungen ſehr klein ſind. Eine ſehr wichtige Anwendung dieſes Prinird ſchon bei dem Gebrauche der Proportionaltheile der Logarithmentafeln t. Um die Begriffe durch ein anderes Beiſpiel zu fixiren, wollen wir ebraiſche Function:

$$y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10} \qquad (2)$$

ten, welche durch die beiden Curvenzweige i l m n, s u v (Fig. 2), die ine der Abſciſſe $x = 10$ entſprechende aſymptotiſche Ordinate von einzetrennt werden, graphiſch dargeſtellt wird; ſo finden wir:

			Differenz.
1 für	$x = 1{,}00$,	$y = 0{,}00000$	
	$x = 1{,}01$,	$y = +0{,}00555$	$+ 0{,}00555$
	$x = 1{,}02$,	$y = +0{,}01109$	$+ 0{,}00554$
	$x = 1{,}03$,	$y = +0{,}01662$	$+ 0{,}00553$
. . . . .			
2 für	$x = 6{,}00$,	$y = 0{,}00000$	
	$x = 6{,}01$,	$y = -0{,}01256$	$- 0{,}01256$
	$x = 6{,}02$,	$y = -0{,}02523$	$- 0{,}01267$
	$x = 6{,}03$,	$y = -0{,}03801$	$- 0{,}01278$
. . . . .			

s Geſetz der Proportionalität verificirt ſich mit einer großen Annähebeiden Fällen, obgleich ſich die Werthe von y für gleiche Zunahmen n zweiten Falle weit ſchneller ändern, als im erſten. Wir haben jedoch rth von x immer nur um $\frac{1}{100}$ ändern laſſen, was noch kein ſehr kleich iſt, und wenn wir für x eine Reihe von Werthen genommen hätten, 0,001 von einander verſchieden ſind; ſo würde die Proportionalität der enden Veränderungen von y ſich mit einer weit größeren Annäherung eſtellt haben.

Dieſes alles läuft übrigens auf die Annahme hinaus, daß ein Curvenbog um ſo mehr mit der durch einen ſeiner Endpunkte gezogenen Tangente zuſa menfällt, je kleiner dieſer Bogen iſt; denn für eine gerade Linie ſind die Di ferenzen der Ordinaten denen der Abſciſſen ſtreng proportional, und das co ſtante Verhältniß dieſer Differenzen iſt gleich der trigonometriſchen Tange des Winkels, welchen die gerade Linie mit der Axe der Abſciſſen bildet.

Die Fruchtbarkeit dieſes ſo einfachen Principes, ſo wie ſeine Anwendb keit überhaupt iſt leicht einzuſehen. So oft z. B. gewiſſe veränderliche Grö um mittlere Werthe ſchwanken, wovon ſie ſich nur ſehr wenig entfernen, u dieſes bei der Größe $x = x_0 + x'$ der Fall iſt, wenn x' eine veränderli und gegen die conſtante Zahl x_0 immer ſehr kleine Zahl iſt, werden alle kannte, oder unbekannte mathematiſche oder empiriſche Functionen von x Fu tionen von x', welche man ohne merklichen Fehler auf die Form $a + b$ zurückführen kann, wo a und b conſtante Zahlen bezeichnen, d. h. auf einfachſte algebraiſche Function. Dieſes iſt in der That das allgemeine A proximationsverfahren, deſſen ſich die Analyſten bedienen, wenn ſie Unterſuch gen dem Calcul unterwerfen wollen, welche ſich in ihrer ganzen Allgemein jeder mathematiſchen Behandlungsweiſe entziehen.

Mehrere durch das Experiment entdeckte Principien der Phyſik, welche als Beobachtungsfacta erſcheinen, ſind nichts als Folgerungen aus dem e erwähnten mathematiſchen Principe.

§. 6. Die zweite allgemeine Eigenſchaft der ſtetigen Functionen, wel wir hier anführen wollen, beſteht darin: daß der Werth einer Functi in der Nähe ihrer größten oder kleinſten Werthe nahezu conſta bleibt. Dieſes erhellet ebenfalls aus der Betrachtung der die Function d ſtellenden Curve; denn wenn die Ordinate dieſer Curve, nachdem ſie zugeno men hat, abnimmt, was bei dem Maximum der Fall iſt, oder im Gegenth nachdem ſie abgenommen hat, zunimmt, in welchem Falle ſie durch ein M nimum geht; ſo wird die Tangente der Curve zu der Abſciſſenaxe paral wie in den Punkten m und u (Fig. 2). Die Ordinate dieſer Tangente n conſtant und die des kleinen Curvenbogens, welcher nahezu mit der Tange zuſammenfällt, hat eben deßwegen auch einen faſt conſtanten Werth (§. Es können zwar Fälle vorkommen, wo dieſe Regel nicht anwendbar iſt, bei der Curve g h k (Fig. 3), welche im Punkte h einen ſogenannten Rü kehrpunkt oder eine Spitze darbietet. Die Ordinate des Punktes h iſt Maximum, obgleich die gemeinſchaftliche Tangente der beiden ſich im Punkt berührenden Curvenbogen g h, h k auf der Abſciſſenaxe ſenkrecht und nicht ihr parallel iſt. Allein dieſe Ausnahme rührt von einer beſonderen zufälli Zeichnung der Curve g h k und von einer beſtimmten Lage der Abſciſſen gegen dieſe Curve her, wogegen die allgemeine Regel, wovon die Figur 2 e Anwendung darbietet, keine beſondere Zeichnung der Curve vorausſetzt und jede andere Richtung der Abſciſſenaxe ſtattfinden würde, oder was auf daſſe hinausläuft, nach einer beliebigen Verrückung dieſer Curve gegen dieſe A Nur würden, wenn eine ſolche Verrückung ſtattfände, die größten und kleinſ Ordinaten nicht mehr den Punkten m und u, ſondern andern Punkten der Cu entſprechen.

Durch die ſpäter anzugebenden Methoden findet man unmittelbar, daß größten und kleinſten Werthe der Function (2) den Werthen $x = 4$, $x =$ entſprechen, und die numeriſche Rechnung gibt:

		Differenz.
1 für $x = 3{,}99$,	$y = 0{,}999983$	
$x = 4{,}00$,	$y = 1{,}000000$	$+ 0{,}000017$
$x = 4{,}01$,	$y = 0{,}999983$	$- 0{,}000017$
. . . . .		

			Differenz.
2 für	$x = 15{,}99$,	$y = 25{,}000017$	
	$x = 16{,}00$,	$y = 25{,}000000$	$- 0{,}000017$
	$x = 16{,}01$,	$y = 25{,}000017$	$+ 0{,}000017$
	. . . . .		

Eine Veränderung des Werthes von x von 0,01, wenn $x = 4$ oder $x = 16$ iſt, bewirkt alſo in dem Werthe von y eine Veränderung $= 0{,}000017$, während nach den weiter oben angeführten Rechnungen die einer gleichen Veränderung von y für $x = 1$, 326 mal und für $x = 6{,}739$ mal größer iſt.

Die eben betrachtete Eigenſchaft der größten und kleinſten Werthe einer Function wird in der Praxis beſtändig angewandt, und namentlich in der techniſchen Mechanik, wo es auf die Beſtimmung des Werthes einer gewiſſen Größe ankommt, welcher einem Maximum des Nutzeffectes für denſelben Geld- oder Kraftaufwand oder einem Minimum des Geld- oder Kraftaufwandes zur Hervorbringung deſſelben Nutzeffectes entſpricht. Dieſe Eigenſchaft kommt der Unvollkommenheit unſerer Kenntniſſe und unſerer Meßinſtrumente ſehr zu Hülfe, indem ſie die Gränzen erweitert, zwiſchen welche unſere Schätzung fallen kann, ohne daß daraus merkliche Veränderungen des Geld- und Kraftaufwandes, oder des hervorgebrachten Nutzeffectes entſpringen. Wie wichtig und leicht zu begreifen dieſes Princip auch iſt, ſo hat Kepler, wie Montucla *) ſagt, dasſelbe doch zuerſt in ſeiner Stereometria doliorum vom Jahre 1615 ausgeſprochen.

§. 7. Nun iſt aber leicht einzuſehen, daß es außer dieſen beiden faſt für ſich klaren, allen ſtetigen Functionen gemeinſamen Eigenſchaften noch andere, nicht ſo leicht in die Augen fallende Eigenſchaften geben kann, welche ebenfalls allen Functionen, oder gewiſſen Klaſſen von Functionen, die durch allgemeine Merkmale beſtimmt werden, zukommen, wie z. B. die Eigenſchaft der Functionen, beſtändig mit der veränderlichen Größe, wovon ſie abhängen, zuzunehmen, oder periodiſch dieſelben Werthe für äquidiſtante Werthe dieſer veränderlichen Größe anzunehmen. Man kann ſich alſo eine Theorie denken, deren Object in der Unterſuchung der allgemeinen Eigenſchaften der Functionen beſteht, und dieſe Theorie bildet einen für ſich beſtehenden beſonderen Zweig der Mathematik, welcher, genau genommen, eine Wiſſenſchaft für ſich hätte bilden können, ſelbſt wenn die Algebra nicht vorher bearbeitet wäre, und man dieſe Theorie daher nicht auf algebraiſche Functionen hätte anwenden können; obgleich der Hauptnutzen dieſer Theorie der Functionen ohne Zweifel in dieſer Anwendung beſteht, beſonders wenn es ſich um die numeriſche Beſtimmung der Größen handelt.

Wir nehmen dieſe Definition der Theorie der Functionen an, weil ſie auf einer Idee beruht, welche im ganzen Verlaufe dieſes Lehrbuches immer wiederkehrt. Sie ſcheint uns die philoſophiſche Grundlage des Theiles des mathematiſchen Unterrichtes zu ſein, womit wir uns jetzt beſchäftigen, und zwar die einzige, welche dem gegenwärtigen Zuſtande der mathematiſchen Analyſis vollkommen entſpricht. Man wird darauf durch die ſich immer weiter erſtreckenden Anwendungen der Analyſis auf die phyſikaliſchen Wiſſenſchaften geführt; aber unabhängig von jeder Anwendung findet man in der ſo aufgefaßten Theorie der Functionen die unmittelbare Löſung der zu verſchiedenen Zeiten von den Geometern in Beziehung auf die Grundprincipien der mathematiſchen Analyſis erhobenen Schwierigkeiten. **)

*) Hist. des Math. Part. IV., liv. 1. n. 4.

**) So würde z. B. Lagrange kein beſonderes Werk geſchrieben haben, um die Differenzialrechnung auf die algebraiſche Analyſis zurückzuführen, wenn er in der Differenzialrechnung einen Theil der Theorie der ſtetigen Functionen erkannt hätte, dieſe mögen ſich übrigens durch algebraiſche Zeichen ausdrücken

§. 8. Im Allgemeinen bezeichnet man eine bekannte, oder unbekannte mathematiſche, oder empiriſche Function y von x auf folgende Weiſe:

$$y = f(x),\ y = F(x),\ y = \varphi(x),\ \text{ꝛc.}$$

wo die Buchſtaben f, F, φ, ... nicht Größen, ſondern Functionszeichen ſind, ungefähr wie die Abkürzungen log. und sin. Wenn in den Klammern nur ein Buchſtabe ſteht, ſo läßt man ſie zuweilen weg und ſetzt hinter das Functionszeichen einen Punkt. Dieſe Bezeichnung wird ſchon in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Algebra angewandt, jedoch nur für algebraiſche Functionen; aber wir werden ſie in Zukunft bei jeder beliebigen Art von Functionen anwenden.

Bei der Beſtimmung einer Function $y = f(x)$ kommen gewöhnlich auch Größen vor, welche als conſtant betrachtet werden müſſen, während x und folglich auch y ſich ändern. Wenn y und x die veränderlichen Coordinaten eines Kreiſes bezeichnen, ſo iſt der Halbmeſſer deſſelben eine ſolche conſtante Größe. Eben ſo iſt der anfängliche Ablenkungswinkel eines Pendels (§. 3) und der von einem frei fallenden Körper während der erſten Secunde ſeines Falles beſchriebene Raum eine conſtante Größe, von deren Werthe die Function abhängt, welche den Werth des Elongationswinkels für jeden Werth der ſeit dem Anfange der Bewegung verfloſſenen Zeit ausdrückt. Man nennt dieſe conſtanten Größen zuweilen auch Parameter, eine aus der Theorie der Kegelſchnitte entlehnte Benennung, und bei den Anwendungen auf die phyſikaliſchen Wiſſenſchaften nennt man ſie auch wohl conſtante Coefficienten, deren Zahlenwerthe durch die Beobachtung beſtimmt werden müſſen.

Oft iſt es nöthig, auszudrücken, daß eine Function nicht bloß von der veränderlichen Größe x, ſondern auch von den gewiſſen Parametern a, b, c, ... beigelegten conſtanten Werthen abhängt, und alsdann ſchreibt man:

$$y = f(x, a, b, c \ldots .). \qquad (3)$$

Wenn dieſe Parameter a, b, c, ... keine conſtanten und für jeden beſondern Fall beſtimmten Werthe mehr hätten, ſondern ſich wie x ſtetig änderten, ſo würden ſie nicht mehr Parameter genannt werden können, und die Größe y würde eine Function von mehreren veränderlichen Größen ſein, womit wir uns erſt beſchäftigen werden, nachdem wir die Fundamente der Theorie der Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe auseinandergeſetzt haben.

§. 9. Die Buchſtaben a, b, c, ... x, y, ... können concrete Größen bezeichnen, wie Längen, Flächen, Volumina, deren Zahlenausdruck eine willkührlich gewählte Einheit vorausſetzt, oder abſtracte Zahlen. Aber in allen Fällen muß die Form der Function f ſo beſchaffen ſein, daß die Gleichung (3) unabhängig von den gewählten Maßeinheiten ſtattfindet, oder, was auf daſſelbe hinausläuft, man darf aus der Gleichung (3) keine Bedingung der Gleichheit zwiſchen heterogenen Größen ableiten können. Dieſe unter dem Namen des Principes der Homogeneität der Functionen bekannte Regel, welche in ihren Anwendungen keine Schwierigkeit darbietet, führt oft unmittelbar zu wichtigen Folgerungen in Beziehung auf die Form der Functionen. Man bedient ſich dieſer Regel oder dieſes Principes auch zu einer ſehr einfachen Beweisart gewiſſer Fundamentalſätze der Geometrie und Mechanik, und wir halten dieſe Beweisart für die directeſte von allen, welche man einſchlagen kann. *)

Um von dem Principe der Homogeneität der Functionen hier eine Anwendung zu zeigen, wollen wir die Aufgaben im §. 3 wieder betrachten und zu

laſſen oder nicht, und welche Theorie unabhängig von den Anwendungen ſtattfindet, welche man davon auf die Functionen und auf die Algebra machen kann.

*) Man ſehe die zweite Note in Legendre's Geometrie und §. 26 in Poiſſon's Mechanik, 2te Auflage.

em Zwecke den Ablenkungswinkel eines Pendels aus der Verticale nach Ver-
uf einer von dem Beginnen der Bewegung an gezählten Zeit t mit θ be-
eichnen, den anfänglichen Ablenkungswinkel des Pendels mit θ_0, die Länge
es letzteren mit l und mit $\frac{1}{2}$ g, wie gewöhnliche die Länge, welche ein frei
allender Körper in der ersten Zeiteinheit seines Falles vermöge der Wirkung
er Schwere, wodurch auch das Pendel bewegt wird, durchläuft; so haben wir:

$$\theta = f(t, \theta_0, g, l).$$

ier ist θ die Function, t die veränderliche Größe, wovon sie abhängt und
$_0$, g, l sind Constanten oder Parameter, deren es nicht noch andere geben
nn, weil alle Bedingungen der Erscheinung bestimmt sind, sobald man die
erthe dieser Constanten bestimmt hat. Nun sind aber g und l die einzigen
rößen, deren Zahlenwerth von der gewählten Längeneinheit abhängig ist, und
er Werth von θ, als Function von t, kann sich nicht mit dieser willkührlichen
ängeneinheit ändern. Die Function f ist also blos von dem Verhältnisse
er Linien g, l, abhängig, und man kann daher setzen:

$$\theta = f\left(t, \theta_0, \frac{g}{l}\right).$$

Ferner wollen wir annehmen, man wüßte aus den ersten Versuchen über
n Fall schwerer Körper, daß sich die Quadratwurzel aus dem Parameter g
er Zeiteinheit proportional oder für dieselbe verflossene Zeit im umgekehrten
erhältnisse des Zahlenwerthes von t ändert; so folgt, da der Werth von θ
r einen gegebenen Augenblick nicht von der willkührlich gewählten Zeiteinheit
hängen kann, daß die Zeit t nur mit $\sqrt{g}$ multiplicirt in der Function f
rkommen kann, und man folglich hat:

$$\theta = f\left(t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}, \theta_0\right).$$

un aber können wir die Form der Function f nicht näher bestimmen, ohne
n die auf diese Aufgabe speciell anwendbaren dynamischen Principien näher
ugehen, was hier unser Zweck nicht ist.

§. 10. Wenn man zu gleicher Zeit

$$y = f(x), \; x = \varphi(t) \qquad (4)$$

t, so daß der Werth von y unmittelbar von dem von x und der Werth von
unmittelbar von dem von t abhängt; so ist der Werth von y mittelbar von
m Werthe von t abhängig und t ist, wie man zu sagen pflegt, eine Function
von einer Function, oder einfacher, eine mittelbare Function der
änderlichen Größe t. Die Beispiele dieser mittelbaren und indirecten Ab-
ngigkeit zweier Größen von einander, kommen in der reinen Mathematik und
der Physik so häufig vor, daß wir diesen Fall etwas näher betrachten müssen.
ie in Rede stehende Abhängigkeit würde sich durch die Bezeichnung:

$$y = f[\varphi(t)], \text{ oder } y = f(\varphi t)$$

drücken lassen.

Man könnte auch haben:

$$y = f(x, z), \; x = \varphi(t), \; z = \psi(t), \qquad (5)$$

glich:

$$y = f(\varphi t, \psi t) = F(t),$$

ob gleich die Function y scheinbar von zwei veränderlichen Größen x, z in
esem Falle abzuhängen scheint; so ist sie in der That doch nur von der ein-
en veränderlichen Größe t abhängig, deren Werth nur bestimmt zu werden
acht, um den von x, z und folglich auch den von y zu bestimmen.

Umgekehrt, wenn eine Gleichung:

$$y = F(t) = f(\varphi t, \psi t)$$

gegeben ist, so kann es zuweilen vortheilhaft sein, für dieselbe das gleichbedeutende System der drei Gleichungen (5) zu setzen, indem man zwei veränderliche Hülfsgrößen x, z einführt.

§. 11. Der Ausdruck Function implicirt den Begriff einer gegenseitigen abhängigen Veränderlichkeit, und in den obigen Beispielen sind y, x, z folglich abhängige veränderliche Größen, wogegen t als die unabhängige veränderliche Größe betrachtet werden kann. Aus einem rein abstracten Gesichtspunkte betrachtet, würde es auch gestattet sein, y als die unabhängige veränderliche Größe und x, z, t als Functionen zu betrachten, welche von y mittelbar oder unmittelbar abhängig sind, weil, wenn man für y zuerst einen willkührlichen Werth annimmt, die Werthe von x, z, t durch die Gleichungen (4) oder (5) bestimmt werden. Wenn also eine Gleichung zwischen x und y gegeben ist, so kann man sie sowohl in Beziehung auf x, als in Beziehung auf y auflösen. Man kann daher in diesem Sinne sagen, daß die Wahl der unabhängigen veränderlichen Größe willkührlich ist, was aber in den meisten Fällen nicht mehr zulässig ist, wenn man eine Aufgabe nach ihren besonderen Daten betrachtet. Durch die Natur der sich gleichzeitig ändernden Größen werden zwischen denselben solche Relationen aufgestellt, daß die Veränderungen der einen als den Veränderungen der andern untergeordnet betrachtet werden müssen, und nur diejenigen dieser veränderlichen Größen, deren Veränderungen den Veränderungen keiner anderen Größe subordinirt sind, müssen als wirkliche unabhängige veränderliche Größen betrachtet werden.

So muß z. B. bei der mehrfach erwähnten mechanischen Aufgabe der Ablenkungswinkel eines Pendels als eine Function der seit dem Beginnen der Bewegung verflossenen Zeit t, und t selbst als die unabhängige veränderliche Größe betrachtet werden, wogegen es unnatürlich sein würde, die Zeit t als eine Function des zur unabhängigen veränderlichen Größe genommenen Winkels θ zu betrachten, weil die Zeit t sich offenbar unabhängig von der Bewegung des Pendels ändert oder verfließt und die Veränderungen des Winkels θ im Gegentheil von der verflossenen Zeit abhängig, oder den Veränderungen von t subordinirt sind.

Im Allgemeinen erfüllt die Zeit für alle Größen, welche sich mit ihr ändern und weil sie von einem bestimmten Augenblicke an von selbst verfließt, nach der Natur der Sache selbst alle Bedingungen einer nothwendig unabhängig veränderlichen Größe, weil ihre Veränderungen den Veränderungen keiner anderen Größe subordinirt sind. Wir werden in der Folge Gelegenheit haben, auf die Folgerungen aus diesem Principe zurückzukommen und die allgemeinen Eigenschaften der Größen, in so fern sie Functionen der Zeit sind, näher zu untersuchen, welche Untersuchung der reinen Mathematik mit demselben Rechte anzugehören scheint, wie die Untersuchung der Eigenschaften der Ausdehnung und der geometrischen Formen.

Die eben gemachte Bemerkung gilt auch für die von einem willkührlichen Anfangspunkte aus gezählte veränderliche Größe t und dient zur Bestimmung der Epoche eines Phänomenes, oder genauer, des Augenblickes, worin eine gewisse Größe einen bestimmten Werth erreicht. Wenn dagegen die veränderliche Größe t die absolute Dauer eines Phänomenes ausdrückte, so könnte sie die Rolle einer abhängigen veränderlichen Größe spielen. So ist z. B. die Dauer der Schwingung eines Pendels eine Function des anfänglichen Elongationswinkels, welchen wir weiter oben mit θ_0 bezeichnet haben. Die Größe dieses Winkels ist es, welche die Schwingungsdauer, als eine Folge von der Veränderung des anfänglichen Ablenkungswinkels θ_0 und nicht die Veränderung dieses Winkels als der Veränderung der Schwingungsdauer subordinirt.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich auf die veränderlichen Coordinaten anwenden, vermittelst welcher die Lage eines Punktes auf einer gegebenen Linie, auf einer gegebenen Fläche oder im Raume bestimmt wird. Die Größe, welche man als veränderlich betrachtet, aber nicht mehr von einem Augenblicke zum andern, sondern von einem Orte zum andern, ist eine Function der veränderlichen Coordinaten des Punktes, worin sie als gemessen angesehen wird. Der unabhängigen veränderlichen Coordinaten gibt es hier offenbar drei, wenn sich der Punkt auf eine beliebige Weise im Raume bewegen kann; aber nur zwei, wenn dieser Punkt auf einer gegebenen Fläche bleiben muß, und endlich nur eine, wenn dieser Punkt auf einer gegebenen Linie bleiben muß. Jedoch ist zu bemerken, daß die Wahl eines Coordinatensystemes willkührlich ist, so daß nichts hindert, die Coordinaten x, y, z, welche die Lage eines Punktes im Raume bestimmen, als Functionen der Coordinaten u, v, w eines anderen Systemes zu betrachten. Die Unabhängigkeit der veränderlichen Größen x, y, z hat also nicht in der Natur dieser Größen, sondern in der willkührlichen Wahl als Coordinaten, ihren Grund, während die Unabhängigkeit der veränderlichen Größe t, welche die seit einem zum Anfangspunkte genommenen Augenblicke verflossene Zeit ausdrückt, ihren Grund in dem Wesen oder der Natur dieser Größe hat. Diese Analogieen und diese Unterschiede sind unmittelbare Folgerungen aus den Analogieen und Unterschieden, welche die Fundamentalbegriffe der Zeit und des Raumes darbieten.

Durch das Vorhergehende soll nicht gesagt sein, daß bei gewissen physikalischen Untersuchungen durch die Natur derselben ein Coordinatensystem nicht als vor allen übrigen den Vorzug verdienend angedeutet würde, und die Aufmerksamkeit der Analysten muß sich besonders auf solche Indicationen richten; denn im Allgemeinen hat die Auflösung einer Aufgabe ihre Vollendung erreicht, wenn die veränderlichen Größen nach ihrer natürlichen gegenseitigen Abhängigkeit analytisch mit einander verbunden sind. So geht z. B. in der reinen Geometrie aus der Erzeugungsart einer Linie oder einer Fläche hervor, welche Coordinaten für die unabhängigen veränderlichen Größen genommen werden müssen, damit die Untersuchung der Eigenschaften der Linie oder Fläche möglichst erleichtert wird.

Zweites Kapitel.

Ueber die Klassifikation der Functionen und ihre Entwickelung in Reihen.

§. 12. Die mathematischen Functionen werden in entwickelte (explicite) und in unentwickelte (implicite) unterschieden. Unter unentwickelten Functionen versteht man solche, welche durch eine noch nicht aufgelöste Gleichung zwischen der Function und der unabhängig veränderlichen Größe bestimmt werden. So ist z. B. die Function y, welche durch eine der Gleichungen:

$$y^2 - bxy = a,\quad by + c = \log. x,\quad \text{tang. } y = y \sin. x, \text{ &c.}$$

bestimmt wird, eine unentwickelte Function von x; aber wenn diese Gleichungen in Beziehung auf y aufgelöst und auf die Form $y = f \cdot x$ gebracht würden, so würde y eine entwickelte Function derselben veränderlichen Größe.

Man kann die entwickelten und unentwickelten Functionen durch dieselbe Bezeichnung andeuten, indem man den zwischen der unabhängigen veränderli-

metriſchen Sinne muß man unter den Unterbrechungen der Stetigkeit nur die verſtehen, welche unabhängig ſind von der willkührlichen Richtung der Axen, worauf man die Curve bezieht.

Hieraus folgt alſo, daß man, um den vollſtändigen Ausdruck einer Curve durch eine algebraiſche Gleichung zwiſchen ihren Coordinaten zu haben, dieſe Gleichung von den Wurzelgrößen befreien, oder alle doppelten Zeichen der Wurzelgrößen von geradem Index beibehalten muß. Dieſes iſt die Grundlage der Correſpondenz zwiſchen der Algebra und der Geometrie, worauf wir wieder zurückkommen werden, wenn von den Anwendungen der Analyſis auf die Theorie der Curven ſpecieller die Rede ſein wird.

Dagegen können die transcendenten Curven, oder diejenigen, deren Ordinate eine transcendente Function der Abſciſſe iſt, plötzlich in ihrem Laufe unterbrochen werden, ohne daß ſich ihre Zweige wieder vereinigen, ſo daß der Punkt, welcher durch ſeine Bewegung einen der Curvenzweige beſchriebe, plötzlich ſtill ſtehen müßte. So beſteht z. B. die Curve, deren Gleichung:

$$y + 1 = a^{-\frac{1}{x}}$$

iſt, wo a eine poſitive Zahl > 1 bezeichnet, aus den beiden Zweigen B L, M N (Fig. 6), wovon der erſte in der Richtung der poſitiven Abſciſſen die Axe der x zur Aſymptote hat, und ſich in dem Punkte B, deſſen Coordinaten $x = 0$, $y = -1$ ſind, plötzlich ſchließt, während der zweite Zweig in dem Sinne der poſitiven y die Axe der y und in dem Sinne der negativen x die Axe der x zur Aſymptote hat. Denn ſo lange x poſitiv iſt, nimmt die Function

$$a^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{x}}}$$

für immer kleiner werdende Werthe von x fortwährend ab, und verſchwindet zuletzt mit x, während ſie ſich für immer größer werdende Werthe von x der Einheit ohne Ende nähert. Wenn dagegen x negative Werthe durchlauft, ſo nimmt dieſelbe Function für immer kleiner werdende Werthe von x über alle Grenzen hinaus zu, während ſie ſich für zunehmende Werthe von x wieder der Einheit ohne Ende nähert.

Die Punkte, worin ſich ein Zweig einer transcendenten oder empiriſchen Curve plötzlich ſchließt, werden Stillſtands- oder Schlußpunkte genannt. Wenn zwei getrennte Curvenzweige N M, M′N′ (Fig. 7) eine gemeinſchaftliche Ordinate P M N′ hätten, ſo daß die durch die Ordinate der Curve dargeſtellte Function plötzlich von dem Werthe P M zu dem Werthe P M′ überginge, ſo wären die Punkte M, M′ Zerreißungspunkte. Die algebraiſchen Functionen können weder Schlußpunkte, noch Zerreißungspunkte haben, und folglich keine anderen Unterbrechungen der Stetigkeit darbieten, als die, welche von dem Durchgange durch das Unendliche herrühren, wogegen die transcendenten Functionen Unterbrechungen der Stetigkeit darbieten können, welche von dem plötzlichen Uebergange von einem endlichen Werthe zu einem andern herrühren.

§. 17. Wenn die Theorie der Functionen eine größere Allgemeinheit hat, als die Algebra, inſofern darin von den gemeinſamen Eigenſchaften der algebraiſchen und transcendenten, und ſelbſt der Functionen gehandelt wird, welche keine mathematiſche Definition geſtatten; ſo erhält dieſe Theorie andererſeits eine Ausdehnung, welche urſprünglich nur in der reinen Algebra und für die Functionen einen Sinn hat, welche ſich algebraiſch ausdrücken laſſen. Dieſe Erweiterung beſteht darin, die imaginären Werthe in Betracht zu ziehen, welche eine algebraiſch ausgedrückte Function annimmt, wenn die veränderliche Größe,

von sie abhängt, durch reelle Werthe geht, welche diesseits oder jenseits gewisser Grenzen liegen, wie z. B., wenn in der Function:

$$y = x + \sqrt{1 - x}$$

veränderliche Größe $x > 1$ wird. Diese Erweiterung besteht ferner in der nahme, daß die unabhängig veränderliche Größe, selbst eine Reihe imaginärer Werthe durchlaufen kann. Um sich aber von einem solchen Durchlaufen en Begriff bilden zu können, muß man diese zweite veränderliche Größe, von die erste eine Function ist, als ihrerseits von einer dritten veränderlichen Größe, welche eine Reihe reeller Werthe durchläuft, abhängig betrachten. sei t diese letzte veränderliche Größe, x die unmittelbar davon abhängige änderliche und y eine Function von x. Ferner bezeichnen t_0, x_0, y_0; x, y, zwei Systeme correspondirender Werthe dieser drei Veränderlichen, t_0, t_1 reelle Größen sind, während x_0, y_0, x_1, y_1 reelle oder imaginäre Größen sein können; so ist klar, daß, während t von dem Werthe t_0 zu Werthe t_1 übergeht, indem es alle zwischenliegende reellen Werthe durchläuft, veränderliche x eine Reihe imaginärer Werthe durchlaufen kann, welche durch zwischen t und x stattfindenden algebraischen Zusammenhang bestimmt wird, welcher eine Reihe ebenfalls bestimmter reeller oder imaginärer Werthe von ntspricht. Dagegen wird die Reihe der imaginären Werthe, welche x nlaufen kann, indem es von dem Werthe x_0 zu dem Werthe x_1 übergeht, nicht bestimmt, wenn man nicht eine bestimmte directe oder indirecte hängigkeit zwischen x und einer andern Veränderlichen festsetzt, welche von reellen Werthe zu einem andern reellen Werthe übergeht, indem sie alle henliegenden reellen Werthe durchläuft, weil zwischen den imaginären Größen keine natürliche und bestimmte Größenordnung stattfindet. *)

*) Gauß hat die reelle und anschauliche Bedeutung der imaginären Ausdrücke direct nachgewiesen und dadurch ihre Zulässigkeit in der Rechnung vollständig gerechtfertigt, worüber er sich in den Götting. Gel. Anz. Stück 64 v. J. 1831 folgendermaßen ausdrückt:

„So wie die absoluten ganzen Zahlen durch eine in einer geraden Linie unter gleichen Entfernungen geordnete Reihe von Punkten dargestellt werden, in der der Anfangspunkt die Zahl 0, der nächste die Zahl 1 u. s. w. vertritt, und so wie dann zur Darstellung der negativen Zahlen nur eine unbegrenzte Verlängerung dieser Reihe auf der entgegengesetzten Seite des Anfangspunktes erforderlich ist: so bedarf es zur Darstellung der complexen ganzen Zahlen, d. h. der Zahlen von der Form $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, nur des Zusatzes, daß jene Reihe als in einer bestimmten unbegrenzten Ebene befindlich angesehen und parallel mit ihr auf beiden Seiten eine unbeschränkte Anzahl ähnlicher Reihen in gleichen Abständen von einander angenommen werde, so daß wir anstatt einer Reihe von Punkten ein System von Punkten vor uns haben, die sich auf eine zwiefache Art in Reihen von Reihen ordnen lassen, und zur Bildung einer Eintheilung der ganzen Ebene in lauter gleiche Quadrate dienen.

. . . . . .

$\ldots\ldots -2+2\sqrt{-1},\ -1+2\sqrt{-1},\ 2\sqrt{-1},\ 1+2\sqrt{-1},\ 2+2\sqrt{-1}\ \ldots\ldots$

$\ldots\ldots -2+\sqrt{-1},\ -1+\sqrt{-1},\ \sqrt{-1},\ 1+\sqrt{-1},\ 2+\sqrt{-1}\ \ldots\ldots$

$\ldots\ldots -2\ ,\ -1\ ,\ 0,\ 1\ ,\ 2\ \ldots\ldots$

$\ldots\ldots -2-\sqrt{-1},\ -1-\sqrt{-1},\ -\sqrt{-1},\ 1-\sqrt{-1},\ 2-\sqrt{-1}\ \ldots\ldots$

$\ldots\ldots -2-2\sqrt{-1},\ -1-2\sqrt{-1},\ -2\sqrt{-1},\ 1-2\sqrt{-1},\ 2-2\sqrt{-1}\ \ldots\ldots$

. . . . . .

Der nächste Punkt bei 0 in der ersten Nebenreihe auf der einen Seite der Reihe, welche die reellen Zahlen repräsentirt, bezieht sich dann auf die Zahl $i = \sqrt{-1}$, so wie der nächste Punkt bei 0 in der ersten Nebenreihe auf

In der Folge werden wir ſehen, daß nicht blos die algebraiſchen Fun
tionen, ſondern auch die exponentiellen, logarithmiſchen und trigonometriſch

---

der andern Seite auf $-1 = -\sqrt{-1}$ u. ſ. f. Bei dieſer Darſtellung wi
die Ausführung der arithmetiſchen Operationen in Beziehung auf die complex
Größen einer Verſinnlichung fähig, die nichts zu wünſchen übrig läßt.

Von der andern Seite wird hierdurch die wahre Metaphyſik der imagin
ren Größen in ein neues Licht geſtellt.

Unſere allgemeine Arithmetik, von deren Umfang die Geometrie der Alt
ſo weit überflügelt wird, iſt ganz die Schöpfung der neuern Zeit. Urſprün
lich ausgehend von dem Begriff der abſoluten ganzen Zahlen hat ſie ihr G
biet ſtufenweiſe erweitert; zu den ganzen Zahlen ſind die gebrochenen, zu d
rationalen die irrationalen, zu den poſitiven die negativen, zu den reellen d
imaginären hinzugekommen. Dieſes Vorſchreiten iſt aber immer anfangs m
furchtſam zögerndem Schritt geſchehen. Die erſten Algebraiſten nannten n
die negativen Wurzeln falſche Wurzeln, und ſie ſind es auch, wo die Aufga
auf welche ſie ſich beziehen, ſo eingekleidet vorgetragen iſt, daß die Beſch
fenheit der geſuchten Größe kein Entgegengeſetztes zuläßt. Allein ſo wen
man in der allgemeinen Arithmetik Bedenken hat, die gebrochen
Zahlen mit aufzunehmen, obgleich es ſo viele zählbare Dinge gibt, wo
eine Bruchzahl ohne Sinn iſt, ebenſowenig durften in jener den negativ
Zahlen gleiche Rechte mit den poſitiven deßhalb verſagt werden, weil unz
lige Dinge kein Entgegengeſetztes zulaſſen; die Realität der negativen Za
iſt hinreichend gerechtfertigt, da ſie in unzähligen andern Fällen ein adäqua
Subſtrat finden. Darüber iſt man nun freil ch ſeit langer Zeit im Klare
allein die den reellen Größen gegenübergeſtellten imaginären — ehemals v
hin und wieder noch jetzt, obwohl unſchicklich, unmögliche genannt — ſi
noch immer weniger eingebürgert, als nur geduldet, und erſcheinen alſo m
wie ein an ſich inhaltleeres Zeichenſpiel, dem man ein denkbares Subſt
unbedingt abſpricht, ohne doch den reichen Tribut, welchen dieſes Zeichenſpi
zuletzt in den Schatz der Verhältniſſe der reellen Größen ſteuert, verſchm
hen zu wollen.

Wir haben dieſen hochwichtigen Theil der Mathematik ſeit vielen Jahr
aus einem verſchiedenen Geſichtspunkte betrachtet, wobei den imaginären Gr
ßen ebenſogut ein Gegenſtand untergelegt werden kann, wie den negativen; e
hat aber bisher an einer Veranlaſſung gefehlt, unſere Anſicht öffentlich b
ſtimmt auszuſprechen, wenn gleich aufmerkſame Leſer die Spuren davon
der 1799 erſchienenen Schrift über die Gleichungen und in der Preisſchr
über die Umbildung der Flächen leicht wiederfinden werden. In unſerer A
handlung Theoria Residuorum Biquadraticorum, Gottingae 1832, ſind d
Grundzüge davon kurz angegeben; ſie beſtehen im Folgenden.

Poſitive und negative Zahlen können nur da eine Anwendung finden, w
das Gezählte ein Entgegengeſetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht d
Vernichtung gleich zu ſtellen iſt. Genau beſehen findet dieſe Vorausſetzung n
da ſtatt, wo nicht Subſtanzen (für ſich denkbare Gegenſtände), ſondern R
lationen zwiſchen je zwei Gegenſtänden das Gezählte ſind. Poſtulirt m
dabei, daß dieſe Gegenſtände auf eine beſtimmte Art in eine Reihe geordn
ſind, z. B. A, B, C, D ...., und daß die Relation des A zu B als d
Relation des B zu C u. ſ. w. gleich betrachtet werden kann. Hier gehört n
zu dem Begriff der Entgegenſetzung nichts weiter, als der Umtauſch d
Glieder der Relation, ſo daß, wenn die Relation (oder der Uebergang v
A zu B als $+1$ gilt, die Relation von B zu A durch -1 dargeſtellt w
den muß. Inſofern alſo eine ſolche Reihe auf beiden Seiten unbegrenzt i
repräſentirt jede reelle ganze Zahl die Relation eines beliebig als Anfa
gewählten Gliedes zu einem beſtimmten Grade der Reihe.

Sind aber die Gegenſtände von ſolcher Art, daß ſie nicht in eine, we
gleich unbegrenzte, Reihe geordnet werden können, ſondern ſich nur in Reihe
von Reihen ordnen laſſen, oder, was daſſelbe iſt, bilden ſie eine Mannig
faltigkeit von zwei Dimenſionen; verhält es ſich dann mit den R
lationen einer Reihe zu einer andern oder den Uebergängen aus einer in d
andere auf eine ähnliche Weiſe, wie vorhin mit den Uebergängen von einem
Gliede einer Reihe zu einem andern Gliede derſelben Reihe, ſo bedarf e

functionen eine bestimmte Bedeutung und einen bestimmten reellen oder imaginären Werth bekommen, wenn man die veränderlichen Größen dieser Functionen

---

offenbar zur Abmessung des Ueberganges von einem Gliede des Systemes zu einem andern außer den vorigen Einheiten + 1 und - 1 noch zweier andern unter sich auch entgegengesetzten + i und − i. Offenbar muß aber dabei noch postulirt werden, daß die Einheit i allemal den Uebergang von einem gegebenen Gliede einer Reihe zu einem bestimmten Gliede der unmittelbar angrenzenden Reihe bezeichne. Auf diese Weise wird also das System auf eine doppelte Art in Reihen von Reihen geordnet werden können.

Der Mathematiker abstrahirt gänzlich von der Beschaffenheit der Gegenstände und dem Inhalt ihrer Relationen; er hat es blos mit der Abzählung und Vergleichung der Relationen unter sich zu thun; insofern ist er ebenso, wie er den durch + 1 und − 1 bezeichneten Relationen, an sich betrachtet, Gleichartigkeit beilegt, solche auf alle vier Elemente + 1, − 1, + i und − i zu erstrecken befugt.

Zur Anschauung lassen sich diese Verhältnisse nur durch eine Darstellung im Raume bringen, und der einfachste Fall ist, wo kein Grund vorhanden ist, die Symbole der Gegenstände anders als quadratisch anzuordnen, indem man eine unbegrenzte Ebene durch zwei Systeme von Parallellinien, die einander rechtwinklig durchkreuzen, in Quadrate zertheilt, und die Durchschnittspunkte zu den Symbolen wählt. Jeder solcher Punkt A (Fig. 7 a) hat hier vier Nachbarn, und wenn man die Relation des A zu einem benachbarten Punkte durch + 1 bezeichnet, so ist die durch − 1 zu bezeichnende von selbst bestimmt, während man, welche der beiden andern man will, für + i wählen, oder den sich auf + i beziehenden Punkt nach Gefallen oben und unten nehmen kann. Dieser Unterschied zwischen oben und unten ist, sobald man vorwärts und rückwärts in der Ebene und rechts und links in Beziehung auf die beiden Seiten der Ebene einmal (nach Gefallen) festgesetzt hat, in sich völlig bestimmt, wenn wir gleich unsere Anschauung dieses Unterschiedes Andern nur durch Nachweisung an wirklich vorhandenen materiellen Dingen mittheilen können. Wenn man aber auch über letzteres sich entschlossen hat, sieht man, daß es doch von unserer Willkühr abhing, welche von den beiden in einem Punkte sich durchkreuzenden Reihen wir als Hauptreihe, und welche Richtung in ihr wir als auf positive Zahlen sich beziehend ansehen wollten; man sieht ferner, daß, wenn man die vorher als + i behandelte Relation für + 1 nehmen will, man nothwendig die vorhin durch − 1 bezeichnete Relation für + i nehmen muß. Das heißt aber in der Sprache der Mathematiker: + i ist eine mittlere Proportionalgröße zwischen + 1 und − 1 oder entspricht dem Zeichen $\sqrt{-1}$; wir sagen absichtlich nicht die mittlere Proportionalgröße, denn − i hat offenbar gleichen Anspruch. Hier ist also die Nachweisbarkeit einer anschaulichen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ vollkommen gerechtfertigt, und mehr bedarf es nicht, um diese Größe in das Gebiet der Gegenstände der Arithmetik zuzulassen.

Wir haben geglaubt, den Freunden der Mathematik durch diese kurze Darstellung der Hauptmomente einer neuen Theorie der sogenannten imaginären Größen einen Dienst zu erweisen. Hat man diesen Gegenstand bisher aus einem falschen Gesichtspunkt betrachtet und eine geheimnißvolle Dunkelheit dabei gefunden, so ist dies größtentheils den wenig schicklichen Benennungen zuzuschreiben. Hätte man + 1, − 1, $\sqrt{-1}$ nicht positive, negative, imaginäre (oder gar unmögliche) Einheit, sondern etwa directe, inverse, laterale Einheit genannt, so hätte von einer solchen Dunkelheit kaum die Rede sein können. Wir haben uns vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der genannten Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Größen liefern können, ihre Beantwortung finden wird."

Wegen der geometrischen Bedeutung der imaginären Ausdrücke vergleiche man weiter unten §. 76 Anmerk. Z. d. Uebers.

imaginäre Werthe durchlaufen läßt. Folglich ſind die in dieſem Parag gemachten Bemerkungen auf alle ſchon bekannten algebraiſchen oder transcende Functionen anwendbar.

§. 18. Wir haben eben gezeigt, wie die Analyſten die Functionen ihrer mathematiſchen Ausdrucksart klaſſificiren; allein die Functionen können nach ihrer Form oder nach der Form der Curven, welche ſie ausdrü klaſſificirt werden, und dieſe Klaſſifikation kann ſowohl die empiriſchen, wi algebraiſchen, oder transcendenten Functionen umfaſſen. Es kommt übri hier nicht darauf an, eine methodiſche und vollſtändige Klaſſifikation, wie welche ſich auf Gegeſtände von unendlicher Anzahl anwenden laſſen, wie in der Naturgeſchichte, aufzuſtellen, ſondern blos gewiſſe Klaſſen von Fun nen anzuführen, welche ſich durch allgemeine Merkmale auszeichnen.

Zunächſt wollen wir die geraden und ungeraden Functionen betracht Gerade Functionen werden nämlich die genannt, welche dieſelben Wer annehmen, wenn man der unabhängigen Veränderlichen gleiche Werthe mit e gegengeſetzten Zeichen beilegt, oder diejenigen, welche in einem Syſteme ort gonaler Coordinaten durch Curven dargeſtellt werden, welche gegen die A der Ordinaten ſymmetriſch ſind. Unter den algebraiſchen Functionen ſind d geraden Functionen die, welche nur gerade Potenzen der unabhängigen Verä derlichen enthalten, wie x^2, $\sqrt{1 - x^4}$, woher auch der Name der gera Functionen kommt, welchen man auf alle Functionen anwenden kann, die di ſelbe Aehnlichkeit der Form darbieten, obgleich ſie ſich nicht algebraiſch a drücken laſſen. Die trigonometriſche Function cos. x iſt eine gerade, weil m in der Trigonometrie den Coſinus eines negativen Bogens als denſelben Za lenwerth mit demſelben Zeichen, wie der deſſelben poſitiven Bogens habe betrachten muß.

Ungerade Functionen dagegen werden diejenigen genannt, welche f gleiche und entgegengeſetzte Werthe der unabhängig veränderlichen Größe gleic und entgegengeſetzte Zahlenwerthe annehmen, wozu die algebraiſchen Functione

$$\frac{1}{x^3},\ x\sqrt{1 + x^4}$$

gehören. Nach dieſer Definition ſind alſo sin. x und tang. x ebenfalls ung rade Functionen. Eine ungerade Function muß für $x = 0$ verſchwinden, w fern ſie für dieſen Werth von x keine Unterbrechung der Stetigkeit erfäh was z. B. bei den ungeraden Functionen:

$$\sqrt{\frac{1 + x^2}{x}},\ \text{cot. } x$$

der Fall iſt. Eine jede beliebige Function kann als die Summe aus ein geraden und und einer ungeraden Function betrachtet werden. Denn es ſei das Zeichen einer beliebigen Function, ſo kann man ſetzen:

$$f(x) + f(-x) = 2\varphi(x),$$
$$f(x) - f(-x) = 2\psi(x),$$

und alsdann iſt $\varphi(x)$ offenbar eine gerade und $\psi(x)$ eine ungerade Functi von x, welche Form übrigens die Function $f(x)$ auch haben mag. Aus dieſ beiden Gleichungen ergibt ſich aber:

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

was bewieſen werden ſollte.

§. 19. Periodiſche Functionen werden diejenigen genannt, welc immer dieſelben Werthe wieder annehmen, wenn man für die unabhängig ve änderliche Größe Werthe ſubſtituirt, die um gleiche Größen von einander ve ſchieden ſind. Die Größe dieſes Unterſchiedes oder dieſer Intervalle beſtimm

der mißt die Ausdehnung der Periode. So betrachtet man z. B. in der Trigonometrie die Kreisbogen als Größen, welche größer, als der ganze Kreisumfang werden und sowohl in dem positiven, als in dem negativen Sinne unbegrenzt zunehmen können, während die Sinus, Cosinus und überhaupt die trigonometrischen Functionen dieser Bogen periodisch dieselben Werthe wieder annehmen, so oft man zu dem ursprünglichen Bogen einen ganzen Kreisumfang hinzufügt, oder davon abzieht. Es sind also sin. ax, cos. ax, tang. ax periodische Functionen, deren Periode $\frac{2\pi}{a}$ zum Werthe hat. Die Function $y = \sin. ax$ z. B. ist die Ordinate einer Curve P′ N′ M′ O M N P . . . (Fig. 8), welche sich sowohl in dem Sinne der negativen, als der positiven Abscissen unbestimmt ausdehnt und sich vermittelst der natürlichen oder künstlichen trigonometrischen Tafeln leicht durch Punkte construiren läßt. Die gleichen Intervalle P′ O, O P, ... messen die Ausdehnung der Periode.

Die Natur bietet uns eine Menge von Erscheinungen dar, welche dem Gesetze der Periodicität unterliegen, und folglich verdient die Klasse der periodischen Function, deren einfachsten Typus die Geometrie des Kreises an die Hand gibt, eine besondere Aufmerksamkeit.

§. 20. Unter den nichtperiodischen Functionen sind hier blos die anzuführen, welche die Eigenschaft haben, beständig zu- oder abzunehmen, wenn die unabhängige Veränderliche zunimmt, denn die nicht periodischen Functionen, welche abwechselnd zu- und abnehmen, bieten weiter keine wichtigen Merkmale dar, in Folge welcher sie in besondere Klassen eingetheilt werden könnten.

Besonders bemerkenswerth sind die Functionen, welche sich ohne Ende dem Werthe Null, oder jedem andern festen Werthe nähern, wenn die unabhängige Veränderliche zu- oder abnimmt. Von dieser Beschaffenheit sind die Functionen:

$$y = \frac{1}{b + x^m}, \quad y = b + a^{-x^n},$$

wo a, m, n positive Zahlen bezeichnen und a außerdem größer, als die Einheit angenommen wird.

Die Functionen dieser Art müssen häufig in dem Ausdrucke physikalischer Erscheinungen vorkommen; denn es geschieht oft, daß eine Größe von einem gewissen Zustande aus fortwährend abnimmt, so daß sie zuletzt fast Null wird, oder von einem bestimmten Werthe, welchem sie sich ohne Ende nähert, nicht merklich verschieden ist. Insbesondere ist hier die Function $y = a^{-x^2}$ (Fig. 9) zu bemerken, welche der einfachste Typus der Functionen ist, die zu beiden Seiten des Anfangspunktes der unabhängig veränderlichen Größe sehr schnell und symmetrisch abnehmen, so daß der Zahlenwerth dieser Function für wenig beträchtliche Zahlenwerthe der unabhängig veränderlichen Größe schon außerordentlich klein ist, wie wenig die constante Zahl a auch größer sein mag, als die Einheit. Bei dem gegenwärtigen Zustande der Physik nimmt man an, daß die materiellen Theilchen der Körper von Kräften sollicitirt werden, deren Abnahmegesetz durch eine Function dieser Art ausgedrückt wird, und bei den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf große statistische Zahlen kommt man ebenfalls sehr häufig auf Functionen von dieser Form.

§. 21. Wir wollen annehmen, daß wir eine empirische Function fx hätten, womit arithmetische oder algebraische Rechnungen vorgenommen werden sollen, wie wenn man z. B. den Werth von x finden sollte, welcher der Gleichung:

$$fx = \frac{1}{x + a}$$

genügt; ſo beſteht das ſich zunächſt darbietende Verfahren offenbar darin, möglich eine algebraiſche Function φx zu finden, welche ſich wenig von entfernt, wenigſtens innerhalb der Grenzen, zwiſchen welche die geſuchte W fallen muß, und dann φx in die gegebene Gleichung für fx zu ſubſtitu Der Zweck einer ſolchen Subſtitution iſt im Allgemeinen, die algebraiſchen formungen, welche auf allgemeine Formeln führen müſſen, oder arithmet Operationen möglich zu machen, wenn man beſondere Werthe beſtimmen

Wenn die ſubſtituirte Function ſich der urſprünglichen in dem ganzen trachteten Theile ihres Verlaufes nähern ſoll, ſo müſſen die weſentlichen Fo der ſubſtituirten Function mit denen der zu erſetzenden Function verträglich

Wenn z. B. die zu erſetzende Function eine periodiſche iſt, ſo nimmt wenigſtens bis zu einer genauern Unterſuchung, an, daß ſie möglicher W durch eine Function von der Form:

$$y = A \sin.(mx + n),$$

welche ihrer Natur nach periodiſch iſt, erſetzt werden kann; aber es wä offenbar ganz unmöglich ſein, daß ſich die gegebene Function in der gan Ausdehnung ihres Verlaufes einer Function von der Form:

$$y = Ax^m,\ y = Aa^{mx},$$

welche, je nach dem Zeichen von m, beſtändig zu- oder abnehmen wür nähern könnte.

Unter Interpolation verſteht man die Operation, durch welche eine Curve $y = \varphi x$ beſtimmt, welche eine gewiſſe Anzahl von Punkten der Curve $y = fx$ gemein hat, und ſich zwiſchen den äußerſten Punkten d weniger davon entfernt, je größer die Anzahl der zwiſchen liegenden geme ſchaftlichen Punkte iſt. Wir werden ſpäter näher auf die Verfahrungsarten Interpolation eingehen; allein für den Augenblick genügt es, ſich vorzuſtell daß die Curve, deren Ordinate φx iſt, durch einen gegebenen Punkt $(x_0, y$ geht, wenn man die Gleichung verſetzt:

$$y_0 = \varphi x_0,$$

d. h. wenn man die Parameter oder die unbeſtimmten Coefficienten, welche mathematiſche Ausdruck der Function φ enthalten muß, durch eine Bedingun gleichung mit einander verbindet, und je mehr willkührliche Parameter man dieſen Ausdruck eingeführt hat, wofern man auf der gegebenen Curve $y =$ eine gleiche Anzahl von Punkten hat, deſto mehr nähern ſich die Curven, de Ordinaten durch φx und fx ausgedrückt werden, in dem betrachteten Th ihres Laufes einander.

Hiervon rührt, gelegentlich bemerkt, die Schwierigkeit her, den We gewiſſer Formeln der mathematiſchen Phyſik unter der Controle der Beobachtu zu beſtimmen. Denn wenn zur Darſtellung des Geſetzes einer Erſcheinung Gleichung $y = \varphi x$ gegeben wird, worin die Function φ viele willkührli Parameter enthält, und man beſtimmt dieſe Parameter nach der Bedingu den Beobachtungen zu genügen, welche eben ſo viele Syſteme zuſammenge riger Werthe von x und y geben, als man Parameter hat, ſo wird es h durch allein ſchon wahrſcheinlich, daß die Syſteme der zwiſchenliegenden We nahezu derſelben Gleichung genügen werden, obgleich das wahre Geſetz Erſcheinung durch eine von φx verſchiedene Function fx ausgedrückt w Wenn folglich auf den für die Function φ gewählten analytiſchen Ausdruck e phyſikaliſche Theorie gebaut werden ſollte, ſo würde die Wahrheit dieſer The noch nicht durch die Uebereinſtimmung zwiſchen der Beobachtung und Rechn für die zwiſchenliegenden Werthe der Veränderlichen x, y genügend darget

Wenn die Formen der Functionen f und φ mit einander unverträg wären, indem z. B. die eine Function eine periodiſche und die andere beſtändig zu- oder abnehmende wäre, ſo würde dieſes durch die Rechnung ſe

...zeigt, indem man für die Parameter unendliche, oder imaginäre, oder un-
...mmte Werthe erhielte.

§. 22. Man sieht leicht ein, daß es von Nutzen sein kann, auf diese
... nicht blos empirische Functionen, welche sich auf keine andere Art der
...nung würden unterwerfen lassen, sondern auch transcendente oder compli-
...te algebraische Functionen durch andere Functionen von einer einfachern
..., oder solche, deren Form der Natur der vorzunehmenden analytischen
...ationen besser entsprechen, zu ersetzen, wie dieses, um ein ganz elementa-
...s Beispiel anzuführen, geschieht, wenn man für einen gewöhnlichen Bruch,
... einen Decimalbruch 0,6666 setzt, welcher den Werth des gewöhnlichen
...ches nur näherungsweise ausdrückt, aber dessen Ausdruck, obgleich er eigent-
... complicirter ist, als der des gewöhnlichen Bruches, der Natur unserer
...metischen Grundoperationen besser entspricht.

Auch in diesem Falle sieht man leicht ein, wenn die substituirte Function
... Form hat, welche mit der Form der gegebenen Function unverträglich ist,
... man die beiden Functionen einander desto mehr nähern kann, je mehr
...ührliche Parameter man einführt, deren Werthe man schicklich bestimmt;
...andererseits wird dadurch auch die substituirte Function complicirter, so
...ie Vortheile, welche man durch die Substitution erreichen wollte, wieder
...en gehen, je mehr willkührliche Parameter man einführt. Das Mittel,
... sich die Analysten zur Beseitigung dieses Uebelstandes bedienen, besteht
... daß sie für die gegebene Function eine Summe analytischer Functionen
...erselben Form substituiren, welche sich nur durch die Werthe gewisser
...eter unterscheiden. Statt also z. B. für die Function $y = fx$ die
...on:

$$y = A x^m, \text{ oder } y = A \sin. m x,$$

...stituiren, kann man setzen:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{etc.}$$

$$y = A_1 \sin. x + A_2 \sin. 2x + A_3 \sin. 3x + \text{etc.}$$

...ese sogenannten Reihenausdrücke können als der gegebenen Function
...ich betrachtet werden, wenn der Werth, welchen man erhält, wenn man
...inreichende Anzahl von Gliedern dieser Reihen nimmt, beliebig wenig
...m Werthe der Function fx verschieden ist. Hierbei muß man sich die
...nothwendig als ins Unendliche fortlaufend vorstellen; denn wenn man
...nauen Werth von fx, vermittelst einer endlichen Anzahl von Gliedern
..., so hätte man nur den analytischen Ausdruck von fx entwickelt, aber
... einer Reihe in dem eigentlichen Sinne des Wortes. So sind z. B.
...ntischen Gleichungen:

$$(x + h)^3 = h^3 + 3h^2 x + 3hx^2 + x^3,$$

$$(\sin. x)^5 = \tfrac{5}{8} \sin. x - \tfrac{5}{16} \sin. 3x + \tfrac{1}{16} \sin. 5x,$$

...igentlichen Reihenentwickelungen, sondern bloße Umformungen.

23. Die einfachsten Reihen sind die, welche nach den ganzen und
...en Potenzen der veränderlichen Größe fortschreiten. Mercator und
...on sind auf Reihen von dieser Form geführt, nämlich der erste, indem
... gewöhnliche Divisionsregel auf die gebrochene Function:

$$\frac{1}{a + bx}$$

...te und die successiven Glieder des Quotienten nach den absteigenden
...en von x ordnete, und der zweite, indem er die Regel für die Auszie-
...er Wurzeln auf die irrationale Function:

$$\sqrt[n]{a + bx},$$

anwandte und die succeſſive erhaltenen Glieder der Wurzel ebenfalls nach
ſteigenden Potenzen von x ordnete. Bald darauf fanden Newton und Leib
ähnliche Entwickelungen für die damals bekannten transcendenten Functio
und ſeit dieſer Zeit iſt die Umformung der Functionen in Reihen eins
Hauptgeſchäfte der Analyſis geworden.

Dieſe Transformation wird zu zwei verſchiedenen Zwecken vorgenom
welche den beiden Seiten entſprechen, von welchem man das ganze Sy
der mathematiſchen Wiſſenſchaften betrachten kann. Bald will man nä
gewiſſe von den Zahlenwerthen der Größen unabhängige Geſetze und Re
nen beweiſen und gibt zu dem Zwecke den Functionen, die zu dem Be
am meiſten geeigneten Reihenformen, wobei es ziemlich gleichgültig iſt,
viele Glieder der Reihe man nehmen muß, um einen hinreichend genäh
Werth der gegebenen Function zu erhalten, und es iſt hinreichend, wenn
einſieht, daß die Reihe in allen Fällen ſo weit fortgeſetzt werden kann,
die Summe der unberückſichtigt gelaſſenen Glieder kleiner werden kann
jede gegebene Größe.

In andern Fällen dagegen will man vermittelſt der Reihen Zahlenw
wirklich berechnen, und alsdann iſt es nothwendig, daß man eine hinrei
Annäherung erhalten kann, ohne eine zu große Anzahl von Gliedern der Rei
rechnen zu müſſen, was ſehr mühſam und zuweilen ganz unausführbar ſein w

§. 24. Unter convergirenden Reihen verſteht man ſolche, w
der Bedingung genügen, daß die Summe ihrer Glieder um ſo mehr
einen Grenzwerth convergirt, eine je größere Anzahl von Gliedern man n
und dieſe Grenze wird die Summe der Reihen genannt. Soll die Tr
formation einer Function in einer Reihe zuläſſig ſein, ſo muß dieſe Reihe
vergent ſein und die transformirte Function zur genauen Summe haben.
gekehrt, ſoll eine Reihe von einer unendlichen Anzahl von Gliedern, d
Geſetz gegeben iſt, und worin die Veränderliche x vorkommt, als eine ge
Function von x beſtimmend, betrachtet werden können; ſo iſt offenbar erfo
lich, daß dieſe Reihe gegen einen Grenzwerth convergire, oder eine Su
habe, dieſe Summe mag ſich vermittelſt der gebräuchlichen algebraiſchen
transcendenten Zeichen als Function von x ausdrücken laſſen (in welchem
man ſagt, die Reihe ſei unter endlicher Form ausgedrückt), oder der
lenwerth dieſer Summe mag ſich für jeden Zahlenwerth von x nur näher
weiſe vermittelſt der Reihe ſelbſt berechnen laſſen, und in dieſem Falle
die in einer Reihenform ausgedrückte Function eine neue transcendente Func
welche ſich nicht auf die bekannten transcendenten Functionen zurückführen

Eine Reihe braucht nicht gleich in ihren erſten Gliedern convergen
ſein, um als eine beſtimmte Function, welche die Summe derſelben iſt,
drückend betrachtet werden zu müſſen, und folglich für dieſe Function ſubſti
werden zu können; ſondern es genügt, daß ſie zuletzt convergent wird,
weit das Glied, womit die Convergenz anhebt, auch von dem Anfange
Reihe entfernt ſein mag. Aber wenn es ſich um numeriſche Rechnungen
delt, ſo wendet man faſt nur Reihen an, welche ſchon in ihren erſten Glie
ſchnell convergiren, wenigſtens für die Zahlenwerthe, welche man den in
Reihen vorkommenden veränderlichen Größen beilegen will; denn eine Co
genz, welche erſt nach einer beträchtlichen Anzahl von Gliedern oder auch
den erſten Gliedern, aber nur ſehr langſam ſtattfinden würde, wäre für
ſolchen Zweck offenbar illuſoriſch.

Eigentlich müßte man nur die Reihen divergente nennen, für w
die Summen, welche man erhält, wenn man ſucceſſive eine immer gr
Anzahl von Gliedern zuſammen addirt, divergent ſind, ſo daß der Unter
zwiſchen einer Summe und der folgenden, ſtatt immer kleiner zu werden

n Null beliebig zu nähern, einen immer größer werdenden Zahlenwerth
mt. Dieſes iſt bei der Reihe:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \text{etc.}$$

größere Zahlenwerthe von x, als die Einheit der Fall. Allein man pflegt
infachheit wegen jede Reihe, welche nicht convergent iſt und keine Summe
divergent zu nennen. So ſagt man z. B., daß die vorhergehende
e divergent iſt, wenn man der Veränderlichen x den Werth — 1 beilegt,
elchem Falle die auf einander folgenden Summen abwechſelnd die Werthe
d 0 haben.

§. 25. Wenn eine Function f x in eine Reihe entwickelt wird, ſo wollen
den Zahlenwerth der Differenz, welche man erhält, wenn man die Summe
n erſten Glieder der Reihe von f x abzieht, mit $\varphi_n x$ bezeichnen. Wenn
Reihe convergent iſt und f x zur Summe hat, ſo convergirt $\varphi_n x$ für
hmende Werthe des Inder n ohne Ende gegen Null, und dieſe Größe
beliebig klein gemacht werden, wenn man für n eine hinreichend große Zahl
mt. Wenn dagegen die Reihe divergent iſt, ſo nimmt $\varphi_n x$ mit n zu, oder
mt wenigſtens für wachſende Werthe von n nicht ohne Ende ab. Aber es
auch geſchehen, und geſchieht wirklich häufig, daß $\varphi_n x$ anfangs für einen
achſenden Werth von n ſo weit abnimmt, daß der Werth deſſelben unbe-
chtigt bleiben kann und dann für größere Werthe des Inder n wieder
mt und hierauf immer größer und größer wird. In dieſem Falle iſt alſo
eihe anfangs convergent und wird zuletzt wieder divergent, weßhalb ſolche
n von einigen Schriftſtellern auch halbconvergente Reihen genannt
n. Offenbar iſt die Subſtitution einer ſolchen Reihe für die Function,
s ſie abgeleitet iſt, als Annäherungsmittel jedesmal geſtattet, wenn man
en kann, daß der Reſt $\varphi_n x$ für ſchicklich gewählte Werthe von n ver-
ſchwindet werden kann und der hieraus entſpringende Fehler auch in den Re-
n der folgenden Rechnungen nur Fehler verurſacht, welche ihrer Kleinheit
ebenfalls unberückſichtigt bleiben können.

n den verſchiedenen Zweigen der angewandten Mathematik muß man
mit dieſer Strenge verfahren, wodurch die Anwendbarkeit der Reihen
chränkt wird. Selbſt wenn man nur mit Reihen operirt, deren Con-
erwieſen iſt, iſt es nicht immer möglich, die Grenzen des Fehlers an-
, welchen man begeht, wenn man die Reihe bei irgend einem Gliede
Dieſes ſind die Unvollkommenheiten in der Auflöſung der Aufgaben,
ie Geometer wiederholt zu beſeitigen geſucht haben, ſo weit es möglich
iſt.

26. Eine Reihe, deren ſämmtliche Glieder daſſelbe Zeichen haben,
nvergent oder divergent, in welcher Ordnung ihre Glieder auch auf
folgen mögen, und wenn ſie convergent iſt, ſo bleibt die Summe
Grenzwerth, gegen welchen die Summe der Glieder convergirt, auch
erſelbe. Dagegen kann eine Reihe, deren Glieder ſich wegen der Ent-
etztheit ihrer Zeichen zum Theil gegenſeitig aufheben, je nach der Auf-
folge dieſer Glieder convergent oeer divergent ſein, und wenn ſie con-
bleibt, ſo kann ſich die Summe mit der Aufeinanderfolge der Glie-
rn.

nn eine Reihe:

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \text{etc.},$$

il aus poſitiven und zum Theil aus negativen Gliedern beſteht und ſie
rgent, wenn alle Glieder mit demſelben Zeichen genommen werden, ſo
ch in ihrer urſprünglichen Geſtalt convergent. Denn wenn φ'_n die Summe
iven Glieder der Reihe y von dem Gliede y_n an und φ''_n die Summe
iven Glieder bezeichnet, ſo hat man:

$$\varphi_n = y_n + y_{n+1} + \text{etc.} = \varphi'_n - \varphi''_n.$$

Für die Reihe, deren ſämmtliche Glieder mit demſelben Zeichen, z. B. mit dem poſitiven Zeichen genommen ſind, hätte man:

$$\varphi_n = \varphi'_n + \varphi''_n,$$

und da dieſe letzte Reihe convergent iſt, ſo muß die Summe $\varphi'_n + \varphi''_n$ für einen ſchicklichen Werth des Index n kleiner werden können, als jede gegebene Größe, und folglich um ſo mehr die Differenz $\varphi'_n - \varphi''_n$, wodurch die Convergenz der Reihe y dargethan iſt.

Eine Reihe iſt convergent, wenn ihre Glieder von einem beſtimmten Gliede an abwechſelnd poſitiv und negativ ſind und der Zahlenwerth derſelben gegen Ende gegen Null convergirt. Denn es ſei:

$$\varphi_n = y_n - y_{n+1} + y_{n+2} - y_{n-1} + y_{n+4} - \text{etc.}$$

die betrachtete Reihe, ſo kann man dieſelbe folgendermaßen ſchreiben:

$$\varphi_n = y_n - (y_{n+1} - y_{n+2}) - (y_{n+3} - y_{n+4}) - \text{etc.},$$

ſo daß alle zwiſchen den Klammern ſtehenden Binome poſitiv ſind. Es iſt also $\varphi_n < y_n$, und da y_n beliebig klein werden kann, ſo gilt daſſelbe um ſo mehr von φ_n.

Wenn alle Glieder der Reihe y von einem gewiſſen Range an daſſelbe Zeichen haben, ſo iſt dieſe Reihe convergent, oder divergent, je nachdem das Verhältniß $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ für zunehmende Werthe von n gegen eine Grenze convergirt, welche größer oder kleiner, als die Einheit iſt.

Denn es bezeichne α eine zwiſchen der Einheit und der in Rede ſtehenden Grenze liegende Zahl, ſo hat man für $\alpha < 1$ und für einen ſchicklichen Werth des Index n:

$$y_{n+1} < \alpha\, y_n,\ y_{n+2} < \alpha\, y_{n+1},\ y_{n+3} < \alpha\, y_{n+2},\ \ldots.$$

und um ſo mehr:

$$y_{n+2} < \alpha^2\, y_n,\ y_{n+3} < \alpha^3\, y_n,\ \ldots.$$

Es iſt folglich:

$$\varphi_n < y_n\,(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots.)$$

oder:

$$\varphi_n < \frac{y_n}{1-\alpha};$$

und folglich convergirt φ_n mit y_n zugleich ohne Ende gegen Null.

Für $\alpha > 1$ hätte man:

$$\varphi_n > y_n\,(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots.),$$

und da der zweite Theil dieſer Ungleichheit offenbar größer werden kann, als jede gegebene Größe, ſo gilt daſſelbe auch von φ_n.

Ebenſo würde bewieſen, daß die Reihe y, deren ſämmtlichen Glieder von einem gewiſſen Range an daſſelbe Zeichen haben, convergent, oder divergent iſt, je nachdem die Wurzelgröße:

$$\sqrt[n]{y_n}$$

gegen eine größere oder kleinere Grenze als die Einheit convergirt für zunehmende Werthe des Index n, wo y_n den Zahlenwerth des Gliedes vom Range n bezeichnet. *)

§. 27. Die Theorie der Reihen bildet einen nicht weniger wichtigen Zweig der allgemeinen Arithmetik oder Algebra wie die Theorie der Gleichungen, welche man in den ſpeciell darüber handelnden Werken ſtudiren muß. Wir betrachten ſie hier nur in ihren Berührungspunkten mit der Theorie der Functionen und ſchließen mit den folgenden Bemerkungen.

*) Mehr hierüber findet man in Cauchy's algebraiſcher Analyſis Kap. 6.

So wie man im Verlaufe einer algebraiſchen Rechnung oft mit imaginären Größen operirt, um kürzer zu den zwiſchen reellen Größen ſtatt findenden Relationen zu gelangen, nachdem ſich die Zeichen der Imaginarität gegenſeitig aufgehoben haben, ebenſo haben ſich die Analyſten lange Zeit hindurch nicht geſcheut, mit divergirenden Reihen zu operiren, um zuletzt zu convergirenden Reihen oder zu Relationen zwiſchen Größen unter endlicher Form zu gelangen; und man hat ſpäter eingeſehen, daß dieſes Verfahren, welches ſich blos auf Analogie und auf einen unbeſtimmten Begriff der Allgemeinheit der Algebra ſtützt, zu Irrthümern führen kann, ſo daß es jetzt nicht mehr als ſtreng gültig wird.

Es ſei nun $F(x, \alpha)$ eine Function der Veränderlichen x und eines willkürlichen Parameters α, welche vermittelſt einer Reihe ausgedrückt wird, deren allgemeines Glied $\Psi_n(x, \alpha)$ iſt, und welche wir mit $\Sigma \Psi_n(x, \alpha)$ bezeichnen wollen, wo Σ eine Summe von unendlich vielen Gliedern bezeichnet. Wir wollen annehmen, daß dieſe Reihe nur für gewiſſe beſondere Werthe des Parameters α aufhört convergent zu ſein, z. B. für $\alpha = 0$, ſo erhalten wir, wenn wir in der Gleichung:

$$F(x, \alpha) = \Sigma \cdot \Psi_n(x, \alpha),$$

$\alpha = 0$ ſetzen, die ungenaue Gleichung:

$$f(x) = \Sigma \cdot \Psi_n(x),$$

die keinen beſtimmten Sinn hat, weil nach der Vorausſetzung $\Sigma \cdot \Psi_n(x)$ eine divergente Reihe iſt. Es kann jedoch geſchehen, daß man, wenn man im Laufe gewiſſer Rechnungsoperationen für die Function $F(x, \alpha)$ ihre Reihenentwickelung $\Sigma \cdot \Psi_n(x, \alpha)$ ſetzt, zu Reſultaten gelangt, welche von dem Werthe des Parameters α unabhängig ſind, und zu convergenten Reihen, worin α verſchwunden iſt. Es iſt klar, daß alsdann die unmittelbare und myſteriöſe Anwendung der divergirenden Reihe $\Sigma \cdot \Psi_n(x)$ ſtatt der Function $f(x)$ im Laufe derſelben Operationen zu genauen Reſultaten führt.

Drittes Kapitel.

Theorie der abgeleiteten Functionen und der Unterbrechungen in Stetigkeit der verſchiedenen Ordnungen. — Grundbegriffe über die Theorie der Fluxionen.

§. 28. Wenn zwei Functionen:

$$y = fx, \quad Y = Fx$$

gegeben ſind, ſo kann man eine dritte Function u betrachten, welche auf irgend eine Weiſe von den Functionen y und Y ſo abhängt, daß

$$u = \varphi(y, Y) = \varphi(fx, Fx)$$

(§. 10), und wir wollen insbeſondere den Fall unterſuchen, wo:

$$\varphi(y, Y) = \frac{y}{Y},$$

d. i.:

$$u = \frac{fx}{Fx}$$

Um ſogleich die allgemeinſte Vorausſetzung zu machen, kann man annehmen, daß die mathematiſchen oder empiriſchen Functionen f, F die Ordinaten

zweier wirklich gezeichneten Curven ausdrücken, vermittelst welcher man Curve beſchreiben ſoll, deren Ordinate u iſt. Es ſeien M N, P Q, (Fig. 10) die Curven deren reſp. Ordinaten y, Y und u ſind. Die Opera würde keine Schwierigkeiten haben, ſo lange die derſelben Abſciſſe x entſ chenden Ordinaten y, Y endliche, poſitive oder negative und von Null v ſchiedene Werthe haben.

Wenn die Ordinate y Null würde, während Y einen endlichen W behielte, ſo würde die Ordinate u auch verſchwinden. Folglich ſchneiden Curven M N, R S die Axe der Abſciſſen in demſelben Punkte A.

Wenn die Ordinate Y verſchwände, ohne daß y Null würde, ſo w die Function u eine Unterbrechung der Stetigkeit erfahren, indem ſie durch Unendliche ginge. Durch den Punkt B, wo die Curve P Q die Axe der ſciſſen ſchneidet, wollen wir zu den Ordinaten eine gerade Linie G K par ziehen, ſo iſt dieſelbe eine gemeinſchaftliche Aſymptote der beiden Zw R S, R' S' der Curve, deren Ordinate u iſt.

Wir wollen nun annehmen, daß die beiden Functionen f x, F x zu cher Zeit verſchwinden, oder daß die beiden Curven M N, P Q (Fig. 11) Axe der Abſciſſen in demſelben Punkte A ſchneiden; ſo erſcheint der Aus von u unter der Form $\frac{0}{0}$, welche in der Algebra das Symbol der Un ſtimmtheit iſt, und man kann die der Abſciſſe O A entſprechende Ordi A K der Curve R S nicht direct berechnen, obgleich die Curve R S die durch Punkt A zu den Ordinaten parallel gezogene gerade Linie A K L nothwe ſchneidet, wofern ſie dieſe gerade Linie nicht zur Aſymptote hat, welchen ſonderen Fall wir hier zunächſt bei Seite ſetzen können. Die Ordinate hat folglich einen beſtimmten Werth, und wenn man auf der Abſciſſenaxe dem Punkte A immer näher kommenden Punkte a', a'' nimmt, ſo kann auf der Curve R S Punkte K', K'' beſtimmen, welche ſich dem Punkt immer mehr nähern und deren Ordinaten a' K', a'' K'' immer weniger von verſchieden ſind. Man ſieht alſo nicht blos, daß es einen beſtimmten W von A K gibt, ſondern, daß man denſelben auch mit einer beliebigen Ann rung beſtimmen kann.

In der Praxis würde dieſe Annäherung wegen der Unvollkommenheit graphiſchen Verfahrungsarten beſchränkt ſein, wenn die Functionen f, F durch die Zeichnung der Curven M N, P Q gegeben wären, und um ſo m wenn ſie nur durch Tafeln gegeben wären, worin nur eine begrenzte An von Werthen der unabhängigen Veränderlichen und ihrer Functionen vorkom Allein bei mathematiſchen Functionen ſieht man die Möglichkeit leicht ein, Grenze, gegen welche das Verhältniß $\frac{f x}{F x}$ convergirt, wenn die be Glieder deſſelben ohne Ende gegen Null convergiren, a priori zu beſtim Wir werden in der Folge allgemeine Methoden zur Beſtimmung dieſer Gr mittheilen, aber für den Augenblick genügt es, ihre Exiſtenz nicht blos mathematiſche, ſondern für beliebige ſtetige Functionen nachgewieſen zu ha

Dieſe Grenze könnte ſowohl Null, als jeden anderen poſitiven, oder gativen Zahlenwerth haben, oder mit andern Worten: es iſt nicht unmö daß die Curve R S die Axe der Abſciſſen genau im Punkte A ſchneidet, we der gemeinſchaftliche Durchſchnittspunkt dieſer Axe mit den beiden Curven P Q iſt. Auch haben wir ſchon bemerkt, daß in einem beſonderen Falle gerade Linie A K L eine Aſymptote der Curve R S ſein könnte, in we Falle die fragliche Grenze das poſitive oder negative Unendliche zum hat, wodurch keine Beſchränkung des Geſagten entſtehen kann; denn

der Mathematik Null und das Unendliche als zwei beſondere betrachten, welche, eben ſowohl wie jeder andere Werth, den veränderßen und folglich auch den Grenzen, gegen welche dieſe Größen conzeigelegt werden können.

. Betrachten wir nun insbeſondere den Fall, wo:

$$Y = Fx = x, \quad u = \frac{fx}{x}$$

, und nehmen an, daß die Curve $y = fx$ durch den Anfangspunkt naten geht, ſo daß man zu gleicher Zeit $x = 0$, $fx = 0$ hat. N (Fig. 12) dieſe Curve, und wir wollen in dem Punkte O die) T an dieſelbe ziehen; ſo iſt die trigonometriſche Tangente des ɔelchen die gerade Linie O T mit der Halbare O X bildet, genau , deren Exiſtenz wir vorhin nachgewieſen haben und gegen welche niß $\frac{fx}{x}$ convergirt, wenn x und fx immer kleiner werdende Zahnnehmen. Denn die Tangente einer beliebigen Curve iſt die gerade welcher ſich die Curve in der unmittelbaren Nähe des Berührungsiger entfernt, als von jeder andern durch denſelben Punkt gezoge: Linie; d. h. die Tangente iſt diejenige gerade Linie, welcher ſich den Berührungspunkt gezogene Secante bei ihrer Drehung um dieſen Ende nähert, wobei ſich der zweite Durchſchnittspunkt der Secante rve dem erſten ohne Ende nähert, weil man, wie nahe der Punkt kt O auch ſein mag, doch immer einen zwiſchen m und O liegenden ıgeben kann, deſſen Entfernung von der durch den Punkt O gehene O m größer iſt, als ſeine Entfernung von den Secanten, welche ounkt O und durch zwiſchen m und μ liegende Punkte gehen. Die n Definition ausgeſprochene Eigenſchaft kommt alſo keiner der Sedern ausſchließlich der geraden Linie zu, welcher ſich dieſe Secanten nähern, wenn ſich die Punkte m und O einander ohne Ende nähern. ſt aber in einem Syſteme rechtwinkliger Coordinaten:

$$\frac{y}{x} = \frac{fx}{x} = \frac{mp}{Op}$$

netriſche Tangente des Winkels, welchen die durch den Punkt, deſſen $p = x$ iſt, gezogene Secante O m mit der Abſciſſenaxe bildet. iſt die trigonometriſche Tangente des Winkels T O X, ie geometriſche Tangente O T mit der Abſciſſenaxe bilGrenze des Verhältniſſes $\frac{fx}{x}$.

en wir nun an, daß die Curve M N (Fig. 13), deren Gleichung $= fx$ iſt, in der Ebene der Coordinaten eine beliebige Lage hat, en m, m_1 zwei Punkte dieſer Curve, deren reſp. Abſciſſen $Op = x$, x_1 ſind; ſo iſt nach dem Vorhergehenden die Grenze, gegen welche ältniß:

$$\frac{fx_1 - fx}{x_1 - x}$$

t, wenn die beiden Glieder deſſelben gleichzeitig gegen Null convergi- Werth der trigonometriſchen Tangente des Winkels m T X, welchen ente m T im Punkte m der Curve mit der Abſciſſenaxe auf der Seite ven x bildet. Dieſe Grenze ändert ſich im Allgemeinen von unkte der Curve M N zum andern, d. h. ſie iſt eine Function von x, m fx ſo abhängt, daß letztere die erſte ebenſo beſtimmt, wie der Zug

einer Curve die Richtung der Tangente in jedem Punkte derſelben beſtim
Da dieſe Art der Abhängigkeit oder Ableitung ohne Vergleich wichtiger iſt
jede andere, ſo nennt Lagrange die fragliche Function die Ableitung
f x und bezeichnet ſie durch:

$$y' \text{ oder } f' x,$$

wodurch die Abhängigkeit der Function y' von y oder f' x von f x angeb
werden ſoll.

Wir wollen uns die Curve M' N' (Fig. 14), deren Gleichung y' =
iſt, gezeichnet denken; ſo iſt die trigonometriſche Tangente des Winkels, w
chen die geometriſche Tangente in einem Punkte dieſer Curve mit der Axe
x bildet, eine andere Function von x, welche ebenſo aus f' x abgeleitet w
wie f' x von f x abgeleitet iſt. Man nennt daher dieſe Function die Abl
tung der zweiten Ordnung oder die zweite Ableitung von f x
bezeichnet ſie nach der Analogie durch:

$$y'', \quad f'' x.$$

Ebenſo werden die Ableitungen der dritten, vierten, ... n^{ten} Ordnu
gebildet, deren Relationen zu der urſprünglichen Function y = f x und
allen frühern Ableitungen ſehr einfach durch die Bezeichnungen:

$$y''', y^{IV}, \ldots\ldots\ldots y^{(n)};$$

oder

$$f''' x, f^{IV} x, \ldots\ldots\ldots f^{(n)} x.$$

ausgedrückt werden.

§. 30. Wenn die Ableitung f' x poſitiv iſt, oder wenn die Tangente d
Curve y = f x mit der Axe der Abſciſſen x auf der Seite der poſitiven
einen ſpitzen Winkel bildet, ſo nimmt die urſprüngliche Function y offenbar
x zu, wogegen die Function y für wachſende Werthe von x abnimmt, we
dieſe Werthe von x die Ableitung f' x negativ machen. Wir können dieſ
auch einfacher dadurch ausdrücken, daß wir ſagen: die Veränderungen d
Function y haben daſſelbe oder das entgegengeſetzte Zeichen der Veränderun
der unabhängig veränderlichen Größe x, je nachdem die Ableitung f' x poſi
oder negativ iſt, und alsdann betrachten wir die Zunahme als eine poſiti
und die Abnahme als eine negative Veränderung. Statt der Ausdrücke, Zu
nahme und Abnahme, oder überhaupt Veränderung, bedienen ſich d
Analyſten auch wohl der Ausdrücke Increment und Decrement, oder au
wohl des Ausdruckes Differenz, wo letztere poſitiv oder negativ ſein kann

Wenn die Ableitung f' x verſchwindet, indem ſie vom Poſitiven zum N
gativen übergeht, ſo geht die urſprüngliche Function f x durch ein Maximu
(§. 6), wogegen dieſe urſprüngliche Function durch ein Minimum ge
wenn die Ableitung Null wird, indem ſie vom Negativen zum Poſitiven übe
geht. Hieraus ſieht man ſchon, wie die Beſtimmung der Werthe der una
hängig veränderlichen Größe, für welche eine Function durch ein Maximu
oder Minimum geht, auf die Beſtimmung der Werthe hinausläuft, welche ih
Ableitung verſchwinden machen, von welcher wichtigen Unterſuchung ſpäter au
ſtändlich die Rede ſein wird. Wenn die abgeleitete Function, oder die Able
tung ſchlechthin, das Zeichen verändern könnte, indem ſie nicht mehr dur
Null, ſondern durch das Unendliche ginge, ſo erhielte man die merkwürdig
Maxima und Minima, wovon in dem angeführten Paragraph ebenfalls d
Rede geweſen iſt.

Das Zeichen der Ableitung f' x lehrt uns nicht blos, ob die urſprüngli
Function f x mit wachſenden Werthen von x zu- oder abnimmt, ſondern d
abſolute Werth dieſer Ableitung f' x iſt auch das Maß der Schnelligkei
der Zu- oder Abnahme der urſprünglichen Function f x. Obglei
der Ausdruck Schnelligkeit in ſeiner eigentlichen Bedeutung nur auf Bew
gungserſcheinungen anwendbar iſt, ſo wird doch jeder leicht die dieſem Ausdru

igelegte ausgedehntere Bedeutung begreifen. Denn wenn man z. B. die Temperatur der Atmoſphäre ändere ſich an der Erdoberfläche ſchnel- s in hohen Regionen, ſo würde jeder den Sinn dieſes Ausdruckes deut- ſehen, obgleich in dem auszudrückenden Begriffe oder Sinne, weder die er Bewegung, noch die der Zeit vorkommt. Uebrigens läßt ſich der , welchen man ſich von der Schnelligkeit einer Veränderung der macht, auch mathematiſch beſtimmen oder definiren. Wenn zunächſt itung $f'x$ eine conſtante Größe wäre, was offenbar vorausſetzt, daß lineare Function von der Form $ax + b$ iſt; ſo würde ſich fx gleich- mit x ändern, ſo daß gleichen Veränderungen von x auch gleiche Ver- zen von fx entſprächen, welche daſſelbe oder das entgegengeſetzte Zei- Veränderungen von x hätten, je nachdem a poſitiv oder negativ wäre. m Falle iſt die Ableitung $f'x$ nichts anders, als die Conſtante a, oder trigonometriſche Tangente des Winkels, welchen die gerade Linie $x + b$ mit der Axe der poſitiven x bildet, und da die gleichen Ver- en von fx der Zahl a proportional ſind; ſo iſt dieſe Zahl offenbar ß der Schnelligkeit, mit welcher ſich die Function fx in Vergleich gleichförmigen Veränderung der unabhängig veränderlichen Größe x Wenn $y = fx$ keine lineare Function iſt, oder nicht die Ordinate aden Linie mehr ausdrückt, ſo entſprechen gleichen Veränderungen von gleichen Veränderungen von y mehr. Geſetzt nun, man nähme auf e M N (Fig. 15), deren Gleichung $y = fx$ iſt, einander ſehr nahe Punkte $m, m_1, m_2, m_3, \ldots$ und ſubſtituirte einſtweilen für die N das Polygon $m\,m_1\,m_2\,m_3\ldots$, ſo ändert ſich die Ordinate auf hiedenen Seiten dieſes Polygones mit verſchiedenen Schnelligkeiten, dem Vorhergehenden muß man in einem Punkte m für die Schnel- r Veränderung die trigonometriſche Tangente des Winkels $m_1\,m\,x$ welchen die Secante $m_1\,m$, auf der Seite der poſitiven Abſciſſen mit ſenare oder mit einer Parallele zu derſelben bildet. Nun iſt aber die N die Grenze, welcher ſich die Polygonallinie ohne Ende nähert, die Punkte $\ldots m, m_1, m_2, m_3, \ldots$ einander ohne Ende nä- olglich iſt die Ableitung $f'x = \text{tang. T}\,m\,x$, als die Grenze, wel- tang. $m_1\,m\,x$ ohne Ende nähert, das Maß der Schnelligkeit der ung der der Abſciſſe x entſprechenden Ordinate fx; aber immer in zu der Schnelligkeit, mit welcher ſich die unabhängige Veränderliche x tig ändert.

wollen der Einfachheit wegen den willkührlichen Anfangspunkt der ſo wählen, daß y in dem ganzen betrachteten Theile der Curve poſitiv bleibt. Dieſe Curve M N kehrt der Abſciſſenaxe ihre Con- Fig. 16), oder ihrer Concavität (Fig. 17) zu, je nachdem die abge- unction $f'x$ zu- oder abnimmt, oder je nachdem $f''x$ poſitiv oder t, und es findet eine Umkehrung in dem Sinne der Krümmung oder lexion der Curve ſtatt (Fig. 18), wenn $f''x$ das Zeichen verändert, m Falle die erſte Ableitung $f'x$ im Allgemeinen durch ein Maximum nimum geht. Der Winkel, welchen die Tangente m T (Fig. 18) Seite der poſitiven x mit der Abſciſſenaxe bildet, nimmt alſo, nachdem l bis zu dem Punkte m, worin die Curve M N eine Inflexion erfährt, nen hat, von m bis N ab.

31. Wenn die abgeleitete Function $f'x$ gegeben wird, ſo iſt dadurch : urſprüngliche Function fx nicht ebenſo vollſtändig beſtimmt, wie die leitung und folglich die Ableitungen aller Ordnungen, wenn die ur- e Function fx gegeben iſt. In der That, wenn man ſich vorſtellt, Curve M N (Fig. 19), deren Gleichung $y = fx$ iſt, ſucceſſive in

die Lagen $M_1 N_1$ $M_2 N_2$ etc. gebracht wird, ſo daß alle Ordinaten der Curve M N um eine conſtante Länge vergrößert werden; ſo ſind die Tangenten $m_1 T_1$, $m_2 T_2$, etc. alle zu einander parallel, und folglich iſt die Ableitung $y' = f'x$ allen Curven gemeinſchaftlich, deren Gleichung $y = fx + C$ iſt, wo C irgend eine Conſtante bezeichnet, welche man deßhalb eine willkührliche Conſtante nennt. Es ſei alſo y eine unbekannte Function von x, welche eine bekannte Function $y' = f'x$ zur erſten Ableitung haben muß, und fx ſei eine Function, welche $f'x$ zur Ableitung hat, ſo muß man

$$y = fx + C$$

ſetzen, und die willkührliche Conſtante C durch eine andere Bedingung, z. B. durch die Bedingung, daß die Curve M N durch einen gegebenen Punkt (x_0, y_0) geht, oder daß die Function y für einen mit x_0 bezeichneten Werth von x einen beſtimmten Werth y_0 hat, beſtimmen. Nach dieſer Bedingung hat man:

$$y_0 = fx_0 + C$$

und folglich die Gleichung:

$$y - y_0 = fx - fx_0,$$

woraus die willkührliche Conſtante C eliminirt iſt, und worin nur bekannte Größen vorkommen.

§. 32. Die Ableitungen einer periodiſchen Function ſind ſämmtlich wieder periodiſche Functionen. Die Ableitungen von ungerader Ordnung einer geraden Function ſind ſämmtlich ungerade Functionen, während die Ableitungen von gerader Ordnung alle gerade Functionen ſind, und für die ungeraden urſprünglichen Functionen findet das Umgekehrte ſtatt. Die Wahrheit dieſer verſchiedenen Sätze erhellet unmittelbar aus der bloßen Betrachtung der den Functionen entſprechenden Curven und dieſe Sätze ſind auf beliebige mathematiſche oder empiriſche Functionen anwendbar.

§. 33. So wie wir den Uebergang von der urſprünglichen Function zu ihrer Ableitung geometriſch definirt haben, ebenſo können wir die geometriſche Bedeutung der Operation angeben, vermöge welcher man von der abgeleiteten Function zu der entſprechenden urſprünglichen Function übergeht. Denn es ſei $M' N'$ (Fig. 20) die Curve, deren Gleichung:

$$y' = f'x$$

iſt, und wir wollen die trapezoidiſche Fläche zu beſtimmen ſuchen, welche zwiſchen der Abſciſſenaxe, der Curve $M' N'$ und zwei Ordinaten $m_0 p_0$, $m p$ liegt, wovon die eine der beſtimmten Abſciſſe $O p_0 = x_0$ und die andere der veränderlichen Abſciſſe $O p = x$ entſpricht. Dieſe Fläche iſt eine Function der Veränderlichen x, welche wir vorläufig mit φx bezeichnen wollen. Wenn x wächſt und den Werth $O p_1 = x_1$ annimmt, ſo nimmt die Fläche um die krummlinige Trapez $m p p_1 m_1$ zu, und man hat:

$$\frac{\varphi x_1 - \varphi x}{x_1 - x} = \frac{\text{Fläche } m p p_1 m_1}{p p_1},$$

ſo daß die Ableitung der Function φ die Grenze iſt, gegen welche das Verhältniß des krummlinigen Trapezes $m p p_1 m_1$ zu ſeiner Seite $p p_1$ convergirt, wenn $p p_1$ ohne Ende gegen Null convergirt. Aber die Fläche dieſes Trapezes liegt zwiſchen der Fläche des Rechteckes $m p p_1 n_1$ und der des Rechteckes $p n m_1 p_1$, und das Verhältniß der Flächen dieſer beiden Rechtecke, nämlich

$$\frac{m p}{m_1 p_1}$$

convergirt ohne Ende gegen die Einheit, wenn $p p_1$ ohne Ende gegen Null convergirt. Folglich convergirt auch das Verhältniß der Fläche eines dieſer

...ke zu der des zwischen liegenden Trapezes ohne Ende gegen die Einheit ... kann setzen:

$$\text{Grenze} \cdot \frac{\text{Fläche } m\,p\,p_{,}\,m_{,}}{p\,p_{,}} = \frac{m\,p \times p\,p_{,}}{p\,p_{,}} = m\,p = f'\,x.$$

Die vorläufig mit $\varphi\,x$ bezeichnete Function hat also $f'\,x$ zur Ableitung ... folglich eine der ursprünglichen Functionen von $f'\,x$, welche in der ... $f\,x + C$ enthalten sind, wo C eine willkührliche Constante bezeichnet, ... da sie für $x = x_0$ verschwinden muß, weil die Flächen von der festen ...nate $m_0\,p_0$ ausgemessen werden; so folgt, daß diese Function vollständig ...mt und gleich $f\,x - f\,x_0$ ist. Aus diesem Grunde bezeichnet man jede ...tion, durch welche eine Function bestimmt wird, die eine gegebene Func... zur Ableitung hat und für einen besondern Werth der veränderlichen Größe, ... sie abhängt, einen bestimmten Zahlenwerth annimmt, mit dem Namen Quadratur.

Wenn man das Intervall $p_0\,p$ (Fig. 21) in n gleiche Theile theilt und ... gleichweit von einander abstehenden Ordinaten $m_{,}\,p_{,}$, $m_{,,}\,p_{,,}$, etc. zieht, ... hat man, wenn ω, $\omega_{,}$, ... die Flächen der Rechtecke $p_0\,p_{,}\,m_{,}\,r_0$, ... $m''\,r_{,}$, ... und ε das constante Intervall $p_0\,p_{,} = \frac{p_0\,p}{n}$ bezeichnet:

$$m_{,}\,p_{,} = \frac{\omega}{\varepsilon},\quad m_{,,}\,p_{,,} = \frac{\omega_{,}}{\varepsilon},\quad \text{etc.}$$

$$\frac{m_{,}\,p_{,} + m_{,,}\,p_{,,} + \text{etc.}}{n} = \frac{\omega + \omega_{,} + \text{etc.}}{n\,\varepsilon};$$

...h. das arithmetische Mittel aus den Ordinaten $m_{,}\,p'$, $m_{,,}\,p_{,,}$, etc. ist gleich ... Summe der Flächen ω, $\omega_{,}$, etc. dividirt durch die Linie $p_0\,p = x - x_0$. ... wenn die Zahl n immer größer und größer wird, so nimmt das Intervall ... umgekehrten Verhältnisse ab, damit das Product $n\,\varepsilon$ constant bleibt, und ... Summe der Flächen ω, $\omega_{,}$, etc. convergirt ohne Ende gegen eine Grenze, ...che die trapezoidische Fläche $m_0\,p_0\,p\,m$ ist. Folglich drückt das Verhältniß ...ser Fläche zu dem Intervalle $p_0\,p_{,}$ oder vielmehr das Verhältniß:

$$\frac{f\,x - f\,x_0}{x - x_0}$$

...s Mittel aus allen den unendlich vielen Werthen aus, welche die abgeleitete ...ction für die zwischen x_0 und x liegenden ebenfalls unendlich vielen Werthe ... unabhängigen Veränderlichen annimmt.

Der Allgemeinheit dieser Regel und aller sich an die Theorie der Qua...turen anschließenden Regeln wegen muß man die Flächen $q\,s\,s'\,q'$, welche ... negativen Ordinaten begrenzt werden, als negativ betrachten.

§. 34. Aus dem Vorhergehenden erhellet leicht, daß wenn eine Function durch die Bedingung gegeben wäre, eine bekannte Function:

$$y^{(n)} = f^{(n)}\,x, \qquad (a_n)$$

... Ableitung der n^{ten} Ordnung zu haben, zur vollständigen Bestimmung dieser ...ction y unmittelbar oder mittelbar die Werthe:

$$y_0,\ y'_0,\ y''_0,\ \ldots\ldots\ y_0^{(n-1)}$$

...lche die Functionen:

$$y,\ y',\ y'',\ \ldots\ldots\ y^{(n-1)}$$

... einen bestimmten Werth x_0 von x außerdem noch gegeben sein müßten. ...nn es sei $M^{(n)}\,N^{(n)}$ (Fig. 22) die durch die Gleichung (a_n) gegebene ...rve, so bestimmt der Zug dieser Curve die trapezoidische Fläche $m_0\,p_0\,p\,m$

als Function der veränderlichen Abſciſſe O p = x, und folglich die C
deren Gleichung folgende iſt:

$$y^{(n-1)} = f^{(n-1)} x, \qquad (a_{n-1})$$

wofern $f^{(n-1)} x_0$ oder der Werth von $y^{(n-1)}$ für $x = x_0$ gegeben iſt. W
die Curve (a_{n-1}) gezeichnet wird, ſo beſtimmt ſie aus demſelben Grunde
Curve, deren Gleichung

$$y^{(n-2)} = f^{(n-2)} x$$

iſt, wofern die Ordinate $f^{(n-2)} x_0$ gegeben iſt u. ſ. f.

§. 35. In dem Vorhergehenden iſt ſtillſchweigend vorausgeſetzt, daß
Ordinate $f' x$ zwiſchen den Grenzen der Quadratur nicht unendlich wird; e
es könnte doch geſchehen, daß die vorhergehenden Schlüſſe und Conſtructi
auch ſelbſt dann noch anwendbar wären, wenn die abgeleitete Function
zwiſchen den Grenzen der Quadratur einen unendlichen Werth annähme. D
es ſei:

$$y = f x$$

die Gleichung einer Curve M R N (Fig. 23), welche in R einen Rückkehr
hat (§. 6), ſo iſt die Ordinate P R eine gemeinſchaftliche Tangente der be
Curvenzweige M R, R N und die Curve M' N', deren Ordinate $f' x$ iſt,
die durch den Punkt P', deſſen Abſciſſe O P' = O P iſt, zu O Y' gezo
Parallele P' R' zur Aſymptote. In dieſem Falle folgt aus der Definition
Curve M' N', daß die zwiſchen einer feſten Ordinate $m'_0 p'_0$, der Aſym
P' R', der Axe der x und der Curve M' N' liegende Fläche einen endli
Zahlenwerth hat, welcher der Differenz der Ordinaten P R, $p_0 m_0$ gleich
oder mit andern Worten, es convergirt in einem ſolchen Falle die trapezoidi
Fläche $m'_0 p'_0 p' m'$ gegen den endlichen Werth P R — $m'_0 p'_0$, w
ſich der Punkt p' dem Punkte P' immer mehr und mehr nähert, und al
hindert nichts, die Ordinate der Curve M R N dieſſeits und jenſeits der
dinate P R, als durch eine Quadratur beſtimmt anzuſehen. Dieſelbe Be
kung iſt auch auf die Curve M R N (Fig. 24) anwendbar, welche im P
R von der Ordinate P R berührt wird und in dieſem Punkte eine Inf
erfährt.

Wenn dagegen die einerſeits von der Ordinate $m'_0 p'_0$ (Fig. 23)
andererſeits von der Aſymptote P' R' begrenzte Fläche unendlich wäre, o
wenn die trapezoidiſche Fläche $m'_0 p'_0 p' m'$ gegen das Unendliche convergi
wenn ſich der Punkt p' dem Punkte P ohne Ende nähert; ſo wäre die O
nate P R auch eine Aſymptote der Curve M, welche eine Unterbrechung
Stetigkeit erfahren würde, und man könnte nicht mehr durch die Fortſet
derſelben Quadratur von dem Zweige M zu dem Zweige N übergehen.

Aus dieſen Bemerkungen folgt, daß, wenn eine Function eine Unterb
chung der Stetigkeit erfährt, indem ſie durch das Unendliche geht, ſo erfa
ihre Ableitungen von allen Ordnungen dieſelbe Unterbrechung der Stetigk
allein das Umgekehrte findet nicht ſtatt, weil eine abgeleitete Function unend
werden kann, ohne daß die ihr entſprechende urſprüngliche Function für denj
ben Werth der unabhängigen Veränderlichen unendlich wird.

§. 36. Wenn irgend eine Function $y = f x$ durch die Ordinate
Curve M R N (Fig. 25) dargeſtellt wird, ſo kann dieſe Curve ſtetig ſe
d. h. die Ordinate derſelben endlich bleiben, ohne plötzlich von einem endlich
Werthe zu einem andern überzugehen, und im Punkte R ein ſogenanntes K
(einen Knick) haben, d. h. die Neigung der Tangente ändert ſich in die
Punkte plötzlich, ſo daß die Tangente mit einem Male aus der Richtung T' R
in die Richtung S R S' übergeht, und dann ihre Richtung von R bis N wie
ſtetig ändert, wie zuvor von M bis R. Wir werden in einem ſolchen Fa
ſagen, daß die Curve M R N in R einen vorſpringenden Punkt

Curve, deren Ordinate $y' = f'x$ ist, bietet alsdann eine Zerreißung
und diese abgeleitete Function selbst erfährt eine Unterbrechung der Stetig-
keit, welche davon herrührt, daß sie für den Werth von x, welcher die Abscisse
vorspringenden Punktes der Curve $y = fx$ ist, plötzlich von einem end-
lichen Werthe zu einem anderen endlichen Werthe übergeht. Die Ableitungen
höhern Ordnungen erfahren im Allgemeinen für denselben Werth von x
eine Unterbrechung der Stetigkeit, welche in dem plötzlichen Uebergange von
einem endlichen Werthe zu einem andern besteht.

In diesem Falle, so wie in dem Falle, wo $f'x$ unendlich wird, indem fx
endlich bleibt, wollen wir sagen, daß die Ableitung $f'x$ und alle folgenden
Ableitungen eine Unterbrechung der Stetigkeit von der ersten Ordnung er-
fahren und daß die ursprüngliche Function fx eine Unterbrechung der Stetigkeit
von der zweiten Ordnung erfährt.

Die Function $f'x$ könnte selbst nur eine Unterbrechung der Stetigkeit
zweiter Ordnung erfahren, indem die der zweiten Ableitung $f''x$ und der fol-
genden Ableitungen von der ersten Ordnung ist, und alsdann werden wir sagen,
daß die ursprüngliche Function fx eine Stetigkeitsunterbrechung der dritten
Ordnung erfahrt. Allgemein, man sagt, daß eine Function eine Stetigkeits-
unterbrechung der n^{ten} Ordnung erfährt, wenn ihre Ableitung von der $(n-1)^{ten}$
Ordnung, und folglich die Ableitungen der höhern Ordnungen eine Stetigkeits-
unterbrechung von der ersten Ordnung erfahren, welche davon herrührt, daß
diese Functionen durch das Unendliche, oder plötzlich von einem endlichen Werthe
zu einem anderen endlichen Werthe übergehen.

§. 37. Die Unterscheidung der Stetigkeitsunterbrechungen der verschiede-
nen Ordnungen, wie wir sie eben angegeben haben, ist in der Theorie der
Functionen von der höchsten Wichtigkeit, man mag sie auf die Algebra, auf die
Geometrie, oder auf Aufgaben der mathematischen Physik anwenden. Bis auf
die gegenwärtige Zeit verstanden die Analysten unter discontinuirlichen
Functionen solche, welche in den verschiedenen Theilen ihres Verlaufes durch
verschiedene algebraische Formeln ausgedrückt werden. In der That wird später
bewiesen werden, daß jede Function y, welche der algebraischen Function fx
für kleinere Werthe von x, als x_0 und der ebenfalls algebraischen Function
f_1x für größere Werthe von x, als x_0 gleich ist, für die Abscisse $x = x_0$
eine Stetigkeitsunterbrechung von einer bestimmten Ordnung erfährt, oder daß
diese Functionen, wofern sie nicht identisch sind, der ins Unendliche fortlaufen-
den Reihe von Gleichungen:

$$fx_0 = f_1x_0,\quad f'x_0 = f'_1x_0,\quad f''x_0 = f''_1x_0,\quad \text{etc.}$$

nicht genügen können, so daß, wenn:

$$f^{(n)}x_0 = f_1^{(n)}x_0$$

die letzte der Gleichungen dieser Reihe ist, welcher man genügen kann, die
Function y für die Abscisse x_0 eine Stetigkeitsunterbrechung von der Ordnung
$n+2$ erfährt.

Dieser Satz würde nicht mehr stattfinden, wenn die Functionen fx, f_1x
eine entwickelten oder unentwickelten algebraischen Functionen wären, und wir
werden in der That an Beispielen sehen, daß eine Function in verschiedenen
Theilen ihres Laufes transcendente Ausdrücke von wesentlich verschiedenen For-
men bekommen kann, ohne daß bei dem Uebergange von der einen Form zu der
anderen eine Unterbrechung der Stetigkeit von irgend einer Ordnung stattfindet.
Auch werden wir sehen, daß derselbe transcendente Ausdruck für Werthe von
$x < x_0$ einer gewissen algebraischen Function fx und für Werthe von $x > x_0$
einer anderen, von der ersten verschiedenen algebraischen Function f_1x gleich
werden kann. So kann z. B. eine convergente Reihe, welche ein transcen-
denter Ausdruck ist, successive verschiedene algebraische Functionen fx und f_1x

zur Summe haben. Aber in allen Fällen ſind die weſentlichen Merkmale d Unterbrechung der Stetigkeit die, welche wir im vorhergehenden §. angegeb haben, gleichviel, ob ſich die Function mathematiſch unter algebraiſcher od transcendenter Form in ihrer Totalität, oder nur in einem Theile ihres Lauf ausdrücken läßt, oder nicht.

§. 38. In §. 4 haben wir bereits bemerkt, daß die Functionen, welc meßbare phyſiſche Größen ausdrücken, nicht unendlich werden können; aber d darunter welche vorkommen, die Unterbrechungen der Stetigkeit darbieten, inde ſie von einem endlichen Werthe plötzlich zu einem andern endlichen Wert übergehen, wenigſtens auf dem Standpunkte, wo wir uns befinden, indem w die Naturerſcheinungen beobachten und dem Calcul unterwerfen. Dieſes al ſchließt ſich an die Begriffe über die Grenzen und über die abgeleiteten Fun tionen, welche den Gegenſtand des gegenwärtigen Kapitels bilden, unmittelb an. Zur Fixirung der Begriffe wollen wir annehmen, daß y die Dichtigk eines Cylinders A B C D (Fig. 26) bezeichnet, welche in der ganzen Ausde nung eines auf der Axe O X ſenkrechten Durchſchnittes dieſelbe iſt, und ſ von einem Durchſchnitte zum anderen ändert. Wenn die Entfernung O p d Baſis des Cylinders von dem Querſchnitte $m\ n$, für welchen die Dichtigk den Werth y hat, mit x bezeichnet wird, ſo wird y eine Function von Aber da der Begriff der Dichtigkeit an und für ſich nicht auf eine mathematiſ Fläche angewandt werden kann, ſo muß man, um die Größe y ſtreng zu de niren, ſich zu $m\ n$ eine parallele Ebene $m_1\ n_1$ denken, welche ſich dem feſt Durchſchnitte $m\ n$ ohne Ende nähern kann. Wenn man die Maſſe der Schi $m\ m_1\ n_1\ n$ durch ihr Volumen dividirt, ſo erhält man einen Quotienten, w cher ſich mit der Entfernung $p\ p_1 = x_1 - x$ ändert. Dieſer Quotient co vergirt gegen eine gewiſſe Grenze, wenn $x_1 - x$ ohne Ende gegen N convergirt, und die Grenze des Quotienten iſt genau die Function von welche wir als Maß der Dichtigkeit des Cylinders in der Ausdehnung d Querſchnittes $m\ n$ nehmen wollen. Das eben über das Maß der Dichtigk Geſagte, würde ſich auch auf die Meſſung der Temperatur und überhaupt al Größen anwenden laſſen, welche nur bei dieſer Auseinanderſetzung als Fun tionen der Coordinaten eines mathematiſchen Punktes, und einer mathematiſch Linie oder Fläche gedacht werden können.

Die Grenze, welche die Function y mißt, ändert ſich im Allgemein nicht, die Ebene $m_1\ n_1$ mag vor oder hinter der Ebene $m\ n$ angenomm werden; aber für gewiſſe beſondere Werthe von x kann die Grenze für die beiden Fälle verſchieden ſein, und alsdann erfährt die Function y eine Steti keitsunterbrechung erſter Ordnung, welche in dem plötzlichen Uebergange v einem endlichen Werthe zu einem andern beſteht.

Wenn man die Function y beſtimmt, indem man zwei parallele Eben $m_1\ n_1$, $m'\ n'$, die eine vor und die andere hinter der Ebene $m\ n$ annim und die Grenze ſucht, gegen welche das Verhältniß der Maſſe $m_1\ n_1\ m'\ n'$ i ihrem Volumen convergirt, wenn ſich die beiden Ebenen $m_1\ n_1$, $m'\ n'$ b Ebene $m\ n$ ohne Ende nähern; ſo wird die Function y im Allgemeinen no dieſelbe ſein; aber für den Werth von x, fur welchen die Function eine Ste tigkeitsunterbrechung erſter Ordnung erfährt, wird der in der zweiten Voraus ſetzung berechnete Werth der Grenze die halbe Summe der beiden beſonder Werthe ſein, welche in der erſten Vorausſetzung dieſem Werthe von x entſpreche

§. 39. Wenn identiſch:

$$f x = \varphi x + \psi x + \omega x + \text{etc.}$$

iſt, ſo hat man für beliebige Werthe der Abſciſſen x_1 und x:

$$\frac{f x_1 - f x}{x_1 - x} = \frac{\varphi x_1 - \varphi x}{x_1 - x} + \frac{\psi x_1 - \psi x}{x_1 - x} + \frac{\omega x_1 - \omega x}{x_1 - x} + \text{etc.};$$

und folglich, wenn man die Differenz $x_1 - x$ gegen Null convergiren läßt und von jedem der vorhergehenden Verhältniſſe die Grenze nimmt:

$$f'x = \varphi' x + \psi' x + \tilde{\omega}' x + \text{etc.} \qquad (a)$$

Die Ableitung einer algebraiſchen Summe von Functionen iſt alſo gleich der algebraiſchen Summe ihrer Ableitungen.

Die Ableitung eines Productes zweier Functionen iſt gleich der Summe der Producte, welche man erhält, wenn man jede Function durch die Ableitung der anderen multiplicirt. Denn es ſei:

$$fx = \varphi x \cdot \psi x,$$

ſo hat man identiſch:

$$\varphi x_1 \cdot \psi x_1 - \varphi x \cdot \psi x = (\varphi x_1 - \varphi x)\,\psi x + (\psi x_1 - \psi x)\,\varphi x + (\varphi x_1 - \varphi x)(\psi x_1 - \psi x),$$

folglich:

$$\frac{fx_1 - fx}{x_1 - x} = \frac{\varphi x_1 - \varphi x}{x_1 - x} \cdot \psi x + \frac{\psi x_1 - \psi x}{x_1 - x} \cdot \varphi x + \frac{\varphi x_1 - \varphi x}{x_1 - x}(\psi x_1 - \psi x).$$

Wenn man nun $x_1 - x$ gegen Null convergiren läßt, und zu den Grenzen übergeht, ſo erhält man:

$$f'x = \varphi' x \cdot \psi x + \psi' x \cdot \varphi x; \qquad (b)$$

wenn φx und ψx keine Stetigkeitsunterbrechung der erſten oder zweiten Ordnung erfahren, ſo convergirt der Factor $\psi x_1 - \psi x$ mit $x_1 - x$ zugleich gegen Null, und der Factor:

$$\frac{\varphi x_1 - \varphi x}{x_1 - x}$$

gegen die endliche Grenze $\varphi' x$, ſo daß folglich das Glied:

$$\frac{\varphi x_1 - \varphi x}{x_1 - x}(\psi x_1 - \psi x)$$

gegen die Grenze Null convergirt.

Man kann die Gleichung (b) auf die mehr ſymmetriſche Form:

$$\frac{f'x}{fx} = \frac{\varphi' x}{\varphi x} + \frac{\psi' x}{\psi x}$$

bringen, und man ſieht leicht ein, daß, wenn man

$$fx = \varphi x \cdot \psi x \cdot \tilde{\omega} x \ldots\ldots,$$

ſo, die Ableitung $f'x$ durch die Formel:

$$\frac{f'x}{fx} = \frac{\varphi' x}{\varphi x} + \frac{\psi' x}{\psi x} + \frac{\tilde{\omega}' x}{\tilde{\omega} x} + \text{etc.}$$

gegeben würde.

Umgekehrt, wenn man:

$$fx = \frac{\varphi x}{\psi x}, \quad \text{oder} \quad \varphi x = fx \cdot \psi x$$

hat, ſo ergibt ſich aus der vorhergehenden Regel:

$$\frac{\varphi' x}{\psi x} = \frac{f'x}{fx} + \frac{\psi' x}{\psi x},$$

und folglich wenn man für fx ſeinen Werth wieder ſetzt:

$$f'x = \frac{\varphi' x \cdot \psi x - \varphi x \cdot \psi' x}{(\psi x)^2}. \qquad (c)$$

Die Conſtante a kann als eine Function betrachtet werden, deren Ableitung Null iſt, und wenn man folglich ſucceſſive:

$$y = a + \varphi x,\ y = a \cdot \varphi' x,\ y = \frac{a}{\varphi x}$$

ſetzt, ſo hat man nach den vorhin bewieſenen Regeln:

$$y' = \varphi' x,\ y' = a \cdot \varphi' x,\ y' = -\frac{a}{(\varphi' x)^2}.$$

Alle Functionen, welche ſich nur durch eine addirte Conſtante a von einander unterſcheiden, haben alſo dieſelbe Ableitung, welches Fundamentalprincip bereits in §. 31 dargethan iſt. *)

---

*) Beiſpiel 1. Es ſei: $fx = ax^3 - bx^2 + cx - e$, ſo iſt:

$$fx_1 = ax_1^3 - bx_1^2 + cx_1 - e,$$

folglich: $fx_1 - fx = a(x_1^3 - x^3) - b(x_1^2 - x^2) + c(x_1 - x$

$= a(x_1 - x)(x_1^2 + x_1 x + x^2) - b(x_1 - x)(x_1 + x) + c(x_1 -$

und: $\frac{fx_1 - fx}{x_1 - x} = a(x_1^2 + x_1 x + x^2) - b(x_1 + x) + c,$

mithin: $f'x = 3ax^2 - 2bx + c.$

Beiſpiel 2. Es ſei $fx = \frac{a^2 + x^2}{a - x}$, alſo $fx_1 = \frac{a^2 + x_1^2}{a - x_1}$,

folglich:

$$fx_1 - fx = \frac{a^2 + x_1^2}{a - x_1} - \frac{a^2 + x^2}{a - x} = \frac{a(x_1^2 - x^2) - xx_1(x_1 - x) + a^2(x_1 - x)}{(a - x_1)(a - x)}$$

und:

$$\frac{fx_1 - fx}{x_1 - x} = \frac{a(x_1 + x) - xx_1 + a^2}{(a - x_1)(a - x)};$$

alſo endlich:

$$f'x = \frac{a^2 + 2ax - x^2}{(a - x)^2}.$$

Beiſpiel 3. Es ſei: $fx = \sqrt{a^2 + x^2}$, alſo: $fx_1 = \sqrt{a^2 + x^2}$, ſo iſt:

$$\frac{fx_1 - fx}{x_1 - x} = \frac{\sqrt{a^2 + x_1^2} - \sqrt{a^2 + x^2}}{x_1 - x}$$

$$= \frac{(a^2 + x_1^2) - (a^2 + x^2)}{(x_1 - x)(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2})} = \frac{x_1 + x}{\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}},$$

und endlich:

$$f'x = \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Beiſpiel 4. Es ſei: $fx = ax^m$, alſo $fx_1 = ax_1^m$

folglich:

$fx_1 - fx = a(x_1^m - x^m) = a(x_1 - x)(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \text{etc.}$

alſo:

$$\frac{fx_1 - fx}{x_1 - x} = a\left\{x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \text{etc.}\right\}$$

und endlich:

$$f'x = a\left\{x^{m-1} + x^{m-1} + x^{m-1} + \text{etc.}\right\} = max^{m-1}.$$

Beiſpiel 5. Es ſei: $fx = a \sin. 2x$, ſo iſt: $fx = a \sin. 2x_1$,

folglich: $fx_1 - fx = a \sin. 2x_1 - a \sin. 2x = 2a \cos.(x_1 + x) \sin.(x_1 -$

und: $\frac{fx_1 - fx}{x_1 - x} = 2a \cos.(x_1 + x) \frac{\sin.(x_1 - x)}{x_1 - x}$,

alſo endlich: $f'x = 2a \cos. 2x.$

§. 40. Wenn man zugleich:

$$y = f x, \; x = \varphi t$$

, und es iſt:

$$y = \psi t$$

r unmittelbare Ausdruck von y als Function von t, wie ſich derſelbe aus der ination von x zwiſchen den beiden erſten Gleichungen ergeben würde, wenn Elimination möglich wäre; ſo wollen wir mit y_1, x_1, t_1; y, x, t, Syſteme correſpondirender Werthe dieſer drei Veränderlichen bezeichnen, alsdann hat man offenbar:

$$\frac{\psi t_1 - \psi t}{t_1 - t} = \frac{f x_1 - f x}{x_1 - x} \times \frac{\varphi t_1 - \varphi t}{t_1 - t},$$

folglich wenn man zu den Grenzen übergeht:

$$\psi' t = f' x \cdot \varphi' t.$$

Dieſe Gleichung drückt das Grundprincip für die Bildung der Ableitung r mittelbaren Functionen oder der Function von Functionen aus, und läßt ſich leicht verallgemeinern. Denn wenn z. B.:

$$y = f x, \; x = \varphi u, \; u = \tilde{\omega} t,$$

nd:

$$y = \psi t$$

r Ausdruck von y als unmittelbare Function von t iſt, wie ſich derſelbe urch Elimination der Functionen x und u ergeben würde; ſo findet man, enn man wie vorhin verfährt:

$$\psi' t = f' x \cdot \varphi' u \cdot \tilde{\omega}' t.$$

§. 41. Umgekehrt kann man die Veränderlichen x und y als unmittelbare Functionen einer dritten Veränderlichen t betrachten, welche durch die Gleichungen:

$$x = \varphi t, \; y = \psi t$$

beſtimmt werden, ſo daß

$$y = f x$$

die Gleichung iſt, welche ſich durch Elimination von t aus den beiden vorherſtehenden ergibt. Zunächſt hat man nach dem eben Bewieſenen:

$$f' x = \frac{\psi' t}{\varphi' t}.$$

Wir wollen, wie gewöhnlich, mit y' die Ableitung $f' x$ bezeichnen und der Kürze wegen

$$\frac{\psi' t}{\varphi' t} = \psi_1 t$$

ſetzen; ſo haben wir zwiſchen den Veränderlichen x, y', t die drei Gleichungen:

$$x = \varphi t, \; y' = \psi_1 t, \; y' = f' x,$$

woraus ſich ergibt, wenn wieder die Regel für die Bildung der Ableitung der mittelbaren Functionen angewandt wird:

$$f'' x = \frac{\psi_1' t}{\varphi' t}.$$

er nach der Formel (c) hat man:

$$\psi_1' t = \frac{\psi'' t \cdot \varphi' t - \psi' t \cdot \varphi'' t}{(\varphi' t)^2},$$

lich:

$$f'' x = \frac{\psi'' t \cdot \varphi' t - \psi' t \cdot \varphi'' t}{(\varphi' t)^3}, \qquad (d)$$

wenn man auf dieſe Weiſe fortführe, ſo könnte man die Ableitungen aller

Ordnungen der Function $f x$ vermittelst der Ableitungen der Functionen φ ψx ausdrücken.

Wir wollen insbesondere den Fall betrachten, wo $\psi t = t$ und folglich

$$\psi' t = 1, \ \psi'' t = 0, \text{ etc.}$$

ist, so läßt sich die Elimination von t unmittelbar bewerkstelligen und man hat zu gleicher Zeit:

$$x = \varphi y, \ y = f x,$$

d. h. φy ist die umgekehrte Function von $f x$ oder diejenige, welche man erhielte, wenn man die Gleichung $y = f x$ für x auflößte. Um also die Ableitungen der Function $f x$ vermittelst der Ableitungen der umgekehrten Function φx auszudrücken, braucht man in den vorhergehenden Formeln nur y für t und dann $\psi' y = 1$, $\psi'' y = 0$, etc. zu setzen, wodurch man erhält:

$$f' x = \frac{1}{(\varphi' y)}, \ f'' x = -\frac{\varphi'' y}{(\varphi' y)^3}, \text{ etc.} \qquad (o)$$

Die erste der Formeln (o) ergibt sich auch direct aus einer sehr einfachen geometrischen Betrachtung. Denn da die beiden Gleichungen $y = f x$, $x = \varphi y$ nach der Voraussetzung identisch sind, und dieselbe Curve ausdrücken, so drücken die Ableitungen $f' x$ und $\varphi' y$ in einem Systeme rechtwinkliger Coordinaten, resp. die trigonometrischen Tangenten der Winkel aus, welche die geometrische Tangente im Punkte (x, y) der Curve mit den Axen der x und der y bildet, und da diese beiden Winkel einander zu einem rechten ergänzen, so hat man:

$$f' x \cdot \varphi' y = 1, \text{ folglich } f' x = \frac{1}{\varphi' y}.$$

Grundbegriffe der Theorie der Fluxionen.

§. 42. Wir haben in §. 30 gesehen, daß die abgeleitete Function $y' = f' x$ die Schnelligkeit ausdrückt, mit welcher sich die ursprüngliche Function $y = f x$ in Beziehung auf die Schnelligkeit ändert, mit welcher die unabhängige Veränderliche x ändert, und wir haben ebendaselbst erklärt, was man unter dieser relativen Schnelligkeit verstehen muß. Aber wenn die Veränderliche t die von irgend einem Augenblicke an gezählte Zeit bezeichnet, und die Größen x, y, als nach den Gleichungen:

$$x = \varphi t, \ y = \psi t,$$

mit der Zeit t veränderlich betrachtet werden, so messen die Ableitungen φ' $\psi' t$ nicht mehr die Schnelligkeit der Veränderung von x und von y in einem relativen, sondern in einem absoluten Sinne; denn die so gezählte Zeit ist eine nothwendig unabhängig veränderliche Größe, welche ihrer Natur nach sich immer gleichförmig ändert, oder gleichförmig verfließt. Newton nennt die Größen $x, y, \ldots,$ welche als mit der Zeit veränderlich betrachtet werden, indem er so die Veränderung dieser Größen auf das Verfließen der Zeit bezieht, Fluenten und die Ableitungen $\varphi' t$, $\psi' t, \ldots,$ welche sich im Allgemeinen auch mit der Zeit ändern und in jedem Augenblicke die Veränderungsgeschwindigkeiten der Fluenten messen, Fluxionen. Seine Bezeichnung besteht darin, daß er über die Fluente einen Punkt setzt, um ihre Flurion anzudeuten. So bezeichnen z. B. $\dot{x}$, $\dot{y}$ die Fluxionen von x, y, oder die Ableitungen $\varphi' t$, $\psi' t$. Ebenso bezeichnen $\ddot{x}$, $\ddot{y}$; $\dddot{x}$, $\dddot{y}$ die Ableitungen $\varphi'' t$, $\psi'' t$; $\varphi''' t$, $\psi''' t$, d. h. die Fluxionen von Fluxionen oder Fluxionen der zweiten, dritten, u. s. f. Ordnung.

Man kann mit Newton als Typus der Fluenten den Abstand x eines festen Punktes O (Fig. 27) von einem sich auf der unbegrenzten geraden Linie

...l bewegenden Punkte u nehmen, so drückt die Flurion $\dot{x}$ die Geschwindig-
...it des beweglichen Punktes für den betrachteten Augenblick selbst aus, wo
...as Wort Geschwindigkeit hier in seiner ursprünglichen und gebräuchlichsten
...edeutung genommen wird. Man könnte aber auch, ohne der Klarheit der
...Begriffe zu schaden, jedes andere Beispiel wählen.

Wenn sich z. B. ein erhitzter Körper abkühlt, so begreift man leicht, daß
...ie Temperatur seiner Oberfläche eine mit der Zeit veränderliche Größe ist,
...welche sich nicht gleichförmig ändert, so daß in gleichen Zeiten, gleiche Tem-
...peraturverluste stattfänden, und man macht sich von der veränderlichen Abkühl-
...ungsgeschwindigkeit einen eben so directen und eben so klaren Begriff, wie von
...er veränderlichen Geschwindigkeit eines beweglichen Punktes.

Die Vorstellung Newton's erstreckt sich übrigens auf beliebige Größen,
...daß man vermittelst der Flurionen die Functionen immer definiren und aus-
...drücken kann, welche wir bisher Ableitungen genannt haben und deren Re-
...lationen zu den ursprünglichen Functionen den Hauptgegenstand der uns beschäf-
...tigenden Theorie ausmachen. Denn es sei $y = fx$ irgend eine Function von
...x, so hat man nach den Formeln des vorhergehenden §, wofern x, y mit der
...Zeit veränderliche Größen bezeichnen:

$$f'x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad f''x = \frac{\dot{y}\,\dot{x} - \dot{y}\,\ddot{x}}{\dot{x}^3}, \quad \text{etc.}$$

Wenn nun x, y keine Functionen der Zeit sind, so ist immer eine dieser Grö-
...ßen so beschaffen, daß ihre Veränderungen den Veränderungen keiner anderen
...Größen subordinirt sind, und man kann sie daher wie eine unabhängige verän-
...derliche Größe betrachten, oder vielmehr man betrachtet beide mittelbar oder
...unmittelbar als Functionen φu, ψu einer Veränderlichen u, welche man zur
...unabhängigen Veränderlichen nehmen kann.

Da nun die Veränderung von u als gleichförmig erfolgend angenommen
...wird, wie die Zeit t sich ihrer Natur nach gleichförmig ändert, so steht der
...Annahme nichts entgegen, daß sich u mit t ändert, und u als Maß von t zu
...betrachten, d. h. die Functionen $\varphi' u$, $\psi' u$ mit $\varphi' t$, $\psi' t$ oder mit den
...Flurionen $\dot{x}$, $\dot{y}$ zu identificiren.

Wenn x zur unabhängigen Veränderlichen genommen wird, so hat man
$\dot{x} = 1$, $\ddot{x} = 0$, $\dddot{x} = 0$, etc., alsdann werden die Flurionen $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, ...
...mit den Ableitungen $f'x$, $f''x$, $f'''x$, ... oder mit y', y'', y''', ... identisch und man sieht, daß die Langrange'sche Bezeichnung sich von der
...Newton'schen durch weiter nichts unterscheidet, als daß für die Punkte Ac-
...cente gesetzt sind.

Man hat Newton den Vorwurf gemacht, den Begriff der Zeit und der
...Bewegung unnöthigerweise in diese Darstellungsart eingemischt zu haben,
...dieser Vorwurf ist nur in Beziehung auf den Begriff der Bewegung
...gründet, zu dessen Einführung nichts nöthigt, und in Beziehung auf den
...Begriff der Zeit ist zu bemerken, daß derselbe ganz der Natur der Sache ge-
...mäß hier in Betrachtung kommen muß, weil die Zeit die einzige nothwendige
...unabhängige veränderliche Größe ist, deren Veränderung nothwendig gleichför-
...mig geschieht. In allen den Fällen, wo der Newton'sche Begriff auf Größen
...angewandt wird, welche sich wirklich mit der Zeit ändern, gewährt derselbe den
...Vortheil, die reelle Bedeutung der abgeleiteten Functionen zu bestimmen,
...eben dadurch gleich zum Voraus den Grund der Regel anzugeben, welchen
...bei den Anwendungen der Analysis auf die Untersuchung der Naturerschei-

nungen ſpielen müſſen. Newton hat auf dieſe Weiſe die Theorie der Fu
tionen auf einen Begriff zu gründen geſucht, welchen der Geiſt direct faſſ
kann, ohne durch die Betrachtung der Grenzen zu gehen und ohne einen W
einzuſchlagen, welcher bis zu einem gewiſſen Punkte unnatürlich und indirect i
Er verſtand die Stetigkeit in der Veränderung der Größen vermittelſt der b
kannteſten Erſcheinungen, wo dieſe Stetigkeit in die Sinne fällt, direct aus
drücken. Auch hat man nach Dalembert den Einwurf gemacht, daß m
zur Definition einer beſtändig veränderlichen Geſchwindigkeit ſich immer d
Betrachtung der Grenzen bedienen müſſe; allein man hat bei dieſem Einwur
die Schärfe der Begriffe irrigerweiſe ihrer logiſchen Definition untergeordn
Denn ein Begriff exiſtirt in dem Verſtande unabhängig von der Definitio
welche man davon gibt, und oft läßt ſich von dem einfachſten Verſtandesbegri
nur eine complicirte, oder gar keine Definition geben. Jedermann hat ein
unmittelbaren und genauen Begriff von der Aehnlichkeit zweier Körper, obgle
nur wenige die complicirten Definitionen verſtehen können, welche die Geomet
von der Aehnlichkeit gegeben hat. Die weitere Verfolgung dieſes Gegen
ſtandes würde uns in die Theorie der Erzeugung der Begriffe führen und u
zu weit von unſerem Hauptzwecke entfernen.

Viertes Kapitel.

Von den Differenzen und den Annäherungen der verſchiedenen Ordnungen. — Theorie der unendlich kleinen Größen und Princip der Infinitesimalrechnung.

§. 43. Wir wollen uns zwei veränderliche Größen x, y denken, wo
die eine eine Function der andern iſt, und welche die beiden Reihen correſpo
dirender Werthe:

$$x,\ x_1,\ x_2,\ x_3.\ x_4,\ \ldots\ldots$$
$$y,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots\ldots$$

durchlaufen. Zwiſchen je zwei auf einander folgenden Gliedern jeder die
Reihen wollen wir die Differenz beſtimmen und mit Δ andeuten, indem w
z. B. $x_1 - x = \Delta x$, $y_1 - y = \Delta y$, u. ſ. f. ſetzen, ſo daß der Buch
ſtabe Δ nur ein Zeichen und keine Größe iſt; ſo erhalten wir die beiden Reih
correſpondirender Werthe:

$$\Delta x,\ \Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \Delta x_3,\ \ldots\ldots$$
$$\Delta y,\ \Delta y_1,\ \Delta y_2,\ \Delta y_3,\ \ldots\ldots$$

Mit dieſen letzten Reihen wollen wir wie mit den urſprünglichen verfahr
d. h. zwiſchen jedem Gliede und dem folgenden die Differenz nehmen und
der Analogie, z. B. die Differenz $\Delta x_1 - \Delta x$ mit $\Delta \cdot \Delta x$ oder
$\Delta^2 x$ bezeichnen, u. ſ. f.; ſo erhalten wir die beiden neuen Reihen:

$$\Delta^2 x,\ \Delta^2 x_1,\ \Delta^2 x_2,\ \ldots\ldots$$
$$\Delta^2 y,\ \Delta^2 y_1,\ \Delta^2 y_2,\ \ldots\ldots$$

worin die Glieder $\Delta^2 x$, $\Delta^2 y$, ... Differenzen von Differenz-
oder Differenzen der zweiten Ordnung in Beziehung auf die Glie
x, y, welche ihnen in den urſprünglichen Reihen entſprechen, ausdrück
Ebenſo würden die Reihen mit den Differenzen der dritten, der vie
ten, ... Ordnung gebildet.

Dieſen Bezeichnungen zufolge hat man offenbar:

$x + \Delta x$

$x_1 + \Delta x_1 = x + \Delta x + \Delta(x + \Delta x) = x + 2\Delta x + \Delta^2 x,$

$x_2 + \Delta x_2 = x + 2\Delta x + \Delta^2 x + \Delta(x + 2\Delta x + \Delta^2 x$

$= x + 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x$

. . . . . .

h einer offenbaren Induction (welche man übrigens auch leicht durch die
te Käſtner'ſche Beweismethode beſtätigen könnte):

$$+\frac{n}{1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 x + \ldots + \Delta^n x.$$

hat man:

$$+\frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 y + \ldots + \Delta^n y.$$

ßten Formeln können folgendermaßen ſymboliſch ausgedrückt werden;

$$x_n = (1 + \Delta)^n x, \quad y_n = (1 + \Delta)^n y,$$

man ſich erinnert, daß ſolche Gleichungen nur nach der Entwickelung
ten Theile einen Sinn haben, wenn der Buchſtaben Δ nur ein Ope-
und kein Quantitätszeichen iſt.

e Analogie zwiſchen den Potenzen und den Differenzen, welche aus
ymboliſchen Gleichungen hervorgeht, und wovon wir noch viele andere
e kennen lernen werden, rührt offenbar davon her, daß die Binomial-
nach den Regeln der combinatoriſchen Analyſis erhalten wird, welche
ch gar von der Natur der Rechnungsoperationen unabhängig iſt, die
mbination darſtellt, wobei der Begriff der Multiplication, welcher in
menten der Algebra ſich mit dem abſtracten Begriffe der Combination
t, ganz zufällig iſt.

44. Wenn die Größe x ihrer Natur nach, oder nach der Annahme,
le der unabhängig veränderlichen Größe ſpielt, ſo hat man beſonders
l zu betrachten, wo dieſe Veränderliche nach gleichen Differenzen oder
enten wächſt, ſo daß man hat:

$$x_1 = x + \Delta x,$$
$$x_2 = x + 2\Delta x,$$
$$x_3 = x + 3\Delta x, \text{ etc.},$$

die Differenzen höherer Ordnungen $\Delta^2 x$, $\Delta^3 x$, ... alle auf Null
n. In dieſer Vorausſetzung wollen wir nun die Reihen betrachten,
die aufeinander folgenden Werthe von y und ihre Differenzen der ver-
en Ordnungen enthalten.

ür unſeren gegenwärtigen Zweck würde nichts Weſentliches mehr zu be-
ſein, ſo lange die Function $y = fx$ unbeſtimmt bleibt und außerdem
Bedingung in der Wahl der willkührlichen Differenz Δx hinzugefügt
Wir wollen daher annehmen, daß Δx einen ſehr kleinen Bruch be-
, ſo werden die Differenzen Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ... im Allgemeinen
hr klein, jedoch ſo beſchaffen, was ſehr bemerkenswerth iſt, daß die
üſſe von $\Delta^2 y$ zu Δy, von $\Delta^3 y$ zu $\Delta^2 y$, etc. ſelbſt durch ſehr
Brüche ausgedrückt werden. Je kleiner die Differenz Δx iſt, deſto
er ſtellt ſich dieſe Größenſubordination zwiſchen den Differenzen der
denen Ordnungen der Function y heraus.

n der That, wenn wir von der identiſchen Gleichung:

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x.$$

en, ſo können wir zunächſt bemerken, daß das Verhältniß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ohne

Ende gegen die Grenze $f'x$ convergirt, wenn Δx ohne Ende abnimmt. Es hat also mit einer unbeschränkten Annäherung, welche desto größer ist, je kleiner der Bruch Δx ist:

$$\Delta y = f'x \cdot \Delta x.$$

Auch ist identisch:

$$\Delta^2 y = \left(\frac{\Delta y'}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \cdot \Delta x$$

und aus dieser Gleichung folgt mit einer unbeschränkten Annäherung, welche desto größer ist, je kleiner der Werth von Δx wird:

$$\Delta^2 y = [f'(x+\Delta x) - f'x] \cdot \Delta x = \frac{f'(x+\Delta x) - f'x}{\Delta x} \cdot \Delta x^2 = f''x \cdot \Delta$$

Hieraus sieht man zunächst, daß die abgeleitete Function der zweiten Ordnung $f''x$ die Grenze ist, gegen welche das Verhältniß $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ convergirt, wenn Δx ohne Ende abnimmt, so wie die Grenze des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ unter derselben Bedingung durch die erste Ableitung $f'x$ ausgedrückt wird. Ferner folgt hieraus, daß für sehr kleine Werthe von Δx nahezu:

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta y} = \frac{f''x}{f'x} \cdot \Delta x$$

ist. Wenn nun die abgeleiteten Functionen $f'x$, $f''x$ endlich bleiben, und wenn die Function fx in dem Intervalle von x bis $x + \Delta x$ keine Stetigkeitsunterbrechung der zweiten oder dritten Ordnung erfährt und in diesem Intervalle nicht durch ein Maximum oder Minimum geht, in welchem Falle $f''x$ verschwinden würde; so kann man setzen:

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta y} = \alpha \Delta x,$$

wo α eine endliche Zahl bezeichnet, und alsdann kann man Δx immer so klein annehmen, daß das Product $\alpha \Delta x$ oder das Verhältniß $\frac{\Delta^2 y}{\Delta y}$ kleiner wird, als jede gegebene Größe.

Ebenso ergibt sich aus der identischen Gleichung:

$$\Delta^3 y = \left(\frac{\Delta^2 y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right) \cdot \Delta x^2$$

für sehr kleine Werthe von Δx mit einer unbeschränkten Annäherung:

$$\Delta^3 y = [f''(x+\Delta x) - f''x] \cdot \Delta x^2 = \frac{f''(x+\Delta x) - f''x}{\Delta x} \cdot \Delta x^3$$
$$= f'''x \cdot \Delta x^3,$$

und da dieselbe Rechnung ohne Ende fortgesetzt werden kann, so sieht man, daß die Ableitung $f^{(n)}x$ die Grenze ist, gegen welche das Verhältniß $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$ in der gemachten Voraussetzung convergirt, welches ein Mittel an die Hand gibt, die Werthe der Function $f^{(n)}x$ näherungsweise zu berechnen, wenn die ursprüngliche Function fx für einander sehr nahe liegende und um gleiche Differenzen von einander verschiedene Werthe durch eine Tafel gegeben sind. Denn vermittelst dieser Tafel bildet man die Werthe von Δy, $\Delta^2 y$, ...

man hat folglich den Werth des Verhältniſſes $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$, welcher nahezu mit Werthe von $f^{(n)}x$ übereinſtimmt.

ferner ſieht man, wenn alle Ableitungen von fx bis zu der Ableitung incl. endlich bleiben, daß man Δx immer ſo klein annehmen kann, daß ifferenzen der verſchiedenen Ordnungen:

$$\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y, \ldots\ldots \Delta^n y$$

los eine Reihe ſehr kleiner Brüche bilden, ſondern daß dieſe Reihe ſo et iſt, daß das Verhältniß jedes Gliedes der Reihe zu dem vorherge- ſich ſelbſt auf einen ſehr kleinen Bruch reducirt.

. 45. Die Reihe der Potenzen eines ſehr kleinen Bruches iſt der arith- e Typus der Subordination der Größen. Wenn man z. B. den Bruch

auf die ſucceſſiven ganzen Potenzen erhebt, ſo erhält man die ſehr abnehmende Reihe:

$$\frac{1}{1000}, \frac{1}{1000000}, \frac{1}{1000000000}, \text{ etc.},$$

man bei einer Näherungsrechnung nicht blos gegen irgend ein Glied der das folgende Glied, ſondern auch ein Vielfaches dieſes letztern unberück- laſſen kann, ſo lange der Multiplicator nicht von der Ordnung der oder Hunderter iſt. Wir wollen allgemein mit ε einen ſehr kleinen und mit $k_1, k_2, k_3, \ldots k_n$ Zahlen bezeichnen, welche nicht ſehr oder ſo beſchaffen ſind, daß die Brüche:

$$\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \frac{1}{k_3}, \ldots\ldots\ldots \frac{1}{k_n}$$

Kleinheit wegen nicht mit ε vergleichbar ſind; ſo beſteht die Reihe:

$$k_1\varepsilon, k_2\varepsilon^2, k_3\varepsilon^3, \ldots\ldots k_n\varepsilon^n$$

liedern, wovon jedes gegen das vorhergehende als ſehr klein betrachtet kann, oder wovon jedes durch einen ſeiner Kleinheit wegen mit ε ver- ren ſehr kleinen Bruch ausgedrückt würde, wenn man den Werth des ebar vorhergehenden Gliedes zur Einheit nähme.

ie Brüche ε und $k_1\varepsilon$ wollen wir ſehr kleine Größen der erſten ung nennen, ſo wird die eben erwähnte Größenſubordination dadurch rückt, daß man ſagt:

$$k_2\varepsilon^2, k_3\varepsilon^3, \ldots\ldots k_n\varepsilon^n$$

hr kleine Größen der zweiten, dritten, ... der n^{ten} Ord-

Wenn alſo Δx eine ſehr kleine Größe der erſten Ordnung iſt, und der Brüche:

$$\frac{1}{f'x}, \frac{1}{f''x}, \frac{1}{f'''x}, \ldots\ldots \frac{1}{f^{(n)}x}$$

Kleinheit wegen mit Δx vergleichbar iſt; ſo werden wir ſagen, daß die nzen:

$$\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y, \ldots\ldots \Delta^n y$$

eine Größen der erſten, zweiten, dritten, ... n^{ten} Ordnung, oder n reſp. von derſelben Ordnung als:

$$\Delta x, \Delta x^2, \Delta x^3 \ldots\ldots \Delta x^n$$

. 46. Es wird nicht unzweckmäßig ſein, hier einige Erläuterungen über terſcheidung, welche die Geometer zwiſchen Größen von verſchiedenen ngen machen, wenn ſie nicht blos mathematiſche Verhältniſſe in aller

ſuchen. So haben wir, wenn wir zunächſt die Differenz Δy bilden, um t derſelben zu dem Verhältniſſe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und von dieſem zu der Grenze überzuge

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 + a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + \\ - (x^3 + ax^2 + bx + c) = (3x^2 + 2ax + b)\Delta \\ + (3x + a)\Delta x^2 + \Delta x^3,$$

woraus folgt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + ax + b + (3x + a)\Delta x + \Delta x^2.$$

Laſſen wir nun Δx ohne Ende gegen Null convergiren, ſo convergiren Glieder:

$$(3x + a)\Delta x, \Delta x^2$$

ebenfalls ohne Ende gegen Null und verſchwinden an der Grenze, ſo l man folglich hat:

$$y' = \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{Grenze von } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 2ax + b.$$

Statt dieſe Schlußweiſe anzuwenden, wollen wir die Differenzen Δ Δy als unendlich kleine Größen betrachten und ſie mit dx, dy bezeich ſo haben wir:

$$dy = (3x^2 + 2ax + b)\,dx + (3x + a)\,dx^2 + dx^3; \quad (1$$

aber die Glieder:

$$(3x + a)\,dx^2, dx^3$$

ſind unendlich kleine Größen der zweiten und dritten Ordnung, welche g die unendlich kleinen Größen der erſten Ordnung:

$$dy, (3x^2 + 2ax + b)\,dx$$

vernachläßigt werden müſſen, und man hat folglich blos:

$$dy = (3x^2 + 2ax + b)\,dx \qquad (2)$$

woraus, wie oben, folgt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax + b.$$

Nun beſteht aber der Hauptvortheil des Leibnitz'ſchen Verfahrens darin, man in der Gleichung (1) die Glieder mit dx^2 und dx^3 nicht hätte zu und zu berechnen brauchen, weil dieſelben nur unendlich kleine Größen h Ordnungen ſein können, welche gegen unendlich kleine Größen der erſten nung ebenſo und aus demſelben Grunde verſchwinden müſſen, wie dieſe endliche Größen. Ferner war zur Bildung der Differenz Δy die Ken der Formel erforderlich, welche die Entwickelungen der Potenzen $(x + \Delta$ $(x + \Delta x)^2$ geben, während es zur Bildung der Gleichung (2) hinrei geweſen wäre, die Glieder dieſer Entwickelungen mit der erſten Poten Δx zu kennen.

Wir wollen ferner annehmen, daß wir die Ableitung der Function fo welche das Maß der zwiſchen der Curve $M'N'$ (Fig. 20), der Axe der ſciſſen und der den beiden Ordinaten $m_0 p_0$, mp, wovon die erſte feſt die zweite beweglich iſt, liegenden trapezoidiſchen Fläche iſt. Dieſe Aufgab bereits in §. 33 durch die Betrachtung der Grenzen gelöſt, und um daraus Leibnitz'ſchen Principien anzuwenden, wollen wir annehmen, daß die Flä $Op = x$ um die unendlich kleine Größe $pp_1 = dx$ zunimmt. Wenn Fläche $m_0 p_0 pm$ mit y bezeichnet wird, ſo drückt dy das unendlich kl krummlinige Trapez $mpp_1 m_1$ aus. Aber wenn wir die geraden Linien $m_1 n$ parallel zu pp_1 ziehen, ſo iſt der Unterſchied zwiſchen dy und unendlich kleinen Rechtecke $mpp_1 n_1$, kleiner als die Fläche des Rech

$\alpha_1 \beta_1 \alpha$, welches ſelbſt eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung wenn jede ſeiner beiden Dimenſionen $m n_1$, $m_1 n$ eine unendlich kleine Größe der erſten Ordnung iſt. Wenn man alſo, wie es geſchehen muß, die unendlich kleinen Größen der zweiten Ordnung gegen die der erſten Ordnung vernachläſſigt und mit $f' x$ die veränderliche Ordinate der Curve $M' N'$ bezeichnet, ſo hat man:

$$dy = f' x \cdot dx,$$

oder:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f' x,$$

woraus erhellet, daß die Ableitung der geſuchten Function genau die gegebene Function $f' x$ iſt.

Man wendet im Allgemeinen bei den Schlüſſen, Conſtructionen und Rechnungen nur unendlich kleine Größen verſchiedener Ordnungen an, um die Verhältniſſe anzugeben, welche zwiſchen unendlich kleinen Größen derſelben Ordnung ſtattfinden, und zu dieſem Zwecke vernachläſſigt man ſtets unendlich kleine Größen einer höhern Ordnung gegen unendlich kleine Größen von einer niedrigern Ordnung, wodurch im Verlaufe der Betrachtungen Conſtructionen und Rechnungen, Vereinfachungen bewirkt werden, welche den weſentlichen Vorzug der Methode ausmachen.

§. 49. In der That, wenn wir die Methode der Grenzen und die der unendlich kleinen Größen nicht blos in ihren erſten Principien, ſondern auch in ihren eben ſo mannichfaltigen, als ausgedehnten Anwendungen mit einander vergleichen könnten, ſo würden wir finden, daß beide Methoden nach demſelben Ziele ſtreben, nämlich: das Geſetz der Stetigkeit bei der Veränderung der Größen auszudrücken, aber daß ſie zur Erreichung dieſes Zweckes entgegengeſetzte Wege einſchlagen. Wenn nach der erſten Methode eine Function über ſtetig veränderliche Größen behandelt werden ſoll, ſo nimmt man an, daß ſie plötzlich von einem Größenzuſtande in einen andern übergeht, und unterſucht dann, gegen welche Grenzen die erhaltenen Werthe in dieſer Vorausſetzung convergiren, wenn man das Intervall zwiſchen zwei ſucceſſiven Werthen immer mehr und mehr verkleinert. Offenbar erhält man auf dieſe Weiſe am Ende der Auflöſung die Vereinfachungen, welche aus der Stetigkeit der veränderlichen Größen entſpringen, und welche die Infiniteſimalmethode durch das unmittelbare Verſchwinden der unendlich kleinen Größen höherer Ordnungen gegen die einer niedrigern Ordnung unmittelbar und ſucceſſive bei der fortſchreitenden Unterſuchung von ſelbſt an die Hand gibt.

Uebrigens bildet die Infiniteſimalmethode nicht blos einen geiſtreichen Kunſtgriff, ſondern ſie iſt der natürliche Ausdruck der Entſtehungsart phyſiſcher Größen, welche nach Elementen wachſen, die kleiner ſind, als jede endliche Größe. Wenn z. B. ein Körper, um uns des in §. 42 angeführten Beiſpieles zu bedienen, ſich abkühlt und fortwährend thermometriſche Wärme ausſtrahlt, ſo iſt ſein Temperaturverluſt in einer beliebig kleinen Zeit eine zuſammengeſetzte Erſcheinung, welche von dem Geſetze, wonach der Körper fortwährend in jedem unendlich kleinen Zeittheilchen eine unendlich kleine Quantität thermometriſcher Wärme ausſtrahlt, abhängt. Das Verhältniß zwiſchen den unendlich kleinen Veränderungen der thermometriſchen Wärme des Körpers und der Zeit iſt der Grund des Verhältniſſes, welches ſich zwiſchen den Veränderungen derſelben Größen herausſtellt, wenn ſie endliche Werthe erlangt haben, wo der Ausdruck Grund hier in ſeiner philoſophiſchen Bedeutung genommen iſt. Ebenſo ändern ſich, um ein noch bekannteres Beiſpiel anzuführen, die von einem freifallenden Körper durchlaufenen Räume den Quadraten der ſeit dem

Beginnen des Falles verfloſſenen Zeiten proportional, weil der unendlich k Zuwachs des Raumes der erlangten Geſchwindigkeit proportional iſt, w ſelbſt in Folge der fortdauernden conſtanten Wirkung der Schwere der ſeit Beginnen der Bewegung verfloſſenen Zeit proportional iſt. Dieſe ſo ein Relation zwiſchen den Elementen der verfloſſenen Zeit und denen des beſch benen Raumes iſt der Grund oder die Urſache des weniger einfachen G tzes, welches zwiſchen den endlichen Veränderungen dieſer beiden Gr ſtattfindet.

Aus dieſem Geſichtspunkte betrachtet, hat man mit Grund ſagen kön daß die unendlich kleinen Größen in der Natur exiſtiren, und man kö bei dieſer Vorſtellungsart ſehr paſſend die Function f' x die erzeugende urſprüngliche Function und fx die abgeleitete Function nennen, dieſe Benennungen in einem umgekehrten Sinne anzuwenden, welches grange, von rein algebraiſchen Betrachtungen geleitet, gethan hat.

Uebrigens beziehen ſich dieſe Bemerkungen nicht ausſchließlich auf Gr welche eine phyſiſche Exiſtenz haben; denn in der reinen Geometrie werden ſtetigen Größen als durch die Bewegung gewiſſer Punkte, Linien oder Flä erzeugt, betrachtet, und in ſolchen Fällen iſt die directe Betrachtung des G tzes der unendlich kleinen Veränderungen, woraus das Geſetz endlicher Ve derungen entſpringt, ebenſo vortheilhaft.

Kurz, die Infiniteſimalmethode iſt der Natur der Sache mehr angeme ſie iſt, aus einem objectiven Geſichtspunkte betrachtet, die directe Methode eben deßwegen iſt der Leibnitz'ſche Algorithmus, bei welchem dieſer Me noch eine regelmäßige Bezeichnung zu Hülfe kommt, ein ſo kräftiges Erfindu mittel geworden, wodurch die reine und angewandte Mathematik eine ganz Geſtalt bekommen hat, und welcher an und für ſich betrachtet, eine höchſt w tige Erfindung iſt, welche wir dieſem großen Philoſophen allein verdan Dagegen läßt ſich der Begriff des unendlich Kleinen logiſch nur auf eine recte Weiſe mit Hülfe der Grenzen definiren, ſo daß aus dem logiſchen ſubjectiven Geſichtspunkte betrachtet, die demonſtrative Strenge direct der thode der Grenzen und nur indirect der Infiniteſimalmethode zukommt, dieſe vermittelſt gewiſſer Worterklärungen nur eine Uebertragung der e wird. Die Folge von dieſer zweifachen Thatſache iſt, daß man in den ein ſten Fällen die Identität der Reſultate beider Methoden nachweiſen muß; wenn dieſe Uebertragung einmal genau aufgefaßt iſt, ſo muß man ſich der finiteſimalmethode bedienen, welche allein bei der Auflöſung zuſammengeſ Aufgaben durch die Hinweglaſſung jedes unnützen Gerüſtes zum Ziele ren kann.

Obgleich die Methode der Grenzen zuverläſſig alle nur zu wünſch logiſche Strenge hat, ſo ſcheint doch der Begriff, worauf ſie beruht von Geometern des Alterthums noch nicht ſcharf genug definirt zu ſein, weil an die griechiſche Dialectik gewöhnt, die Anzahl der unmittelbaren Vorſtellu immer zu vermindern ſuchten, indem ſie das Princip der Identität oder Widerſpruches, worauf die logiſche Demonſtration beruht, anwandten. ſubſtituirten daher für die Methode der Grenzen das aus den Elementen kannte Verfahren der Zurückführung auf das Abſurde oder der Exh ſtion, welches das indirecteſte und complicirteſte Verfahren von allen welches man ſobald als möglich verlaſſen muß, wenn man allmählig von einfachſten zu den zuſammengeſetzteſten Aufgaben übergeht.

Aus der Vergleichung und Zuſammenſtellung dieſer verſchiedenen ma matiſchen Theorieen ließen ſich werthvolle Inductionen für das allgem Studium der Operationen und der Geſetze des Verſtandes ableiten; allein

…dadurch in das Gebiet der reinen Philoſophie geführt und von dem …lichen Zwecke des vorliegenden Werkes zu weit entfernt werden.

§. 50. Die unendlich kleinen Differenzen dx, dy, d^2y, d^3y, ... …n kürzer mit dem Ausdrucke Differenziale benannt. Die Verhältniſſe:

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \ldots\ldots,$$

…Identität mit den abgeleiteten Functionen y', y'', y''', ..., wenn das …renzial dx conſtant iſt und mit den Flurionen $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, ..., wenn …fluente x ſich gleichförmig mit der Zeit ändert oder gleichförmig fließt, …achgewieſen haben, hat Lacroix die Differenzialcoefficienten der …tion y genannt, und dieſer Ausdruck wird jetzt häufig angewandt. Sehr …ig werden ſie auch Differenzialquotienten genannt. Die Ordnung …s Differenzialcoefficienten iſt dieſelbe, wie die des entſprechenden Differen…l oder der entſprechenden abgeleiteten Function.

Eine Function differenziren, heißt von dieſer Function zu ihrem Dif…ziale übergehen, und der Zweig der Analyſis, welcher ſich mit der Diffe…rung der Functionen beſchäftigt, wird die Differenzialrechnung …nnt.

Die Gleichungen, welche zwiſchen der unabhängigen Veränderlichen x, der …tion y und den Ableitungen oder Differenzialcoefficienten dieſer Function …finden, werden Differenzialgleichungen genannt, und die Ordnung …r ſolchen Differenzialgleichung wird durch die des höchſten in dieſer Gleichung …mmenden Differenzialcoefficienten beſtimmt. So iſt z. B.:

$$f(x, y, y') = 0, \quad \text{oder } f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

…Differenzialgleichung der erſten Ordnung und:

$$f(x, y, y', y'') = 0, \quad \text{oder } f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

…Differenzialgleichung der zweiten Ordnung, u. ſ. f.

§. 51. Die endliche Differenz $x - x_0$ iſt die Summe der unendlich …n Incremente, welche die unabhängige Veränderliche erhalten hat, indem …n dem Werthe x_0 zu dem Werthe x übergegangen iſt, und ebenſo iſt die …he Differenz $y - y_0$ die Summe der unendlich kleinen Incremente oder …renzialelemente:

$$dy = f'x \cdot dx,$$

…deren ſucceſſive Annahme die Function von dem Werthe y_0 zu dem …the y übergegangen iſt, wo dieſe Elemente daſſelbe, oder das entgegenge…te Zeichen von dx haben können, je nachdem $f'x$ einen poſitiven oder ne…en Werth annimmt (§. 30). *)

*) Denn es ſeien:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_{n-1}, x_n$$

…e Werthe, welche die unabhängige Veränderliche x bei dem Uebergange von dem Werthe x_0 zu dem Werthe x annimmt, und:

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots y_{n-1}, y_n$$

ſeien die entſprechenden Werthe der Function y, indem ſie von dem Werthe y_0 zu dem Werthe y übergeht, ſo iſt offenbar:

$$(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+(x_4-x_3) + \ldots (x_n-x_{n-1})+(x-x_n)=x-x_0,$$

und:

$$(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+(y_3-y_2)+(y_4-y_3) + \ldots (y_n-y_{n-1})+(y-y_n)=y-y_0.$$

Man ſchreibt daher:

$$y - y_0 = \int_{x_0}^{x} f'x \cdot dx, \qquad (3)$$

oder:

$$fx - fx_0 = \int_{x_0}^{x} f'x \cdot dx,$$

wo das Zeichen $\int$ als die Abkürzung des Wortes Summe betrachtet w
und man ſagt, daß:

$$\int_{x_0}^{x} f'x \cdot dx$$

das zwiſchen den Grenzen x_0, x genommene Integral des Diffe
ziales $f'x \cdot dx$. *)

Mit andern Worten, wenn man:

$$\Delta x = \frac{x - x_0}{n}$$

nimmt, ſo convergirt die Summe:

$$f'x_0 \cdot \Delta x + f'(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x + f'(x_0 + 2\Delta x) \cdot \Delta x + \ldots + f'[x_0 + (n+1)\Delta x]\,\Delta x$$

gegen die Grenze:

$$fx - fx_0,$$

wenn man die Zahl n immer größer und größer nimmt oder Δx gegen
convergiren läßt.

§. 52. Die Gleichung (3) zeigt, daß es zur vollſtändigen Beſtimm
der Function $y = fx$ nicht genügt, wenn ihre Ableitung $y' = f'x$ oder
Differenzial $y'dx = f'x \cdot dx$ gegeben iſt, ſondern es muß außerdem
explicite oder implicite der einem beſtimmten Werthe der unabhängigen Ve
derlichen entſprechende Werth der Function $y = fx$ gegeben ſein, was
mit dem bereits angeführten Principe übereinſtimmt (§. 31 und 39).

Hieraus folgt: 1) daß, wenn man durch irgend ein Mittel eine Funct
fx finden kann, welche die Eigenſchaft hat, daß $f'x$ ihre Ableitung iſt,
beliebige Werthe x_0, x der Grenzen der Werth des Integrales:

$$\int_{x_0}^{x} f'x\,dx = fx - fx_0;$$

Nimmt man nun n unendlich groß an, ſo gehen dieſe Differenzen reſp. in
Differenziale dx, dy über, woraus die Richtigkeit des Geſagten erhellet.
Z. d. Ueberſ.

*) Leibnitz wandte immer den Ausdruck Summe an, wovon das Zei
$\int$, wie geſagt, die Abkürzung iſt, wogegen der Ausdruck Integral
Bernoulli eingeführt iſt.

Dieſe Bezeichnungsart $\int_{x_0}^{x}$ rührt von Fourier her, und beſteht, wie
ſieht, darin, die Werthe der unabhängigen Veränderlichen, zwiſchen wel
die Summation oder Integration geſchehen ſoll, unten und oben an
Integralzeichen zu ſetzen.

, und 2) daß

$$fx + C,$$

C eine willkührliche Conſtante bezeichnet, der allgemeine Ausdruck der Funcnen iſt, welche $f'x$ zur Ableitung haben. Man bezeichnet daher die Operam, vermöge welcher man von der Ableitung $f'x$ zu dem allgemeinen Ausucke der Functionen übergeht, wovon ſie die Ableitung iſt, oder von dem ifferenziale $f'x \cdot dx$ zu dem allgemeinen Ausdrucke der Functionen, wovon ſelbe das Differenzial iſt, mit dem Namen der unbeſtimmten Integraon und bedient ſich zur Andeutung dieſer Operation des Zeichens $\int$ ohne gabe der Grenzen. Man ſetzt alſo:

$$\int f'x\,dx = fx + C,$$

r vielmehr:

$$\int f'x\,dx = fx + \text{const.},$$

d ſagt, daß der Ausdruck:

$$fx + \text{const.}$$

s unbeſtimmte Integral des Differenziales $f'x\,dx$ iſt.

Dagegen nennt man beſtimmte Integrale diejenigen, welche zwiſchen gebenen Grenzen genommen ſind und keine willkührliche Conſtante mehr bei führen.

§. 53. Die Integralrechnung, welche man als das Umgekehrte der ifferenzialrechnung betrachten kann, hat die Beſtimmung der unbeſtimmten und ſtimmten Integrale zum Zwecke, und mit dem Namen Infiniteſimalrechnung bezeichnet man die Differenzial- und Integralrechnung zuſammen genommen.

Die Infiniteſimalrechnung, in ſo fern ſie vermittelſt einer eigenthümlichen prache und eines beſonderen Algorithmus die zwiſchen den Functionen und ren verſchiedenen Ableitungen ſtatt findenden Relationen nachzuweiſen hat, hält das Wichtigſte von der Theorie der Functionen und fällt bei dem gewärtigen Zuſtande der Wiſſenſchaft gewiſſermaßen damit zuſammen; allein an muß in rationeller Hinſicht durchaus den Calcul, welcher nur ein Inſtrument iſt, von der Theorie unterſcheiden, worauf er angewandt wird.

Auch darf man nicht die Infiniteſimalmethode, welche man ſchon vor eibnitz angewandt hatte, und noch jetzt in den Elementen der Geometrie und r Statik anwendet, mit dem von Leibnitz erfundenen Differenzialalgorithmus gen der Anwendungen der Infiniteſimalmethode auf die Theorie der Funcnen identificiren.

Der Gebrauch lehrt, daß dieſer Algorithmus, ungeachtet ſeiner allgemeien Vorzüge, dennoch einigen von der Schreibart herrührenden Unvollkommenheiten unterliegt, welche im Grunde nicht von der Infiniteſimalmethode rühren. In gewiſſen Fällen iſt der Lagrange'ſche Algorithmus bequemer, nd alsdann tragen die Analyſten kein Bedenken, denſelben anzuwenden, obgleich ſie ſich gewöhnlicher der Leibnitz'ſchen Bezeichnung bedienen.

§. 54. In allem Vorhergehenden haben wir vorausgeſetzt, daß die Funcion keine Unterbrechung der Stetigkeit erfährt, welche davon herrührt, daß ſie ſelbſt, oder ihre Ableitungen der verſchiedenen Ordnungen durch das Unendliche hen, oder plötzlich von einem endlichen zu einem anderen endlichen Werthe bergehen. Denn wenn man ſagt, eine Function y erfahre eine Stetigkeitsunterbrechung der erſten Ordnung, ſo heißt dieſes ſo viel, daß einer unendlich kleinen Veränderung dx der unabhängigen Veränderlichen eine endliche oder

$$y - y_0 = \int_{x_0}^{x} f'x\,dx$$

keinen Sinn mehr, wenn das Differenzial dx für Werthe von x, die zwischen den Grenzen des Integrales liegen, durch das Unendliche geht, was bei dem eben Gesagten nicht blos vorausſetzt, daß $f'x$ unendlich wird, ſondern auch, daß das Product $f'x \cdot dx$ einen unendlichen Werth behält. Wenn nun fx eine Function bezeichnet, deren Ableitung $f'x$ iſt, ſo daß man das beſtimmte Integral hat:

$$\int f'x\,dx = fx + C;$$

ergibt ſich daraus:

$$y - y_0 = fx - fx_0$$

die Gleichung einer Curve, deren abgeleitete Curve $y' = f'x$ iſt, und welche überdem durch den Punkt (x_0, y_0) gehen muß, aber deren Ordinate y für alle der Abſciſſe zwiſchen x_0 und x durch das Unendliche geht. Der Ausdruck $fx - fx_0$ drückt wieder die Differenz der Ordinaten y, y_0, aber nicht mehr die Summe der Werthe des Differenziales $dy = f'x \cdot dx$ zwiſchen den Werthen x_0, x der unabhängigen Veränderlichen aus. Wir werden ſpäter Beiſpiele dieſes bereits in §. 35 unter einer anderen Form dargeſtellten Ausnahmfalles, welcher hier blos in Erinnerung gebracht zu werden braucht, vorkommen.

§. 55. Aus demſelben Grunde wollen wir hier blos die Formen, welche die im vorhergehenden Kapitel bewieſenen allgemeinen Lehrſätze annehmen, wenn darauf die Methode und die Bezeichnungen der Infiniteſimalrechnung angewandt werden, kurz andeuten.

1) Wenn man ſetzt:

$$y = u + v + w + \text{etc.}$$

wo u, v, w, etc., Functionen derſelben unabhängigen Veränderlichen x bezeichnen, ſo hat man offenbar, indem man zu den Differenzialen übergeht:

$$dy = du + dv + dw + \text{etc.}$$

Das Differenzial einer Summe von Functionen iſt alſo die Summe ihrer Differenziale, wo das Wort Summe in ſeiner algebraiſchen Bedeutung genommen werden muß. Hieraus ergibt ſich ferner die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \text{etc.}$$

welche der Ausdruck des in §. 39 über die abgeleiteten Functionen bewieſenen Lehrſatzes iſt.

Umgekehrt hat man:

$$\int_{x_0}^{x} y\,dx = \int_{x_0}^{x} u\,dx + \int_{x_0}^{x} v\,dx + \int_{x_0}^{x} w\,dx + \text{etc.}$$

d. h. das beſtimmte Integral einer Summe von Functionen iſt die Summe ihrer zwiſchen denſelben Grenzen genommenen Integrale.

Dieſelbe Identität findet zwiſchen den unbeſtimmten Integralen ſtatt, ſo daß:

$$\int y\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx + \int w\,dx + \text{etc.} \qquad (4)$$

und um dieſe letzte Formel zu integriren, wollen wir annehmen, daß man habe:

$$\int v\,dx = Fx + C,\ \int u\,dx = fx + c,\ \int v\,dx = f_1 x + c_1,$$

$$\int w\,dx = f_2 x + c_2,\ \text{etc.}$$

gefunden habe, wo C, c, c_1, c_2, ... die willkührlichen Constanten bezeichnen; so muß man nach der Formel (4) die Constante C so bestimmen können, daß für beliebige Werthe der Constanten c, c_1, c_2, etc. die Identität statt findet:

$$Fx + C = fx + c + f_1 x + c_1 + f_2 x + c_2 + \text{etc.}$$

2) Das Differenzial des Productes zweier Functionen ist gleich der Summe der Producte, welche man erhält, wenn man jede der beiden Functionen durch das Differenzial der anderen multiplicirt. Denn man hat:

$$d \cdot uv = (u + du)(v + dv) - uv,$$

woraus folgt, wenn man entwickelt und die unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung $du \cdot dv$ gegen die unendlich kleinen Größen der ersten Ordnung hinwegläßt:

$$d \cdot uv = v\,du + u\,dv. \qquad (5)$$

Wenn man zu den Differenzialcoefficienten übergeht, so kommmt:

$$\frac{d \cdot uv}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx},$$

welches der Ausdruck eines andern in der Gleichung (b) des angeführten enthaltenen Lehrsatzes über die abgeleiteten Functionen ist.

Wenn man die Gleichung (5) auf die Form:

$$\frac{d \cdot uv}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$$

bringt, so ergibt sich daraus leicht:

$$\frac{d \cdot uvw \ldots\ldots}{uvw \ldots\ldots} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \text{etc.} \qquad (6$$

Wenn a eine constante Zahl a ist, so wird $du = 0$, und man hat b

$$d \cdot av = a\,dv,$$

und umgekehrt hat man:

$$\int_{x_1}^{x} av\,dx = a\int_{x_1}^{x} v\,dx,\ \int av\,dx = a\int v\,dx,$$

wo diese letzte Gleichung wie die Gleichung (4) interpretirt wird.

Es sei:

$$u = \varphi x,\ v = \psi x,\ \text{also}\ uv = \varphi x \cdot \psi x = fx;$$

so nimmt die Gleichung (5) folgende Form an:

$$fx\,dx = \psi x \cdot \varphi' x\,dx + \varphi x \cdot \psi' x\,dx,$$

woraus folgt:

$$\varphi x \cdot \psi' x\,dx = fx\,dx - \psi x \cdot \varphi' x\,dx, \qquad (7)$$

und wenn man integrirt:

$$\int_{x_1}^{x} \varphi x \cdot \psi' x\,dx = fx - fx_1 - \int_{x_1}^{x} \psi x \cdot \varphi' x\,dx,$$

oder vielmehr

$$\int_{x_1}^{x} \varphi x \cdot \psi' x\,dx = \varphi x \cdot \psi x - \varphi x_1 \cdot \psi x_1 - \int_{x_1}^{x} \psi x \cdot \varphi' x\,dx. \quad ($$

Auf diese Weise ist die Integration der Function $\varphi x \cdot \psi' x\,dx$ auf die Function $\psi x\,dx$ zurückgeführt (welches die Function ψ gibt), und auf

ntegration der Function $\psi x \cdot \varphi' x\,dx$, wo ſich ſowohl die eine, als die dere dieſer Integrationen in vielen Fällen einfacher verrichten läßt, als die egebenen Function. Dieſes Verfahren, wovon man, wie wir ſpäter ſehen n, in der Integralrechnung häufig Gebrauch macht, iſt unter den Namen artiellen Integration bekannt.

Wenn man von den beiden Theilen der Gleichung (7) die unbeſtimmten ale nimmt, ſo erhält man:

$$\int \varphi x \cdot \psi' x\,dx = fx - \int \psi x \cdot \varphi' x\,dx,$$

er:

$$\int \varphi x \cdot \psi' x\,dx = \varphi x \cdot \psi x - \int \psi x \cdot \varphi' x\,dx. \qquad (9)$$

ine willkührliche Conſtante braucht zu dem Integrale des Gliedes $f' x\,dx$ t hinzugefügt zu werden, weil dieſelbe mit der willkührlichen Conſtante über- timmt, welche das unbeſtimmte Integral $\int \psi x \cdot \varphi' x\,dx$ nothwendig bei ch haben muß. Auf dieſe Weiſe wird jeder Theil der Gleichung (9) als mit ner willkührlichen Conſtante verſehen betrachtet, ſo daß man den Werth der nen Conſtanten immer ſo annehmen kann, daß die Identität ſtatt findet, was r einen Zahlenwerth man der anderen Conſtanten auch beigelegt haben mag, ie dieſes in Beziehung auf die Formel (4) näher gezeigt iſt.

3) Es ſei:

$$uv = r, \text{ oder } v = \frac{r}{u}$$

o erhält man durch die Gleichung (5):

$$dv = \frac{d \cdot uv - v\,du}{u}, \text{ oder } d \cdot \frac{r}{u} = \frac{u\,dr - r\,du}{u^2} \qquad (10)$$

ür $r = 1$ hat man:

$$d \cdot \frac{1}{u} = -\frac{du}{u^2}. \qquad (11)$$

§. 56. In dem Vorhergehenden haben wir y als eine unmittelbare Func- ion der unabhängigen Veränderlichen x betrachtet; aber wenn x ſelbſt eine unction der Veränderlichen t wäre und man zugleich:

$$y = fx, \quad x = \varphi t$$

ätte, ſo wäre das Differenzial dx nicht mehr conſtant und würde durch die leichung:

$$dx = \varphi' t \cdot dt$$

egeben, woraus folgte:

$$dy = f' x \cdot \varphi' t \cdot dt,$$

der wenn man zu den Differenzialcoefficienten übergeht:

$$\frac{dy}{dt} = f' x \cdot \varphi' t = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Dieſe Gleichung iſt der Ausdruck der Regel für die Bildung der Ableitun- en mittelbarer Functionen, welche bereits in §. 40 aufgeſtellt iſt, und es iſt mit keiner Schwierigkeit verbunden, ſie zu verallgemeinern.

§. 57. Wenn man die beiden Theile der Gleichung:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

differenzirt, indem man die Veränderliche x nicht mehr als die unabhängige Veränderliche und folglich ihre Veränderung nicht als gleichförmig oder dx nicht als eine conſtante Größe betrachtet; ſo hat man vermöge der Formel (10), wenn man $r = dy$, $u = dx$ ſetzt:

$$dy' = \frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^2}$$

und ebenſo:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^3}$$

Wenn x und y als Functionen der unabhängigen Veränderlichen t durch die Gleichungen von der Form:

$$x = \varphi t, \quad y = \psi t$$

gegeben ſind, ſo ergibt ſich daraus:

$$dx = \varphi' t\,dt, \quad dy = \psi' t\,dt,$$
$$d^2x = \varphi'' t\,dt^2, \quad d^2y = \psi'' t\,dt^2,$$

und wenn man dieſe Werthe in die Formel (12) ſubſtituirt hat, ſo fällt das als gemeinſchaftlicher Factor der beiden Glieder des Verhältniſſes hinaus und man kommt wieder auf die Gleichung (d) in §. 41.

Durch ähnliche Rechnungen fände man die Formeln wieder, durch welche die höhern Differenzen $y''', y^{IV}, \ldots\ldots$ als Functionen der Differenziale: $d^2y, d^3y, d^4y, \ldots\ldots; dx, d^2x, d^3x, d^4x \ldots\ldots$, ausgedrückt werden, wenn man das Differenzial dx nicht mehr als conſtant betrachtet; aber um dieſe Rechnungen bequem verrichten zu können, muß man ſich mit der Anwendung der Regeln der Differenzialrechnung auf algebraiſche Functionen mehr vertraut machen, und es ſoll daher das folgende Kapitel dieſem Gegenſtande gewidmet werden.

Will man wieder zu dem Falle zurückkehren, wo x als unabhängige Veränderliche betrachtet wird, ſo ſetzt man in der Gleichung (12), $d^2x = 0$, und man kommt wieder auf die Formel:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2},$$

wie es ſein muß. Wenn man dagegen y zur unabhängigen Veränderlichen nehmen will, ſo ſetzt man $d^2y = 0$, und man erhält die Formel:

$$y'' = -\frac{d^2x}{dy^2} : \left(\frac{dy}{dx}\right)^3,$$

welche mit der Formel (e) des weiter oben angeführten § identiſch iſt.

Zweites Buch.

Differenzirung der entwickelten Functionen mit einer einzigen veränderlichen Größe.

Erſtes Kapitel.

Differenzirung der algebraiſchen und transcendenten Functionen.

§. 58. In den beiden vorhergehenden Kapiteln haben wir die allgemeinen ...cipien der Ableitung oder der Differenzirung durchgenommen, welche Prin... auf beliebige Functionen anwendbar und von den beſonderen Verfahrungs... unabhängig ſind, durch welche man in den einzelnen Fällen die Ableitun... oder die Differenziale einer gegebenen Function erhalten kann. Dieſe ...cipien finden ſtatt, wenn man auch die Zahlenwerthe der abgeleiteten ...tionen oder Differenzialcoefficienten nur näherungsweiſe und für einzelne ...he der unabhängigen Veränderlichen angeben kann (§. 44), wie dieſes in ...ehung auf die empiriſchen Functionen der Fall iſt, welche nur durch eine ...el gegeben ſind, oder wenn man in einer einzigen mathematiſchen Formel ...genauen Werthe der Differenzialcoefficienten für beliebige Werthe der un...ängigen Veränderlichen zuſammenfaſſen kann, wie dieſes bei den bekannten ...braiſchen und transcendenten Functionen der Fall iſt. *)

---

*) Es wird nicht unzweckmäßig ſein, wenn wir dieſe Principien hier theils auf eine andere Weiſe abzuleiten und theils zu vervollſtändigen ſuchen.

Wenn $y = u \cdot v$ iſt, wo u und v zwei Functionen von x ſind, ſo iſt:

$$\Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv = uv + v\Delta u + (u+\Delta u)\Delta v - uv = v \cdot \Delta u + (u+\Delta u)\,\Delta v,$$

alſo:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + (u+\Delta u) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x};$$

folglich, wenn man zu den Grenzen übergeht:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot u = u' \cdot v + v' \cdot u.$$

Oder, Wenn $y = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ iſt, ſo iſt:

$$\Delta y = \varphi(x+\Delta x) \cdot \psi(x+\Delta x) - \varphi(x)\,\psi(x) = [\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)]\,\psi(x+\Delta x) + [\psi(x+\Delta x) - \psi(x)]\,\varphi(x),$$

folglich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \cdot \psi(x+\Delta x) + \frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} \cdot \varphi(x),$$

und wenn man zu den Grenzen übergeht:

$$dy' = \frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^2}$$

und folglich:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^3}$$

Wenn x und y als Functionen der unabhängigen Veränderlichen t durch Gleichungen von der Form:

$$x = \varphi t,\quad y = \psi t$$

gegeben ſind, ſo ergibt ſich daraus:

$$dx = \psi' t\,dt,\quad dy = \psi' t\,dt,$$
$$d^2x = \varphi'' t\,dt^2,\quad d^2y = \psi'' t\,dt^2,$$

und wenn man dieſe Werthe in die Formel (12) ſubſtituirt hat, ſo fällt dt^2 als gemeinſchaftlicher Factor der beiden Glieder des Verhältniſſes hinaus und man kommt wieder auf die Gleichung (d) in §. 41.

Durch ähnliche Rechnungen fände man die Formeln wieder, durch welche die höhern Ableitungen y''', y^{IV}, ... als Functionen der Differenziale: d^2y, d^3y, d^4y, ...; dx, d^2x, d^3x, d^4x ....., ausgedrückt werden, wenn man das Differenzial dx nicht mehr als conſtant betrachtet; aber um dieſe Rechnungen bequem verrichten zu können, muß man ſich mit der Anwendung der Regeln der Differenzialrechnung auf algebraiſche Functionen wohl vertraut machen, und es ſoll daher das folgende Kapitel dieſem Gegenſtande gewidmet werden.

Will man wieder zu dem Falle zurückkehren, wo x als unabhängige veränderliche Größe betrachtet wird, ſo ſetzt man in der Gleichung (12), $d^2x =$ und man kommt wieder auf die Formel:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2},$$

wie es ſein muß. Wenn man dagegen y zur unabhängigen Veränderlichen nehmen will, ſo ſetzt man $d^2y = 0$, und man erhält die Formel:

$$y'' = -\frac{d^2x}{dy^2} : \left(\frac{dy}{dx}\right)^3,$$

welche mit der Formel (e) des weiter oben angeführten § identiſch iſt.

Zweites Buch.

Differenzirung der entwickelten Functionen mit einer einzigen veränderlichen Größe.

Erſtes Kapitel.

Differenzirung der algebraiſchen und transcendenten Functionen.

§. 58. In den beiden vorhergehenden Kapiteln haben wir die allgemeinen Principien der Ableitung oder der Differenzirung durchgenommen, welche Principien auf beliebige Functionen anwendbar und von den beſonderen Verfahrungsarten unabhängig ſind, durch welche man in den einzelnen Fällen die Ableitungen oder die Differenziale einer gegebenen Function erhalten kann. Dieſe Principien finden ſtatt, wenn man auch die Zahlenwerthe der abgeleiteten Functionen oder Differenzialcoefficienten nur näherungsweiſe und für einzelne Werthe der unabhängigen Veränderlichen angeben kann (§. 44), wie dieſes in Beziehung auf die empiriſchen Functionen der Fall iſt, welche nur durch eine Tafel gegeben ſind, oder wenn man in einer einzigen mathematiſchen Formel die genauen Werthe der Differenzialcoefficienten für beliebige Werthe der unabhängigen Veränderlichen zuſammenfaſſen kann, wie dieſes bei den bekannten algebraiſchen und transcendenten Functionen der Fall iſt. *)

*) Es wird nicht unzweckmäßig ſein, wenn wir dieſe Principien hier theils auf eine andere Weiſe abzuleiten und theils zu vervollſtändigen ſuchen.

Wenn $y = u \cdot v$ iſt, wo u und v zwei Functionen von x ſind, ſo iſt:

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = uv + v\Delta u + (u + \Delta u)\Delta v - uv$$
$$= v \cdot \Delta u + (u + \Delta u)\Delta v,$$

alſo:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + (u + \Delta u) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x};$$

folglich, wenn man zu den Grenzen übergeht:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot u = u' \cdot v + v' \cdot u.$$

Oder, Wenn $y = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ iſt, ſo iſt:

$$\Delta y = \varphi(x+\Delta x) \cdot \psi(x+\Delta x) - \varphi(x)\,\psi(x)$$
$$= [\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)]\,\psi(x+\Delta x) + [\psi(x+\Delta x) - \psi(x)]\,\varphi(x),$$

folglich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \cdot \psi(x+\Delta x) + \frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} \cdot \varphi(x),$$

und wenn man zu den Grenzen übergeht:

Vermöge der eben erwähnten allgemeinen Principien (§. 55 u. fo
iſt das Problem der Differenzirung der algebraiſchen, logarithmiſchen, expo

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \cdot \psi(x) + \psi'(x) \cdot \varphi(x).$$

Wenn $y = \frac{u}{v}$ iſt, ſo iſt:

$$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv+v \cdot \Delta u - uv - u\Delta v}{v(v+\Delta v)} = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v+\Delta v)},$$

folglich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u}{v(v+\Delta v)} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} \cdot v - \frac{dv}{dx} \cdot u}{v^2} = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Oder, wenn $y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ iſt, ſo iſt:

$$\Delta y = \frac{\varphi(x+\Delta x)}{\psi(x+\Delta x)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\psi(x)\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)\psi(x+\Delta x)}{\psi(x)\,\psi(x+\Delta x)}$$
$$= \frac{\psi(x)[\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)] - \varphi(x)[\psi(x+\Delta x) - \psi(x)]}{\psi(x) \cdot \psi(x+\Delta x)},$$

folglich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\psi(x) \cdot \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} - \varphi(x) \cdot \frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{\Delta x}}{\psi(x)\,\psi(x+\Delta x)}$$

und:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi(x)\,\varphi'(x) - \psi'(x)}{[\psi(x)]^2}.$$

Wenn man die für die Ableitungen einer Summe, oder Differenz, e
Productes oder Quotienten zweier Functionen von x erhaltenen Reſul
näher betrachtet, ſo ſieht man, daß man die Ableitung einer ſolchen zuſ
mengeſetzten Function erhält, wenn man ſucceſſive jede der einzelnen Fu
tionen, woraus die zuſammengeſetzte beſteht, differenzirt, indem man die
dere Function als eine Conſtante betrachtet und die erhaltenen partiellen
ſultate in eine Summe bringt.

Dieſe Regel läßt ſich in der That auf folgende Weiſe allgemein darſt
Es ſei:

$$y = f(v, w),$$

wo v, w zwei Functionen von x ſind, ſo hat man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(v+\Delta v, w+\Delta w) - f(v, w)}{\Delta x}$$
$$= \frac{f(v+\Delta v, w) - f(v, w)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{f(v+\Delta v, w+\Delta w) - f(v+\Delta v, w)}{\Delta w} \cdot$$

und folglich, wenn man zu den Grenzen übergeht:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}.$$

Wenn:

$$y = f(u, v, w, \ldots)$$

wäre, wo u, v, w, ... lauter Functionen von x ſind, ſo hätte man
gemein:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} + \ldots.$$

Folglich gilt die obige Regel allgemein, d. h. man erhält die Ableitung e
wie immer zuſammengeſetzten Function, wenn man ſie ſucceſſive in Bezieh
auf jede der einzelnen Functionen, woraus ſie beſteht, differenzirt und

und trigonometrischen Functionen auf die Differenzirung der drei folgen-
lementarfunctionen zurückgeführt:

$y = x^m$, wo der Exponent m einen beliebigen Werth hat.

$y = \log. x$, was zugleich das Differenzial der umgekehrten Function gibt (wo a die Basis des Logarithmensystemes bezeichnet), oder durch Vertauschung der Buchstaben, das Differenzial der Exponentialfunction $= a^x$.

3) $y = \sin. x$, woraus sich die Differenziale der übrigen trigonometrischen Functionen und der Kreisbogen ergeben, welche die umgekehrten Functionen derselben sind.

Wenn man diese Elementarfunctionen zu differenziren weiß, so gibt die Regel für die Differenzirung der mittelbaren Functionen die Differenziale beliebiger zusammengesetzter Functionen, welche sich durch die in der Algebra und Trigonometrie üblichen Zeichen entwickelt ausdrücken lassen.

§. 59. Betrachten wir zunächst die Function x^m. Wenn der Exponent eine ganze positive Zahl ist, so gibt die Gleichung (6) in §. 55, nachdem darin $u = v = w \ldots\ldots = x$ gesetzt hat:

$$\frac{d \cdot x^m}{x^m} = m \frac{dx}{x},$$

oder:

$$d \cdot x^m = mx^{m-1} dx. \text{*)} \qquad (a)$$

---

erhaltenen einzelnen Resultate summirt, wobei das in §. 40 bewiesene Princip in Anwendung gebracht wird, nämlich, daß man, wenn

$$y = f(v) \text{ und } v = \varphi(x)$$

ist, hat:

$$y' = f'(v) \cdot \varphi'(x).$$

Was vorhin von den Ableitungen gesagt ist, gilt offenbar auch von den Differenzialen.

Wenn ferner $y = f(x)$ die directe Function, $f'(x)$ ihre Ableitung, $x = \varphi(y)$ inverse Function $\varphi'(y)$ ihre Ableitung bezeichnet; so hat man:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}, \text{ folglich } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \text{ oder } \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Z. d. Uebers.

*) Wenn $y = x^n$ ist, wo n eine ganze positive Zahl bezeichnet, so hat man:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x)-x} = (x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2} \cdot x + (x+\Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \ldots + x^{n-1},$$

folglich:

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}, \text{ oder } dy = nx^{n-1} dx.$$

Wenn $y = x^{\frac{m}{n}}$, $y = x^{-m}$, $y = x^{-\frac{m}{n}}$ ist, so lassen sich diese Fälle leicht auf den ersten Fall zurückführen, wenn man $x^{\frac{1}{n}} = z$ setzt.

Der von dem Verfasser für die Differenzirung von $x^{\frac{p}{q}}$ befolgte Gang setzt als bewiesen, oder für sich klar voraus, daß, wenn für jeden Werth von x stets $f(x) = \varphi(x)$ ist, auch $f'(x) = \varphi'(x)$ sein muß. In der That, aus $f(x) = \varphi(x)$ folgt $f(x + \Delta x) = \varphi(x + \Delta x)$, $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$, $f'(x) + \mu = \varphi'(x) + \nu$, wo μ und ν zwei Größen bezeichnen, welche mit Δx zugleich verschwinden. Folglich ist $f'(x) = \varphi'(x)$.

Z. d. Uebers.

$$(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}},$$

convergirt, wenn die Zahl ε ohne Ende gegen Null convergirt.

Nun kann man aber die Zahl ε immer ohne Ende gegen Null con. ren laſſen, wenn man:

$$\varepsilon = \frac{1}{n}$$

ſetzt und für n eine immer größer werdende poſitive Zahl nimmt. Die B mialformel gibt alsdann:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdot$$

$$\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-\nu+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\nu}\cdot\frac{1}{n^\nu} + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots n}\cdot$$

oder:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) +$$

$$\ldots\ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\nu}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\right) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\nu(\nu+1)\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Alle Glieder dieſer Reihe von dem dritten an nehmen offenbar fortr rend ab, und wir behaupten ferner, daß man n und ν immer ſo groß an men kann, daß, wenn man die Reihe bei dem Gliede:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\nu}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\right)$$

abbricht, die Summe der vernachläſſigten Glieder kleiner werden kann, jede gegebene Größe; denn dieſe Summe iſt kleiner als:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\nu(\nu+1)} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(\nu+1)(\nu+2)} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\nu(\nu+1)\ldots\ldots}$$

und um ſo mehr kleiner als:

$$\frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{2^{\nu+1}} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}};$$

und folglich wieder um ſo mehr kleiner, als die Summe der ins Unend fortlaufenden Reihe:

$$\frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{2^{\nu+1}} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \text{etc.}$$

nämlich als:

$$\frac{1}{2^{\nu-1}},$$

welche für einen ſchicklichen Werth von ν kleiner werden kann, als jede g bene Größe.

Wird die Reihe (n) mit dem Gliede (ν) geſchloſſen und man nimmt n eine immer größer werdende Zahl, ſo convergirt der Werth dieſer R ohne Ende gegen den der Reihe:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots\ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\nu}\cdot$$

Grenze, gegen welche die Zahl (E) für immer kleiner werdende
on e convergirt, wird alſo durch dieſe letzte Reihe mit einer deſto
Annäherung ausgedrückt, je größer die Zahl ν angenommen wird,
größer die Anzahl der in Betracht gezogenen Glieder der Reihe iſt.
n alſo die in Rede ſtehende Grenze, wie gewöhnlich, mit e bezeich-
at man:

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}, \quad (e)$$

zweite Theil dieſer Gleichung, eine ins Unendliche fortlaufende und
er Regel in §. 26 convergente Reihe iſt. Uebrigens ſind alle Glieder
Reihe:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}$$

er, als die entſprechenden Glieder der Reihe:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \text{etc.},$$

e convergent iſt und die Einheit zur Summe hat. Folglich liegt der
h von e zwiſchen 2 und 3.

§. 62. Wenn man die Summe der 14 erſten Glieder der Reihe (e)
t, ſo findet man:

$$e = 2{,}71828\ 18284\ \ldots\ldots$$

Wenn man nur die 9 erſten Decimalſtellen des Werthes von e berechnet
ſo hätte man auf den Gedanken kommen können, daß die Zahl e durch
periodiſchen Decimalbruch ausgedrückt würde, und folglich einen commenſu-
Werth hätte. Allein dieſe Induction würde irrig ſein; denn wenn e einem
nſurabeln Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ gleich ſein könnte, ſo daß man hätte:

$$2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots\ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\nu} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\nu(\nu+1)} + \text{etc.},$$

, ν ganze Zahlen bezeichnen; ſo erhielte man, wenn man alle Glieder
das Product $1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\nu$ multiplicirte:

$$\cdot 3\ldots\ldots(\nu-1)\,\mu - [2^2\cdot 3\cdot 4\ldots\ldots\nu + 3\cdot 4\ldots\ldots\nu + 4\cdot 5\ldots\ldots\nu + \ldots\ldots + 1]$$
$$= \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} + \text{etc.}$$

Die Summe der Reihe, welche den zweiten Theil der vorhergehenden
ung bildet, müßte alſo eine ganze poſitive oder negative Zahl ſein, wäh-
ie poſitiv und kleiner als die Summe $\frac{1}{\nu}$ der Reihe:

$$\frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{(\nu+1)^2} + \frac{1}{(\nu+1)^3} + \text{etc.}$$

Auch läßt ſich, aber nicht ſo einfach, beweiſen, daß alle Potenzen der
e mit rationalen Exponenten irrational ſind, ſo daß e keine Wurzel einer
iſchen algebraiſchen Gleichung mit rationalen Coefficienten ſein kann.
Unter transcendenten Zahlen verſteht man diejenigen, welche nicht
in irgend einer algebraiſchen Gleichung mit rationalen Coefficienten ſein
, und man hat Grund zu glauben, daß die Zahl e, ſowie die Zahl π,
ſie in naher Verwandtſchaft ſteht, transcendente Zahlen ſind, obgleich

dieſer negative Character weder für die eine, noch für die andere n entſchiedene Weiſe dargethan iſt.

§. 63. Die Gleichung:

$$e = \text{Grenze von } (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

iſt nur unter der Bedingung bewieſen, daß die Zahl ε gegen Null con indem ſie eine Reihe poſitiver Werthe durchläuft; denn die Binomial worauf wir uns geſtützt haben, wird in den Elementen, obgleich ſie, w in der Folge ſehen wird, für beliebige Werthe des Exponenten n ſta gewöhnlich nur für ganze poſitive Werthe von n bewieſen. Um ſich Beſchränkung zu überheben, kann man ſetzen:

$$1+\varepsilon = \frac{1}{1+\varepsilon'},$$

ſo daß ε' mit ε zugleich verſchwindet und negativen Werthen von ε Werthe von ε' entſprechen. Hieraus ergibt ſich:

$$(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = (1+\varepsilon')^{\frac{1}{\varepsilon'}}(1+\varepsilon'),$$

und folglich:

$$\text{Grenze von } (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \text{Grenze von } (1+\varepsilon')^{\frac{1}{\varepsilon'}} = e,$$

ſo daß die Grenze dieſelbe bleibt, was für ein Zeichen ε auch haben

§. 64. Für jedes Zeichen von $\frac{dx}{x}$ hat man alſo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\log. e, \text{ oder } dy = \frac{dx}{x}\cdot\log. e,$$

wo y den Logarithmus von x für eine beliebige Grundzahl bezeichnet Logarithmus von e ſich auf dieſelbe Grundzahl als der von x bezieht.

Wenn man alſo die transcendente Zahl e zur Grundzahl der Loga nähme, ſo hätte man blos:

$$dy = \frac{dx}{x}.$$

Die Logarithmen, deren Grundzahl e iſt, werden natürliche, boliſche, oder auch wohl nach dem Namen des Erfinders Neper de rithmen, neperſche Logarithmen genannt.

Aber unmittelbar nach Neper's Entdeckung im Jahre 1614 ſahe B Profeſſor der Mathematik zu Oxford, den Vortheil ein, welchen es numeriſchen Rechnungen gewähren würde, wenn man nicht, wie Nep Zahl e, ſondern die Grundzahl 10 unſeres decadiſchen Zahlenſyſtem Grundzahl der Logarithmen nähme, und er berechnete Logarithmenta dieſe Grundzahl. Allein in den höheren Zweigen der Mathematik deu Zeichen log. immer natürliche oder neper'ſche Logarithmen an, wofern n Gegentheil ausdrücklich bemerkt iſt, welchem Gebrauche auch wir uns ßen werden.

Uebrigens iſt einleuchtend, daß man von den für eine gewiſſe Grundzahl neten Logarithmen zu den für eine andere Grundzahl berechneten üb kann, wenn man die erſten durch einen conſtanten Factor multiplicirt wollen allgemein durch $\log._a$ die Logarithmen aus dem Syſteme von der zahl a bezeichnen und es ſei:

$$y = \log._a x,\ Y = \log._b x,$$

hat man umgekehrt:

$$x = a^y,\ x = b^Y,\ a^y = b^Y,$$

aus folgt, wenn man nun die Logarithmen aus einem beliebigen Syſteme nimmt:

$$y \log. a = Y \log. b,$$

oder:

$$\log._b x = \log._a x \cdot \frac{\log. a}{\log. b}.$$

Wenn y den neper'ſchen und Y den gewöhnlichen oder brigg'ſchen Logarithmus der Zahl x bezeichnet, ſo hat man:

$$Y = y \log. e,$$

wo der Logarithmus von e aus dem gewöhnlichen Logarithmenſyſteme von der Grundzahl 10 genommen iſt. Die Zahl, durch welche man die neper'ſchen Logarithmen multipliciren muß, um die entſprechenden gewöhnlichen Logarithmen zu erhalten, wird der Modulus genannt, und wir werden ſpäter ſehen, wie man den Werth desſelben bequem berechnen kann.

§. 65. Da die Gleichung:

$$y = \log._a x,$$

welche gleichbedeutend iſt mit:

$$x = a^y,$$

gibt:

$$dy = \frac{dx}{x} \log._a e,$$

ſo hat man umgekehrt:

$$dx = x\,dy \cdot \frac{1}{\log._a e}$$

oder:

$$d \cdot a^y = \frac{1}{\log._a e} \cdot a^y\,dy,$$

oder endlich, wenn man x für y ſetzt, weil die unabhängige Veränderliche mit x bezeichnet zu werden pflegt:

$$d \cdot a^x = \frac{1}{\log._a e} \cdot a^x\,dx.$$

Außerdem hat man:

$$\log._a e = \frac{\log. e}{\log. a},$$

wo die im zweiten Theile dieſer Gleichung vorkommenden Logarithmen aus einem beliebigen Syſteme, z. B. aus dem gewöhnlichen, genommen ſind; folglich iſt:

$$d \cdot a^x = \frac{\log. a}{\log. e} \cdot a^x\,dx, \text{ *)}$$

---

*) Dieſes Reſultat kann man nach dem Vorhergehenden auch leicht direct erhalten; denn wenn $y = a^x$ iſt, ſo iſt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Setzt man nun $a^{\Delta x} - 1 = \varepsilon$, ſo iſt $a^{\Delta x} = 1 + \varepsilon$ und $\Delta x = \log._a (1+\varepsilon)$; folglich:

also:

$$d \cdot e^x = e^x dx,$$

oder auch:

$$\frac{d \cdot e^x}{dx} = e^x.$$

Der Differenzialcoeffizient der ersten Ordnung der Function $y = e^x$ folglich die Differenzialcoefficienten oder abgeleiteten Functionen aller Ord gen sind also mit der ursprünglichen Function identisch. Diese characteri und äußerst merkwürdige Eigenschaft gibt schon zum Voraus den Grund weßhalb die Exponentialfunction e^x und die Zahl e selbst in der Theorie Functionen eine so wichtige Rolle spielt. Wir wollen der Kürze wegen:

$$V = \frac{\log. a}{\log. e}, \text{ und } y = a^x$$

setzen, so kommt:

$$\frac{dy}{dx} = Vy,$$

oder nach der Newton'schen Bezeichnung (§. 42):

$$\frac{\dot{Y}}{\dot{x}} = Vy,$$

und außerdem weiß man, daß für $x = 0$ die Fluente $y = 1$ ist.

Wenn man sich also zwei Punkte ξ, η (Fig. 28) denkt, wovon sich d erste auf der geraden Linie OX mit einer constanten Geschwindigkeit, s Fluxion und der zweite auf der geraden Linie O'Y mit einer seiner Entfern von dem festen Punkte O' proportionalen Geschwindigkeit bewegt, so daß er A oder um die Längeneinheit vom Punkte O' entfernt ist, wenn sich der Pu ξ in O befindet, und wenn man endlich annimmt, daß die constante Geschw digkeit des Punktes ξ, zur Einheit genommen, und daß die veränderliche G

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{\varepsilon}{\log.a\,(1+\varepsilon)} = \frac{a^x}{\frac{\log.a\,(1+\varepsilon)}{\varepsilon}},$$

und:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log._a e} \cdot a^x = \log._e a \cdot a^x = \frac{\log. a}{\log. e} \cdot a^x,$$

weil aus $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$ folgt:

$$\frac{\log.a\,(1+\varepsilon)}{\varepsilon} = \log._a e = \frac{1}{\log._e a} = \frac{\log. e}{\log. a}.$$

Uebrigens kann man die Grenze von $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ leicht unmittelbar und oh Anwendung von Reihenentwickelungen erhalten, wenn man bemerkt, daß f jeden Werth von a, b, Δx ist:

$$a^{\Delta x} = b^{\frac{\log. a}{\log. b} \cdot \Delta x}.$$

Wenn $y = f(x) = a^x$ ist, so ist auch $f'(x) = \log._e a \cdot a^x$ u $\varphi(y) = \log._a y$, folglich:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\log._e a \cdot a^x} = \frac{1}{\log._e a} \cdot \frac{1}{y}.$$

Z. d. Ueberf.

windigkeit des Punktes $\eta = V$ iſt, wenn derſelbe durch den Punkt A geht; ſtellen die veränderlichen Entfernungen $O\xi$, $O'\eta$, in jedem Augenblicke die erthe der Veränderlichen x, y dar, oder mit andern Worten, die Fluente ξ iſt in dem Logarithmenſyſteme von der Grundzahl a der Logarithmus der ch die Fluente $O\eta$ dargeſtellten Zahl.

Wenn man die Geſchwindigkeit V der Einheit oder der conſtanten Geindigkeit des Punktes ξ gleich annimmt, welches die natürlichſte oder am igſten willkührliche Vorausſetzung iſt, welche man machen kann, ſo iſt $O\xi$ natürliche oder neper'ſche Logarithmus von $O'\eta$.

Gerade auf dieſe Weiſe hat ſich Neper die Entſtehung der Logarithmen dacht, und er hat ebenſo der Vorläufer Newton's bei der Erfindung der heorie der Fluxionen ſein müſſen, wie Kepler und Cavaleri als die Vorufer Leibnitz's in der Theorie der Infiniteſimalgrößen betrachtet werden nen.

Es iſt ſehr bemerkenswerth, daß Neper, dem gewöhnlichen Gange der rfinder entgegen, die logarithmiſche Function unmittelbar durch ihren weſentchen und hervorragenden Character definirt hat, ſtatt von ihren ſecundären genſchaften auszugehen, aus welchen man noch jetzt die Logarithmen in den lementen ableitet, und welche die Grundlage ihrer gewöhnlichen Anwendun-n bilden.

§. 66. Wir haben vorhin aus dem Differenziale der logarithmiſchen nction das der Exponentialfunction abgeleitet; es läßt ſich aber auch ganz nfach daraus das Differenzial der Function x^m ableiten, indem der Exponent einen beliebigen reellen, poſitiven, oder negativen, commenſurabeln, oder ommenſurabeln Werth hat. Denn aus:

$$y = x^m,$$

gt:

$$\log. y = m \log. x,$$

d wenn man differenzirt:

$$\frac{dy}{y} = m \frac{dx}{x};$$

glich:

$$dy = m \frac{y}{x} dx = mx^{m-1} dx. \qquad (a)$$

Aber alsdann ſetzt der Beweis dieſer letzten Formel den der Binomialrmel voraus, wenigſtens für den Fall eines ganzen poſitiven Exponenten, wogegen der zuerſt gegebene Beweis derſelben Bedingung nicht unterliegt und n Gegentheil zur Aufſtellung der Binomialformel dienen kann, wie man in er Folge ſehen wird.

Umgekehrt, wenn die Formel (a) bewieſen iſt, ſo ergibt ſich daraus die leitung der logarithmiſchen Function. Denn wenn φx die Function log. x d $\varphi' x$ ihre unbekannte Ableitung bezeichnet, ſo hat man:

$$\varphi(x^m) = m\varphi x,$$

d wenn man nach der Regel für die Differenzirung der mittelbaren Functio-n differenzirt, ſo erhält man:

$$\varphi'(x^m) \cdot \frac{d \cdot x^m}{dx} = m\varphi' x,$$

er vielmehr wegen der Gleichung (a):

$$x^m \varphi'(x^m) = x\varphi' x.$$

Dieſe letzte Gleichung kann nur in ſo fern für beliebige Werthe von x d m ſtattfinden, als $x\varphi' x$ ſich auf eine Conſtante reducirt, deren Werth man

erhält, wenn man in dem erſten Theile der Gleichung $m = \infty$ ſetzt. Wenn man alſo dieſe Conſtante $\varphi' (1)$ mit k bezeichnet, ſo kommt:

$$\varphi' x = \frac{k}{x}, \text{ oder } d \cdot \log. x = \frac{k\,dx}{x},$$

woraus ſich alle vorhin erhaltenen Reſultate wieder ableiten laſſen.

§. 67. Wir wollen nun zu den trigonometriſchen Functionen übergehen und zunächſt

$$y = \sin. x$$

ſetzen, ſo haben wir, wenn wir auf dieſe transcendente Function unmittelbar wieder den Begriff der Grenzen anwenden:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin.(x+\Delta x) - \sin. x}{\Delta x} = \frac{\sin. \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \cdot \cos. (x + \frac{1}{2}\Delta x).$$

Der Factor $\cos. (x + \frac{1}{2}\Delta x)$ convergirt gegen die Grenze $\cos. x$, wenn Δx gegen Null convergirt und der Factor:

$$\frac{\sin. \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

hat die Einheit zur Grenze, wenn Δx gegen Null convergirt. Denn aus der Identität:

$$\frac{\sin. \varepsilon}{\text{tang.}\varepsilon} = \cos. \varepsilon,$$

folgt, daß das Verhältniß des Sinus zur Tangente die Einheit zur Grenze hat, wenn der Bogen gegen Null convergirt, und außerdem iſt nach einem bekannten Principe der Geometrie die Länge eines Kreisbogens immer größer als die ſeines Sinus und kleiner, als die ſeiner Tangente.

Folglich hat um ſo mehr $\frac{\sin. \varepsilon}{\varepsilon}$ die Einheit zur Grenze. Folglich iſt:

$$\frac{dy}{dx} = \cos. x,$$

oder:

$$d \cdot \sin. x = \cos. x \cdot dx, \qquad (b)$$

Durch eine ganz ähnliche Rechnung fände man direct:

$$d \cdot \cos. x = -\sin. x \cdot dx. \qquad (c)$$

Wenn man übrigens:

$$\cos. x = \sin. z,$$

folglich:

$$z = \tfrac{1}{2}\pi - x$$

ſetzt, ſo erhält man:

$$d \cdot \cos. x = d \cdot \sin. z = \cos. z dz,$$

und da:

$$dz = -dx, \cos. z = \sin. x$$

iſt, ſo kommt man wieder auf die Gleichung (c).

Aus den Differenzialen des Sinus und Coſinus laſſen ſich nun leicht die der übrigen trigonometriſchen Functionen ableiten. So hat man z. B.:

$$d \cdot \text{tang. } x = d\left(\frac{\text{sin. } x}{\text{cos. } x}\right) = \frac{\text{cos. } x\, d \cdot \text{sin. } x - \text{sin. } x \cdot d \cdot \text{cos. } x}{\text{cos.}^2 x}$$

$$= \frac{(\text{cos.}^2 x + \text{sin.}^2 x)\, dx}{\text{cos.}^2 x} = \frac{dx}{\text{cos.}^2 x}, \quad *)$$

durch ähnliche Rechnungen findet man:

$$d \cdot \text{cot. } x = -\frac{dx}{\text{sin.}^2 x},$$

$$d \cdot \text{sec. } x = \frac{\text{sin. } x\, dx}{\text{cos.}^2 x}$$

$$d \text{ cosec. } x = -\frac{\text{cos. } x\, dx}{\text{sin.}^2 x}.$$

Aus $y = \text{sin. } x$ ergibt sich nach dem Vorhergehenden:

$$dy = \text{cos. } x dx = \sqrt{1-y^2} \cdot dx,$$

man hat daher umgekehrt:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

der:

$$d \cdot \text{arc sin. } y = \frac{dy}{\sqrt{1-x^2}},$$

der wenn man y mit x vertauscht, um die unabhängige Veränderliche immer mit x zu bezeichnen:

---

*) Wenn $y = \text{tang. } x$, so hat man auch:

$$\Delta y = \text{tang. } (x+\Delta) - \text{tang. } x = \frac{\text{tang. } x + \text{tang. } \Delta x}{1 - \text{tang. } x \cdot \text{tang. } \Delta x} - \text{tang. } x$$

$$= \frac{\text{tang. } \Delta x\, (1 + \text{tang.}^2 x)}{1 - \text{tang. } x \text{ tang. } \Delta x},$$

folglich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{tang. } \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1 + \text{tang.}^2 x}{1 - \text{tang. } x \text{ tang. } \Delta x},$$

und:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \text{tang.}^2 x = \text{sec. } x = \frac{1}{\text{cos.}^2 x},$$

oder:

$$dy = \frac{dx}{\text{cos.}^2 x}.$$

Oder wenn $y = \text{tang. } x = \frac{\text{sin. } x}{\text{cos. } x}$, ist, so ist:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\text{sin. } (x+\Delta x)}{\text{cos. } (x+\Delta x)} - \frac{\text{sin. } x}{\text{cos. } x}\right] = \frac{\text{sin. } \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\text{cos. } (x+\Delta x) \text{ cos. } x},$$

folglich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{cos.}^2 x}, \text{ oder } dy = \frac{dx}{\text{cos.}^2 x}.$$

Uebrigens erhält man alle diese Resultate unmittelbar durch Anwendung der oben mitgetheilten allgemeinen Regel für die Differenzirung der zusammengesetzten Functionen. J. d. Ueberf.

$$d \cdot \text{arc sin. } x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \text{ *)}$$

Auf dieſelbe Weiſe findet man:

$$d \cdot \text{arc cos. } x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$d \cdot \text{arc tang. } x = \frac{dx}{1 + x^2},$$

$$d \cdot \text{arc cot. } x = -\frac{dx}{1 + x^2}.$$

Zur Interpretation aller dieſer Formeln muß man ſich vorſtellen, d
der Halbmeſſer des Kreiſes zur Einheit genommen iſt, die Sinus und C
poſitive oder negative echte Brüche ſind, deren Zahlenwerth, alſo zwiſche
und der Einheit liegt. Was die Kreisbogen anlangt, ſo ſind dieſelben
wendig Zahlen, welche auf dieſelbe Maßeinheit bezogen werden, als d
nus, Coſinus, Tangenten ꝛc., weil ſonſt die Formeln nicht homogen
und die Relation:

$$\text{Grenze von } \frac{\text{sin. } \varepsilon}{\varepsilon} = 1$$

keinen Sinn hätte. Die Bogen müſſen alſo nicht durch die Anzahl ihrer
ſondern durch die Verhältniſſe ihrer Länge zu der Länge des zur Einh
nommenen Halbmeſſers gegeben ſein. Wenn ein Bogen in Sexageſimal
durch die Zahl X^0 ausgedrückt wäre, ſo erhielte man die Zahl x, we
die Formeln ſubſtituirt werden muß, durch die Proportion:

$$180^0 : X^0 = \pi : x,$$

wo π, wie gewöhnlich, die Länge des halben Kreisumfanges von dem
meſſer gleich 1 bezeichnet.

Wenn man die Sexageſimalſecunde zur Winkeleinheit nimmt, wie
bei genauen Rechnungen geſchieht, und der Bogen wird in Secunden
die Zahl X'' ausgedrückt, ſo wird die Zahl x durch die Proportion:

$$648000'' : X'' = \pi : x$$

beſtimmt, woraus folgt:

$$x = \frac{X''}{206264{,}81\ldots}$$

Oft muß man den Werth eines Kreisbogens in Graden kennen,
Länge der des Halbmeſſers des Kreiſes gleich iſt, und dieſer We
$= 57^0\ 17'\ 44'', 81 = 206264'', 81.$

---

*) Wenn $y = f(x) = \text{sin. } x$ iſt, ſo iſt $f'(x) = \text{cos. } x = \sqrt{1}$
$\varphi(y) = \text{arc. sin. } y$, und folglich nach der Formel:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ iſt } \varphi'(y) = \frac{1}{\text{cos. } x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Oder, wenn $x = \text{arc. sin. } y$ iſt, ſo iſt $y = \text{sin. } x$, $\text{cos. } x = \sqrt{}$

$$\Delta y = \text{sin. } (x + \Delta x) - \text{sin. } x = 2 \text{ sin. } \frac{\Delta x}{2} \cdot \text{cos. } \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right), \text{ f}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\frac{\Delta x}{2}}{\text{sin.}\frac{\Delta x}{2}} \cdot \frac{1}{\text{cos. } (x+\Delta x)}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{cos. } x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Aus den Gleichungen (b) und (c) folgt:

$$\frac{d^2 \cdot \sin. x}{dx^2} = -\sin. x, \quad \frac{d^2 \cdot \cos. x}{dx^2} = -\cos. x.$$

Die beiden Functionen $y = \sin. x$, $y = \cos. x$ haben alſo die ſehr merkwürdige gemeinſchaftliche Eigenſchaft, welche durch die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -y$$

ausgedrückt wird.

Hieraus ergibt ſich unmittelbar:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^{2i} \cdot \sin. x}{dx^{2i}} &= \pm \sin. x, & \frac{d^{2i} \cdot \cos. x}{dx^{2i}} &= \pm \cos. x, \\ \frac{d^{2i+1} \cdot \sin. x}{dx^{2i+1}} &= \pm \cos. x, & \frac{d^{2i+1} \cos. x}{dx^{2i+1}} &= \pm \sin. x, \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

wo die oberen oder unteren Zeichen genommen werden müſſen, je nachdem die ganze Zahl i gerade oder ungerade iſt.

§. 68. Aus den folgenden Beiſpielen ſieht man, welchen Weg man bei der Differenzirung zuſammengeſetzter Functionen einſchlagen muß.

Es ſei zu differenziren:

1) $$y = (ax^m + b)^n$$

ſo ſetze man:

$$ax^m + b = u,$$

folglich:

$$y = u^n, \quad dy = nu^{n-1}\, du, \quad du = max^{m-1}\, dx,$$

und alsdann hat man:

$$dy = mna\,(ax^m + b)^{n-1} x^{m-1}\, dx.$$

2) $$y = \log. \sin. x,$$

ſo ſetze man:

$$\sin. x = u,$$

ſo iſt:

$$y = \log. u, \quad dy = \frac{du}{u}, \quad du = \cos. x\, dx,$$

und endlich:

$$dy = \frac{dx}{\tang. x}.$$

3) $$y = \log. \{x + \sqrt{1 + x^2}\}.$$

Wenn man hierbei zwei Hülfsveränderliche:

$$u = x + \sqrt{1 + x^2}, \quad v = 1 + x^2,$$

anwendet, ſo erhält man:

$$dy = \frac{du}{u}, \quad du = dx + \frac{dv}{2\sqrt{v}}, \quad dv = 2\,x dx,$$

und nach verrichteten Reductionen:

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4) $$y = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos. x + r'^2}}.$$

Man ſetze:

$$u = r^2 - 2rr' \cos. x + r'^2,$$

ſo iſt:

$$y = \frac{1}{\sqrt{u}}, \quad dy = -\frac{du}{2u^{\frac{3}{2}}}, \quad du = 2r' \sin. x dx,$$

und folglich:

$$dy = -\frac{rr' \sin. x\, dx}{(r^2 - 2rr' \cos x + r'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad *)$$

Zweites Kapitel.

Vergleichung der logarithmiſchen, Exponential- und Kreistranscendenten. — Moivre'ſche Formel und Grundbegriffe über die Theorie der Winkelſchnitte.

I. Vergleicher der logarithmiſchen, Exponential- und Kreistranscendenten.

§. 69. In dem vorhergehenden Kapitel ſind die Regeln zur Differenziirung der Exponential-, logarithmiſchen und Kreisfunctionen angegeben, welches die einzigen transcendenten Functionen ſind, die man in der Elementarmathematik betrachtet; allein dieſer Gegenſtand muß in verſchiedenen Beziehungen gründlicher unterſucht werden, weil er den Rechnungen der höhern Analyſis zur Grundlage dient.

Im Vorhergehenden haben wir geſehen, daß Neper von einer mit der Differenzialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad (a)$$

gleichbedeutenden Relation ausging, um die Exponentialfunction:

$$y = e^x$$

oder, die logarithmiſche Function:

$$x = \log. y,$$

welche das Umgekehrte der erſten iſt, zu definiren. In der That drückt dieſe Differenzialgleichung in Verbindung mit der Bedingung, daß x für $y = 1$ verſchwindet, den weſentlichen Character beider transcendenten Functionen aus, indem ſie das ſehr einfache Geſetz beſtimmt, nach welchem ſich dieſe Functionen ſtetig ändern.

---

*) Die folgenden allgemeinen Formeln verdienen hier noch bemerkt zu werden:

Wenn $y = (f(x))^n$ iſt, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$.

Wenn $y = a^{f(x)}$ iſt, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = \log. a \cdot a^{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{\log. a}{\log. e} \cdot a^{f(x)} \cdot f'(x)$.

Wenn $y = \log. f(x)$, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = \log. e \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\log. e}{\log. a} \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Wenn $y = \sin. f(x)$, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = \cos. f(x) \cdot f'(x)$.

Wenn $y = \text{arc. sin.} f(x)$, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \cdot f'(x)$.

Z. d. Ueberſ.

Die Definitionen, welche man in den Elementen der Arithmetik und Algebra von den Logarithmen gibt, drücken nur secundäre Eigenschaften der logarithmischen Function aus und sind nur Folgerungen aus der ursprünglichen Definition.

Nach der Form der Gleichung (a) sieht man leicht ein, welche Rolle die Exponentialfunction in dem Ausdrucke einer Menge von Naturerscheinungen, und namentlich derjenigen spielen muß, welche sich unter dem generischen Namen der Phänomene der Absorption oder allmähliger Erlöschung zusammenfassen lassen. Wenn man sich z. B. einen bewegten Körper in einem widerstehenden Mittel denkt, durch dessen Wirkung er fortwährend einen Theil seiner Geschwindigkeit verliert; so ist der Widerstand des Mittels oder die Absorption der Geschwindigkeit in einem unendlich kleinen Zeittheilchen offenbar von der Geschwindigkeit des Körpers abhängig, indem derselbe mit dieser Geschwindigkeit zunimmt, verschwindet, wenn die Geschwindigkeit Null wird, sehr klein bleibt, wenn die Geschwindigkeit sehr klein ist, und folglich für sehr kleine Werthe der Geschwindigkeit nahezu der Geschwindigkeit des Körpers in jedem Augenblicke proportional ist (§. 5). Man hat also eine Gleichung von der Form:

$$\frac{dy}{dt} = -ky,$$

wo y die als sehr klein vorausgesetzte Geschwindigkeit, t die Zeit und k einen gewissen constanten Coefficienten bezeichnet. Diese Gleichung verwandelt sich aber in folgende:

$$\frac{dy}{dx} = y,$$

wenn man $x = -kt$ setzt, und den Werth von y in dem Augenblicke, wo $= 0$ oder $x = 0$ ist zur Einheit nimmt, und aus dieser letzten Gleichung folgt:

$$y = e^x = e^{-kt}, \text{ oder } t = -\frac{1}{k} \log. y.$$

Aehnliche Schlüsse ließen sich auf die allmählige Erlöschung des Lichtes und der Wärme in absorbirenden Mitteln, auf die Verluste der Wärme und Electricität in Folge der Ausstrahlung der Oberflächen, oder der Berührung eines umgebenden Mittels und auf alle ähnliche Erscheinungen anwenden.

§. 70. Nach der weiter oben (§. 51) angegebenen Bezeichnungsart der bestimmten Integrale, kann man setzen:

$$\log. y = \int_1^y \frac{dy}{y},$$

oder:

$$\log. x = \int_1^x \frac{dx}{x}.$$

Die logarithmische Function ist also nichts weiter, wie ein bestimmtes Integral, und wir haben sie nicht blos eine transcendente Function genannt, weil sie sich bis jetzt nicht hat algebraisch ausdrücken lassen, sondern weil sie, wie später bewiesen werden wird, weder explicite noch implicite durch einen algebraischen Ausdruck dargestellt werden kann. Dieser Betrachtung zufolge müssen wir die bestimmten Integrale in Zukunft als neue transcendente Functionen ansehen, so oft sie sich nicht algebraisch oder durch andere bereits bekannte transcendente Functionen ausdrücken lassen.

Die transcendente Zahl e iſt der Werth, welchen man der oberen Grenze des Integrales beilegen muß, damit der Werth deſſelben der Einheit gleich wird, oder mit andern Worten, e iſt eine Conſtante, welche implicite durch die transcendente Gleichung:

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = 1.$$

beſtimmt wird.

§. 71. Geſetzt, man ſuchte eine Function φx von ſolcher Beſchaffenheit, daß für alle Werthe von x und z die Gleichung ſtattfindet:

$$\varphi x + \varphi z = \varphi(xz). \qquad (b)$$

Setzt man in dieſer Gleichung $z = o$, ſo ergibt ſich daraus:

$$\varphi x + \varphi(o) = \varphi(o),$$

ſo daß, wenn $\varphi(o)$ irgend einen endlichen Werth hätte, φx für alle Werthe von x Null wäre. Die geſuchte Function erfährt alſo für $x = o$ eine Unterbrechung der Stetigkeit.

In derſelben Gleichung wollen wir $z = 1$ ſetzen, ſo erhalten wir:

$$\varphi x + \varphi(1) = \varphi(x), \text{ oder } \varphi(1) = o. \qquad (b_1)$$

Die Gleichung (b) kann man in Beziehung auf x und in Beziehung auf z differenziren, indem man darin ſucceſſive x und z als veränderlich betrachtet, wodurch man nach bekannten Regeln erhält:

$$\varphi' x = z\varphi'(xz), \quad \varphi' z = x\varphi'(xz),$$

und folglich:

$$x\varphi' x = z\varphi' z.$$

Die Function φ iſt alſo ſo beſchaffen, daß das Product $x\varphi' x$ von x unabhängig iſt, ſo daß man hat:

$$x\varphi' x = k,$$

wo k eine beliebige Conſtante bezeichnet, oder:

$$\frac{d\varphi x}{dx} = \frac{k}{x},$$

und da die Function φx für $x = 1$ verſchwinden muß, ſo ergibt ſich aus dieſer letzten Gleichung:

$$\varphi x = k\int_1^x \frac{dx}{x} = k \log. x.$$

In der That drückt die Gleichung (b) die Eigenſchaft aus, welche der gewöhnlichen Anwendung der Logarithmen zum Grunde liegt, und wir hätten, wie man eben geſehen hat, von dieſer Gleichung oder von der Eigenſchaft, welche ſie ausdrückt, ausgehen können, um das Differenzial der logarithmiſchen Function zu finden.

§. 72. Es werde ferner eine andere Function ψ geſucht, welche durch die Gleichung:

$$\psi x \cdot \psi z = \psi(x + z) \qquad (c)$$

characteriſirt wird, woraus folgt, wenn man $z = o$ ſetzt:

$$\psi(o) = 1. \qquad (c_0)$$

Wenn man die Gleichung (c) in Beziehung auf x und in Beziehung auf z differenzirt, ſo erhält man:

$$\psi' x \cdot \psi z = \psi'(x + z), \quad \psi x \cdot \psi' z = \psi'(x + z),$$

und folglich:

$$\frac{\psi' x}{\psi x} = \frac{\psi' z}{\psi z}.$$

Es muß alſo:

$$\frac{\psi' x}{\psi x} = a, \text{ oder } \frac{d\psi x}{dx} = a\psi x,$$

wo a eine beliebige Conſtante bezeichnet, welche wir zunächſt als reel vorausſetzen wollen. Nun wiſſen wir aber aus dem Vorhergehenden, daß die Function von x, welche dieſer Differenzialgleichung und der Bedingung $\psi(0) = 1$ genügt, folgende iſt:

$$\psi x = e^{ax},$$

und in der That iſt die Gleichung (c) nichts weiter, als der algebraiſche Ausdruck der Grundregel für die Rechnung mit Potenzen, ſo daß wir von dieſer Gleichung hätten ausgehen können, um direct das Differenzial der Exponenzialfunction zu finden.

Wir wollen nun annehmen, daß die Conſtante a imaginär oder von der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ ſei, ſo wird die Function ψx ſelbſt eine imaginäre Größe von der Form:

$$fx + fx \cdot \sqrt{-1} \quad (\S. 17).$$

Denn die Gleichung:

$$d \cdot \psi x = (\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\psi x\, dx \qquad (d)$$

kann mit einer deſto größeren Annäherung durch:

$$\Delta \cdot \psi x = (\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\psi x\, \Delta x$$

erſetzt werden, einen je kleinern Bruch man für Δx nimmt. Wenn man z. B. wegen $\psi(0) = 1$ die Differenz $\Delta x = 0{,}001$ nimmt, indem dieſer Werth von Δx als eine ſehr kleine Größe der erſten Ordnung betrachtet wird (§. 44 und 45); ſo erhält man, wenn man die ſehr kleinen Größen der zweiten Ordnung hinwegläßt:

$$\psi(0{,}001) = 1 + 0{,}001\,(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$
$$\psi(0{,}002) = [1 + 0{,}001\,(\alpha + \beta\sqrt{-1})]^2,$$
$$\psi(0{,}003) = [1 + 0{,}001\,(\alpha + \beta\sqrt{-1})]^3,$$
$$\text{u. ſ. w.,}$$

und alle dieſe Werthe der Function ψ laſſen ſich auf die Form:

$$\mu + \nu\sqrt{-1}$$

zurückführen. Da der Fehler, welcher durch die Subſtitution einer endlichen Differenz Δx für das Differenzial dx begangen wird, beliebig verkleinert werden kann, ſo folgt nicht blos, daß es wirklich eine Function:

$$\psi x = fx + fx\sqrt{-1}$$

gibt, welche die Eigenſchaft beſitzt, den Gleichungen (c) und (c_0), und folglich der Gleichung (d) zu genügen, ſondern auch, daß die in der Function x vorkommenden reellen Functionen fx, fx für einen beliebigen Werth von x mit einer unbeſchränkten Annäherung numeriſch berechnet werden können.

Wegen der Gleichung (c_0) hat man:

$$f(0) = 1,\ fx(0) = 0, \qquad (e)$$

und wegen der Gleichung (c):

$$(fx + fx\sqrt{-1})(fz + fz\sqrt{-1}) = f(x+z) + fx(x+z)\sqrt{-1},$$

woraus ſich die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} fx \cdot fz - fx \cdot fz &= f(x+z), \\ fx \cdot fz + fx \cdot fz &= fx(x+z), \end{aligned}\right\} \qquad (f)$$

ergeben, aus denen ſogleich mehrere Folgerungen gezogen werden ſollen.

Da die Gleichung (c) nichts anders iſt, als der algebraiſche Ausdruck der Regel für die Rechnung mit Potenzen, ſo folgt, daß wir, ſelbſt wenn die Conſtante a imaginär iſt, die Function ψx, welche die Eigenſchaft beſitzt, den Gleichungen (c) und (c_0) zu genügen, $= e^{ax}$ ſetzen können; denn obgleich man eine Zahl nicht zu einer Potenz mit einem imaginären Exponenten erheben kann, und folglich der Ausdruck e^{ax}, wenn ax imaginär iſt, keine mögliche arithmetiſche Operation ausdrückt, welche ſich genau, oder annäherungsweiſe ausführen läßt; ſo muß man doch nothwendig zu einem genauen Reſultate gelangen, wenn man auf einen ſolchen Ausdruck, der Natur der Function ψ gemäß, welche er ausdrückt, die Regeln der algebraiſchen Rechnung anwendet.

§. 73. Da die transcendente Function:

$$y = \text{sin. } x$$

die Eigenſchaft hat, der Differenzialgleichung:

$$dy = \cos. x dx, \qquad (g)$$

oder:

$$dy = \sqrt{1-y^2} \cdot dx, \qquad (g')$$

zu genügen, ſo kann man von der geometriſchen Bedeutung der Function y abſtrahiren und ſie durch die doppelte Bedingung characteriſiren, daß ſie zugleich mit x verſchwindet und nach einem durch die Gleichung (g') ausgedrückten Geſetze ſtetig zunimmt.

Man kann auch die umgekehrte Function als ein beſtimmtes Integral betrachten und ſetzen:

$$\text{arc. sin. } y = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

oder wenn man x für y ſetzt

$$\text{arc. sin. } x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

ſo daß die transcendente Zahl π durch die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\pi = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ausgedrückt wird.

Die Gleichungen (g) und (g') ſtimmen für die Werthe von y zwiſchen -1 und $+1$, oder für die Werthe von x zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ überein; aber wenn x größer wird als $\frac{1}{2}\pi$, ſo muß man nach dem, was die Trigonometrie über die Veränderung des Zeichens des Coſinus lehrt, für die Gleichung (g') die Gleichung:

$$dy = -\sqrt{1-y^2} \cdot dx \qquad (g'')$$

ſetzen.

Es iſt in der That nicht möglich, daß die Gleichung (g') für reelle Werthe von y ſtattfindet, nachdem die Veränderliche x, welche als unabhängig betrachtet wird, und deren ſtetige Zunahme folglich durch nichts beſchränkt wird, den Werth überſchritten hat, für welchen $y = 1$ iſt; denn da alsdann dx poſitiv iſt und die Wurzelgröße $\sqrt{1-y^2}$ poſitiv genommen wird, ſo wäre dy poſitiv, folglich würde y den Werth 1 überſchreiten und die Wurzelgröße $\sqrt{1-y^2}$ würde

folglich imaginär, was nicht geſchehen kann, ohne daß dy und folglich y imaginäre Werthe annehmen.

§. 74. Um aber direct zu beweiſen, daß man von der Gleichung ($\varkappa'$) zu der Gleichung ($\varkappa''$) übergehen muß, ohne etwas aus der Trigonometrie zu entlehnen, weder in dem Beweiſe, noch in der Definition der Function y, wollen wir zwei Functionen fx, $\mathfrak{f}x$ betrachten, welche gleichzeitig durch das Syſtem der beiden Differenzialgleichungen:

$$\mathrm{d} \cdot fx = \mathfrak{f}x\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(i)}$$

$$\mathrm{d} \cdot \mathfrak{f}x = -fx\,\mathrm{d}x \qquad \text{(j)}$$

in Verbindung mit den Bedingungen:

$$f(0) = 0,\ \mathfrak{f}(0) = 1 \qquad (\mathrm{i}_0)$$

beſtimmt werden.

Aus dieſen Gleichungen ergibt ſich:

$$fx\,\mathrm{d} \cdot fx + \mathfrak{f}x\,\mathrm{d} \cdot \mathfrak{f}x = 0,$$

oder:

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d} \cdot \left| (fx)^2 + (\mathfrak{f}x)^2 \right| = 0,$$

und hieraus folgt:

$$(fx)^2 + (\mathfrak{f}x)^2 = \mathrm{C},$$

wo C eine beliebige von x unabhängige Zahl bezeichnet. Aber die Gleichungen (i_0) geben:

$$(f0)^2 + (\mathfrak{f}0)^2 = 1,$$

folglich iſt:

$$(fx)^2 + (\mathfrak{f}x)^2 = 1. \qquad \text{(k)}$$

So lange nun fx für zunehmende Werthe von x von dem Werthe Null bis zu dem Werthe 1 übergeht, iſt $\mathrm{d} \cdot fx$, ſo wie dx poſitiv; folglich iſt $\mathfrak{f}x$ vermöge der Gleichung (i) poſitiv und man hat:

$$\mathfrak{f}x = \sqrt{1 - (fx)^2}.$$

Wir wollen den Werth von x, für welchen $fx = 1$ und folglich $\mathfrak{f}x = 0$ iſt, mit $\frac{1}{2}\pi$ bezeichnen, ſo iſt $\mathrm{d}fx$ vermöge der Gleichung (j) negativ und $\mathfrak{f}x$ nimmt für wachſende Werthe von x ſo lange ab, als fx poſitiv iſt. Für größere Werthe von x als $\frac{1}{2}\pi$ wird die Function $\mathfrak{f}x$, nachdem ſie durch Null gegangen iſt, negativ und gleich:

$$-\sqrt{1 - (fx)^2}.$$

Die Function fx nimmt alſo zu beiden Seiten ihres größten Werthes $f(\frac{1}{2}\pi) = 1$ ſymmetriſch zu und ab, ſo daß man hat:

$$f(\tfrac{1}{2}\pi + z) = f(\tfrac{1}{2}\pi - z),$$

und folglich:

$$f(\pi) = f(0) = 0,\ \mathfrak{f}(\pi) = -1.$$

Wenn die unabhängige Veränderliche x den Werth π überſchreitet und $\mathfrak{f}x$ negativ iſt, ſo iſt $\mathrm{d} \cdot fx$ negativ und fx nimmt fortwährend ab, indem ſie negative Werthe annimmt. Da nun $\mathfrak{f}x$ für gleiche Zahlenwerthe von fx mit entgegengeſetzten Zeichen den Werth nicht ändert, ſo hat man auch:

$$f(\pi + z) = f(\pi - z),$$

und folglich:

$$f(\tfrac{3}{2}\pi) = -f(\tfrac{1}{2}\pi) = -1,\ \mathfrak{f}(\tfrac{3}{2}\pi) = 0.$$

Wenn x den Werth $\frac{3}{2}\pi$ überſchritten hat, ſo wird $\mathfrak{f}x$ wieder poſitiv, fx fängt wieder an algebraiſch zuzunehmen, indem es immer größere Zahlenwerthe durchläuft und nimmt zu beiden Seiten des größten Werthes $f(\frac{3}{2}\pi) = -1$ aus dem bereits angegebenen Grunde ſymmetriſch ab und zu, ſo daß man hat:

$$f(\tfrac{3}{2}\pi + z) = f(\tfrac{3}{2}\pi - z),$$

und endlich:

$$f(2\pi) = f(\pi) = 0,\ \mathfrak{f}(2\pi) = 1.$$

Die Werthe von fx und $\mathfrak{f}x$ werden nun wieder dieſelben, wie für $x = 0$, $f(x)$ durchläuft dieſelbe Reihe gleichweit von einander abſtehender Werthe und des Intervall der Periode iſt gleich 2π.

Ebenſo könnte man den periodiſchen Lauf der Function $\mathfrak{f}x$ unterſuchen und dieſe Unterſuchung auf negative Werthe von x ausdehnen.

Die Regel für die Veränderung der Zeichen der Sinus und Coſinus, welche in der Trigonometrie nur durch Induction und durch Nachweiſung der Richtigkeit der Formeln, wenn man ſie nach dieſer Regel auf Bogen. die größer ſind als der Quadrant oder auch größer als der ganze Kreisumfang erſtreckt, bewieſen wird, ergibt ſich alſo in der That aus dem Geſetze der Erzeugung dieſer Functionen, abgeſehen von jeder geometriſchen Bedeutung der Veränderlichen x und der davon abhängigen Functionen.

§. 75. Wir wollen nun die Function:

$$\psi x = \cos. x + \sin. x \cdot \sqrt{-1}$$

betrachten, ſo gibt die Differenzirung derſelben:

$$\psi' x = -\sin. x + \cos. x \sqrt{-1} = \psi x \cdot \sqrt{-1},$$

oder:

$$\frac{\psi' x}{\psi x} = \sqrt{-1}.$$

Außerdem reducirt ſich die Function ψx für $x = 0$ auf die Einheit; folglich kann dieſe Function durch $e^{x\sqrt{-1}}$ ausgedrückt werden (§. 72) und man hat die Fundamentalformel:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos. x + \sin. x \cdot \sqrt{-1}. \qquad (A)$$

Die Functionen $\cos. x$, $\sin. x$ haben offenbar die Eigenſchaften, welche die Functionen $\mathfrak{f}x$, fx vermöge der Gleichungen (e) und (f) haben müſſen.

Wenn man das Zeichen der Wurzelgröße in der Gleichung (A) in das entgegengeſetzte verwandelt, ſo erhält man:

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos. x - \sin. x \sqrt{-1}$$

und folglich iſt:

$$\left.\begin{aligned} \cos. x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \\ \sin. x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}. \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Dieſe Formeln, welche häufig in der Analyſis angewandt werden, ſind zuerſt von Euler bekannt gemacht, welcher ſie ſeinem Lehrer Johann Bernoulli zuſchreibt.

Ebenſo könnte man auch alle übrigen trigonometriſchen Functionen durch imaginäre Exponentialgrößen ausdrücken und es iſt z. B.:

$$\text{tang.} x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}. \qquad (l)$$

§. 76. Die Gleichung (A) gibt ferner:

$$x\sqrt{-1} = \text{log.}(\cos. x + \sin. x \cdot \sqrt{-1}),$$

und wenn man $x = 2i\pi$ ſetzt, wo i eine beliebige ganze poſitive, oder negative Zahl bezeichnet, ſo erhält man:

$$\text{log.} \cdot 1 = 2i\pi\sqrt{-1}.$$

m also die Bedeutung der imaginären Exponentialgrößen und folglich die imaginären Logarithmen bestimmt ist, so ergibt sich, daß die Einheit ndlich viele imaginäre Logarithmen hat, außer dem reellen Logarithmus l, welcher i = 0 entspricht. Hieraus folgt auch, daß jede beliebige po-e Zahl unendlich viele imaginäre Logarithmen hat; denn vermöge der iden-en Gleichung:

$$a = a \times 1$$

man:

$$\log. a = (\log. a) + \log. 1 = (\log. a) + 2 i \pi \sqrt{-1},$$

(log. a) den reellen Logarithmus von a bezeichnet.

Auf dieselbe Weise fände man:

$$\log. (-1) = (2 i + 1) \pi \sqrt{-1},$$

og. $(-a) = (\log. a) + \log. (-1) = (\log. a) + (2 i + 1) \pi \sqrt{-1}$,

aus dieser letzten Formel geht hervor, daß die Logarithmen aller negativen len sämmtlich imaginär sind.

Endlich hat man die Werthe:

$$\log. (\sqrt{-1}) = \frac{4 i + 1}{2} \pi \sqrt{-1}$$

$$\log. (-\sqrt{-1}) = \frac{4 i + 3}{2} \pi \sqrt{-1}.$$

Es gibt in der mathematischen Analysis kein merkwürdigeres Factum, als en unerwarteten Zusammenhang, welcher sich durch Anwendung des alge-schen Zeichens $\sqrt{-1}$ einerseits zwischen den Exponentialfunctionen und den onometrischen Functionen andererseits zwischen den Logarithmen und den isbogen, d. h. zwischen Functionen herausstellt, welche so verschiedener Na- und so verschiedenen Ursprungs zu sein scheinen, wenn man nicht auf das setz zurück geht, welches zwischen ihren Differenzialveränderungen herrscht.*)

---

*) Es wird nicht unzweckmäßig sein, hier auch die geometrische Bedeutung der imaginären Ausdrücke $\sqrt{-1}$, $a + b\sqrt{-1}$ oder $\cos. \alpha + \sqrt{-1} \sin. \alpha$ näher nachzuweisen.

Wenn man ausdrücken will, daß eine auf einer geraden Linie OX (Fig. 7b) von einem festen Anfangspunkte O aus genommene Länge OA = r in einer entgegengesetzten Richtung OX'' genommen werden soll, so gibt man bekanntlich der Größe r das entgegengesetzte Zeichen — oder multiplicirt sie mit —1. Um aber auszudrücken, daß man von der Richtung OX zu einer im Anfangspunkte O darauf senkrechten Richtung OX' übergehen oder die Länge r auf dieser letzten Richtung nehmen soll oder will, ist bis jetzt kein allgemein gebräuchliches Zeichen angewandt; und um dieses Zeichen, welches zugleich algebraisch brauchbar sein muß, aufzufinden, wollen wir nach der Analogie annehmen, daß dieser Uebergang analytisch dadurch bewerkstelligt werde, daß man die Länge r mit irgend einem unbestimmten Factor λ multiplicirt, wodurch man λr erhält. Bemerken wir alsdann, daß der Uebergang von der Richtung OX zu der Richtung OX' ganz derselbe sein muß, als der Uebergang von der Richtung OX' zu der Richtung OX'', so muß man, um die Länge r von der Richtung OX' auf die Richtung OX'' analytisch zu übertragen, die Größe λr nochmals mit λ multipliciren, wodurch man offenbar $\lambda^2 r = -r = OA''$, folglich $\lambda = \pm\sqrt{-1}$ erhält.

Um also analytisch auszudrücken, daß die auf einer der Lage nach bekannten Linie oder Axe OX genommene Länge r auf einer im Anfangspunkte O darauf senkrechten Richtung genommen werden soll, muß man diese Länge mit $\sqrt{-1}$ multipliciren. — Es ist also damit die geometrische Bedeutung des imaginären Aus-

II. Moivre'sche Formel und Grundbegriffe über die Theorie der Winkelschnitte.

§. 77. Wenn n eine ganze positive Zahl bezeichnet, so ergibt sich aus der Gleichung (A):

$$e^{nx\sqrt{-1}} = \cos. nx + \sin. nx \cdot \sqrt{-1},$$

und folglich:

$$(\cos. x + \sin. x \cdot \sqrt{-1})^n = \cos. nx + \sin. nx \cdot \sqrt{-1}. \quad (C)$$

---

druckes $\sqrt{-1}$ vollständig nachgewiesen. Offenbar bezieht sich $-\sqrt{-1}$ auf die Richtung OX'''. Man könnte folglich $\pm\sqrt{-1}$ das Zeichen der Perpendikularität nennen.

Es läßt sich nun auch leicht der Coefficient μ finden, durch welchen man eine auf der bekannten Richtung OX genommene Länge multipliciren muß um sie algebraisch auf eine Richtung OR zu übertragen, welche mit jener einen beliebigen Winkel α bildet (Fig. 7c). Denn wenn man von irgend einem Punkte M der Richtung OR ein Perpendikel MP fällt, so wird der Weg OPM, wenn man nach dem vorhin Gesagten die Richtung von M in Betracht zieht, ausgedrückt durch:

$$OP + MP\sqrt{-1},$$

und die gerade Linie OM wird ihrer Länge und Richtung nach ausgedrückt durch:

$$\mu \cdot OM.$$

Da aber beide Wege von dem Punkte O nach demselben Punkte M führen, so müssen sie, sobald man nicht blos die Längen, sondern auch die Richtungen der geraden Linien in Betracht zieht, als gleich betrachtet werden. Man hat daher:

$$\mu \cdot OM = OP + PM\sqrt{-1},$$

folglich:

$$\mu = \frac{OP}{OM} + \frac{PM}{OM}\sqrt{-1} = \cos. \alpha + \sin. \alpha \cdot \sqrt{-1} = e^{\alpha\sqrt{-1}}.$$

Wenn man also mit diesem Coefficienten μ die ursprüngliche auf OX genommene Länge r multiplicirt, so wird sie analytisch auf die Richtung OR übertragen, welche mit OX einen beliebigen Winkel α bildet. Man kann den Coefficienten μ daher sehr schicklich den Richtungscoefficienten nennen. Hieraus sieht man, daß eine gerade Linie von der Länge r in Beziehung auf eine der Lage nach als bekannt angesehene Linie, sowohl ihrer Länge, als ihrer Lage nach vollständig ausgedrückt wird durch:

$$r \cdot (\cos. \alpha + \sin. \alpha \cdot \sqrt{-1}) = r \cdot e^{\alpha\sqrt{-1}},$$

und wenn sie nicht durch den Anfangspunkt O, sondern durch einen beliebigen andern Punkt O' oder O'' von OX (Fig. 7d) geht, durch:

$$\pm a + r(\cos. \alpha + \sin. \alpha \cdot \sqrt{-1}) = \pm a + re^{\alpha\sqrt{-1}},$$

wo $OO' = OO'' = a$ gesetzt ist und r immer als positiv angesehen wird.

Von diesen Principien lassen sich in der Geometrie, Trigonometrie ꝛc. die ausgedehntesten Anwendungen machen. Betrachten wir z. B. das eben Dreieck ABe (Fig. 7e), so haben wir, wenn AB als feste Axe betrachtet wird

$$AB = c,\ Ae = b(\cos. A + \sin. A \cdot \sqrt{-1}),\ Be = a(\cos.(\pi - B) + \sin.(\pi - B) \cdot \sqrt{-1}$$
$$= a(-\cos. B + \sin. B \cdot \sqrt{-1})$$

Da nun aber der Weg ABe als dem Wege Ae gleich betrachtet werden muß so hat man:

$$b(\cos. A + \sin. A \cdot \sqrt{-1}) = c + a(-\cos. B + \sin. B \cdot \sqrt{-1},$$

folglich:

$$b \cdot \cos. A = c - \cos. B,\ b \cdot \sin. A = a \sin. B,$$

welches bekanntlich zwei Grundformeln der ebenen Trigonometrie sind.

Ebenso kann man durch Anwendung derselben Principien leicht die Gleichungen der Ellipse, Hyperbel und Parabel ꝛc. finden. Z. d. Uebers.

Dieſe Gleichung zerfällt in zwei andere, wie alle Gleichungen, worin zugleich reelle und imaginäre Glieder vorkommen. So findet man z. B. für $n = 2$:

$$\cos.^2 x - \sin.^2 x + 2\sin.x \cos.x \cdot \sqrt{-1} = \cos. 2x + \sin. 2x \cdot \sqrt{-1},$$

und dieſe Gleichung vertritt die Stelle der beiden bekannten Gleichungen:

$$\sin. 2x = 2 \sin. x \cos. x,$$
$$\cos. 2x = \cos.^2 x - \sin.^2 x.$$

Durch dieſelbe Rechnung fände man für $n = 3$:

$$\sin. 3x = 3 \cos.^2 x - \sin.^3 x,$$
$$\cos. 3x = \cos.^3 x - 3 \cos. x \sin.^2 x.$$

Zur Verallgemeinerung dieſer Reſultate wollen wir bemerken, daß ſich aus der Gleichung (C) durch die Veränderung des Zeichens der Wurzelgröße folgende Gleichung ergibt:

$$(\cos. x - \sin. x \cdot \sqrt{-1})^n = \cos. nx - \sin. nx \cdot \sqrt{-1},$$

und aus der Verbindung dieſer letzten Gleichung mit der Gleichung (C) ergeben ſich die Ausdrücke:

$$\cos. nx = \frac{(\cos. x + \sin. x \sqrt{-1})^n + (\cos. x - \sin. x \cdot \sqrt{-1})^n}{2},$$

$$\sin. nx = \frac{(\cos. x + \sin. x \sqrt{-1})^n - (\cos. x - \sin. x \cdot \sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Wenn man die Potenzen durch die Binomialformel entwickelt, ſo verſchwinden die imaginären Ausdrücke, und man erhält:

$$\cos. nx = \cos.^n x - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos.^{n-2} x \sin.^2 x$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos.^{n-4} x \sin.^4 x - \text{etc.} \qquad (D)$$

$$\sin. nx = n \cos.^{n-1} x \sin. x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos.^{n-3} x \sin.^3 x + \text{etc.} \quad (E)$$

Dieſe beiden Formeln enthalten nur eine endliche Anzahl von Gliedern, ſo oft n eine ganze poſitive Zahl iſt, wie wir hier vorausſetzen.

§. 78. Wir wollen der Einfachheit der Rechnung wegen:

$$\cos. x + \sin. x \sqrt{-1} = u, \quad \cos. x - \sin. x \sqrt{-1} = v$$

ſetzen, ſo iſt:

$$uv = 1, \quad u + v = 2 \cos. x, \quad u - v = 2 \sin. x \sqrt{-1},$$

und die Binomialformel gibt wieder in dem Falle, wo n eine ganze poſitive Zahl iſt:

$$(2 \cos. x)^n = (u + v)^n = u^n + \frac{n}{1} u^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{n-2} v^2 + \ldots\ldots + v^n,$$

oder wegen $uv = 1$:

$$(2 \cos. x)^n = (u^n + \frac{n}{1} u^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{n-4} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{n-4} + \frac{n}{1} v^{n-2} + v^n.$$

Außerdem iſt aber:

$$u^n = \cos. nx + \sin. nx \sqrt{-1}, \quad v^n = \cos. nx - \sin. nx \sqrt{-1},$$

folglich:

$$(2\cos.x)^n = \cos.nx + n\cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos.(n-4)x + \ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos.(n-4)x + n\cos.(n-2) + \cos.nx$$

$$+ \sqrt{-1}\,[\sin.nx + n\sin.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin.(n-4)x + \ldots.$$

$$\ldots\ldots - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin.n(n-4)x - n\sin.(n-2)x - \sin.nx]. \quad (m$$

Der reelle Theil auf der zweiten Seite beſteht aus Gliedern, die pa weiſe einander gleich ſind, mit Ausnahme des mittleren Gliedes, wenn n e gerade Zahl iſt, und der imaginäre Theil beſteht aus Gliedern, welche paarweiſe gegenſeitig aufheben, indem das mittlere Glied von ſelbſt verſchw det, wenn n eine gerade Zahl iſt. Man hat alſo für gerade Werthe von

$$(2\cos.x)^n = 2\left[\cos.nx + n\cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos.(n-4)x\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)\ldots.\left(\frac{n}{2}-1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots.\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cos.2x\right] + \frac{n(n-1)\ldots.\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\cdot 3\ldots\ldots.\frac{n}{2}}, \quad (F$$

und für ungerade Werthe dieſes Exponenten:

$$(2\cos.x)^n = 2\left[\cos.nx + n\cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos.(n-4)x\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)\ldots.\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots.\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cos.x\right]. \quad (F_1)$$

Ebenſo findet man, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl iſt:

$$(2\sqrt{-1}\cdot\sin.x)^n = (u-v)^n = u^n - nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{n-2}v^2\ldots.\mp$$

$$= u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{n-4} - \ldots.. \mp nv^{n-2} \pm$$

$$= \cos.nx - n\cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos.(n-4)x,$$

$$\ldots.. \mp n\cos.(n-2)x \pm \cos.nx$$

$$+ \sqrt{-1}\left[\sin.nx - n\sin.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin.(n-4)x -\right.$$

$$\left.\ldots.. \pm n\sin.(n-2)x \mp \sin.nx\right]. \quad (m')$$

Wenn n eine gerade Zahl iſt, ſo verſchwindet die Reihe, womit $\sqrt{-}$ im zweiten Theile der vorhergehenden Gleichung multiplicirt iſt, wie vorh und die Glieder des reellen Theiles vereinigen ſich paarweiſe, mit Ausnah des mittleren Gliedes, ſo daß man folgende Formel erhält:

$$(-1)^{\frac{n}{2}}(2\sin.x)^n = 2\left[\cos.nx - n\cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos.(n-4)x - \ldots\ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots\ldots\frac{n}{2}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cos.2x\right] \mp \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\frac{n}{2}}, \quad (G_1)$$

orin man die oberen, oder unteren Zeichen nehmen muß, je nachdem $\frac{n}{2}$ ne gerade oder eine ungerade Zahl iſt.

Wenn n eine ungerade Zahl iſt, ſo iſt es der reelle Theil des letzten heiles der Gleichung (m'), deſſen Glieder ſich paarweiſe gegenſeitig aufben, während ſich die des imaginären Theiles paarweiſe vereinigen. Wenn an auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens durch $\sqrt{-1}$ dividirt, ſo erilt man:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2\sin.x)^n = 2\left[\sin.nx - n\sin.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin.(n-4)x - \ldots\ldots \mp \frac{n(n-1)\ldots\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sin.x\right]. \quad (G_2)$$

§. 79. Die von Moivre herrührende und ſeinen Namen führende Forel (C) gibt unmittelbar den Ausdruck der Wurzeln der Gleichungen von der orm:

$$x^n \mp 1 = 0,$$

if welche bekanntlich alle binomiſchen Gleichungen zurückgeführt werden können.

Wir wollen zunächſt die Gleichung:

$$x^n - 1 = 0, \quad (n)$$

hmen, und

$$x = \cos.\varphi + \sin.\varphi \cdot \sqrt{-1}$$

zen; ſo muß dieſer Winkel φ ſo beſtimmt werden, daß der Gleichung:

$$\cos.n\varphi + \sin.n\varphi \cdot \sqrt{-1} = 1$$

enüge geſchieht, welche in die beiden anderen Gleichungen:

$$\cos.n\varphi = 1, \quad \sin.n\varphi = 0$$

fällt, denen unmittelbar genügt wird, wenn man $\varphi = \frac{2i\pi}{n}$ und folglich:

$$x = \cos.\frac{2i\pi}{n} + \sin.\frac{2i\pi}{n} \cdot \sqrt{-1}, \quad (p)$$

it, wo i eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

Wenn man für i ſucceſſive die n ganzen Zahlen:

$$0, 1, 2, 3, \ldots\ldots n-1$$

it, ſo erhält man offenbar eben ſo viele verſchiedene Werthe für x, während an, wenn man für i ganze, poſitive oder negative Zahlen, aber größer s n — 1 ſetzt, wieder auf die ſchon erhaltenen Werthe von x kommt, wie eſes aus der Formel:

$$\begin{matrix}\cos.\\ \sin.\end{matrix}\left\{\frac{2(kn+r)\pi}{n}\right. = \begin{matrix}\cos.\\ \sin.\end{matrix}\left(2k\pi + \frac{2r\pi}{n}\right) = \begin{matrix}\cos.\\ \sin.\end{matrix}\left\{\frac{2r\pi}{n}\right.,$$

o r eine ganze poſitive größere Zahl als n und k eine beliebige poſitive oder egative ganze Zahl bezeichnet, erhellet.

Die Gleichung (p) gibt alſo eben ſo viele verſchiedene Wurzeln nach der Theorie der Gleichungen, als der Grad der Gleichung (n) Einheiten hat. Der Werth $i = 0$ gibt die reelle Wurzel $x = 1$ und wenn n eine gerade Zahl iſt, ſo iſt -1 eine zweite reelle Wurzel der Gleichung, welche dem Werthe $i = \frac{n}{2}$ entſpricht, und alle übrigen Werthe von i geben imaginäre Wurzeln.

Bekanntlich kommen in jeder algebraiſchen Gleichung mit reellen Coefficienten die imaginären Wurzeln immer paarweiſe vor und jedes Paar ſolcher Wurzeln ſind conjugirte oder zuſammengehörige imaginäre Wurzeln von der Form:

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},\quad \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

deren Product eine reelle poſitive Größe $\alpha^2 + \beta^2$ iſt. Die Formel (p) genügt dieſer Bedingung; denn man hat:

$$\cos.\frac{2(n-r)\pi}{n} = \cos.\frac{2r\pi}{n},\ \sin.\frac{2(n-r)\pi}{n} = -\sin.\frac{2r\pi}{n},$$

ſo daß die durch den Werth $i = r$ gegebene imaginäre Wurzel die conjugirte der $i = n - r$ entſprechenden Wurzel iſt. Man kann daher alle Wurzeln der Gleichung (n) oder alle Wurzeln der Einheit durch die Formel:

$$x = \cos.\frac{2i\pi}{n} \pm \sin.\frac{2i\pi}{n}\cdot\sqrt{-1}$$

ausdrücken, worin man der Zahl i nur die ganzen Werthe von Null bis $\frac{n}{2}$ beizulegen braucht, wenn n eine gerade Zahl iſt, und die ganzen Werthe von Null bis $\frac{n-1}{2}$, wenn n eine ungerade Zahl iſt.

Die reellen Factoren des zweiten Grades, welche das Product zweier conjugirter imaginärer Factoren ſind, werden durch folgende Formel ausgedrückt:

$$x^2 - 2x\cos.\frac{2i\pi}{n} + 1.$$

Dieſer Satz, welcher ſich leicht geometriſch ausdrücken läßt, iſt unter dem Namen des Lehrſatzes von Cotes bekannt.

Die Gleichung:

$$x^n + 1 = 0$$

führt auf ähnliche Formeln, welche man erhält, wenn man in der vorhergehenden $2i + 1$ ſtatt $2i$ ſetzt.

Umgekehrt hat man, ſo oft man eine binomiſche Gleichung:

$$x^n \mp 1 = 0$$

algebraiſch aufzulöſen, d. h., ihre Wurzeln durch ein Syſtem algebraiſcher Wurzelgrößen auszudrücken weiß, einen algebraiſchen Ausdruck der trigonometriſchen Linien:

$$\left.\begin{matrix}\sin.\\ \cos.\end{matrix}\right\}\frac{2i\pi}{n},\quad \left.\begin{matrix}\sin.\\ \cos.\end{matrix}\right\}\frac{(2i+1)\pi}{n},$$

und insbeſondere der Linien:

$$\sin.\frac{2\pi}{n},\ \cos.\frac{2\pi}{n}.$$

Wenn man alſo dieſe imaginären Wurzeln durch ein Syſtem von Wurzelgrößen des zweiten Grades ausdrücken kann, welche ſich mit dem Lineale und dem Zirkel conſtruiren laſſen, wie die Elemente der analytiſchen Geome-

trie lehren, ſo kann man auch mit dem Lineale und dem Zirkel den Sinus oder Coſinus des Bogens conſtruiren, welcher der n^{te} Theil des Kreisumfanges iſt, und folglich dieſen Kreisumfang in dem Sinne der Alten in n gleiche Theile theilen. Hieraus ſieht man, wie ſich dieſes bei den griechiſchen Geometern ſo berühmte Problem an die Theorie der algebraiſchen Auflöſung der Gleichungen anſchließt, welche ſelbſt mit der Theorie der Combinationen und der der Zahlen in enger Verbindung ſteht. Allein es iſt hier der Ort nicht, über dieſe ſehr merkwürdigen Beziehungen ein Mehreres zu ſagen, weil ſie nicht ſowohl für die Anwendungen der Mathematik auf andere poſitive Wiſſenſchaften, als für ihre Philoſophie von Intereſſe ſind.

§. 80. Vermittelſt der trigonometriſchen Tafeln kann man nicht blos, wie wir eben geſehen haben, die binomiſchen Gleichungen, ſondern auch die trinomiſchen Gleichungen von der Form:

$$z^{2n} - 2az^n + b = 0, \qquad (q)$$

auflöſen; denn wenn man daraus für z^2 einen reellen Werth ableitet, ſo laſſen ſie ſich unmittelbar auf binomiſche Gleichungen vom n^{ten} Grade zurückführen, und im entgegengeſetzten Falle, wo $a^2 < b$ iſt, kann man ſetzen:

$$z = \sqrt[2n]{b} \cdot x, \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \pm \cos. \lambda,$$

wo λ einen kleinern Bogen als der Quadrant bezeichnet, und alsdann nimmt die Gleichung (q) eine der beiden folgenden Formen an:

$$x^{2n} - 2x^n \cos. \lambda + 1 = 0, \qquad (q_1)$$

$$x^{2n} + 2x^n \cos. \lambda + 1 = 0. \qquad (q_2)$$

Wir wollen annehmen, daß die Gleichung (q) die erſte Form (q_1) habe, und ſetzen:

$$x = \cos. \varphi + \sin. \varphi \cdot \sqrt{-1},$$

ſo muß der Werth des Winkels φ den Bedingungen:

$$\cos. 2n\varphi - 2 \cos. n\varphi \cdot \cos. \lambda + 1 = 0,$$

$$\sin. 2n\varphi - 2 \sin. n\varphi \cdot \cos. \lambda = 0$$

genügen, was in der That geſchieht, wenn man:

$$\cos. n\varphi = \cos. \lambda, \text{ folglich } \varphi = \frac{2i\pi \pm \lambda}{n}$$

nimmt, wo i irgend eine ganze Zahl bezeichnet. Die $2n$ Wurzeln der gegebenen Gleichung werden alſo durch die Formel:

$$x = \cos. \frac{2i\pi \pm \lambda}{n} + \sin. \frac{2i\pi \pm \lambda}{n} \cdot \sqrt{-1},$$

ausgedrückt, worin man für i ſucceſſive alle ganzen Werthe von 0 bis $n-1$ incl. ſetzen muß. Die reellen Factoren der Gleichung (q_1) werden durch die Formel:

$$x^2 - 2x \cos. \frac{2i\pi \pm \lambda}{n} + 1$$

ausgedrückt, und wenn die Gleichung (q) die Form (q_2) hätte, ſo müßte man in den vorhergehenden Formeln $2i + 1$ für $2i$ ſetzen, um ſie aufzulöſen.

§. 81. Wenn man in der Moivre'ſchen Formel:

$$(\cos. x + \sin. x \cdot \sqrt{-1})^n = \cos. nx + \sin. nx \cdot \sqrt{-1} \qquad (C)$$

für die Zahl n ganze Werthe ſetzt, ſo hat jeder Theil der vorhergehenden Gleichung nur einen einzigen Werth und die Anwendung der Formel erfordert weiter keine beſondere Bemerkung; aber wenn der Exponent n ein rationaler Bruch $\frac{p}{q}$ iſt, welcher immer, als auf ſeinen einfachſten Ausdruck reducirt an-

genommen werden muß, ſo hat der erſte Theil der vorhergehenden Gleichung nach der Theorie der Wurzeln der Einheit q verſchiedene Werthe, welche man erhält, wenn man den zweiten Theil dieſer Gleichung durch die Wurzeln des q^{ten} Grades aus der Einheit multiplicirt. Nun werden aber nach dem Vorhergehenden dieſe Wurzeln durch die Formel:

$$\cos.\frac{2i\pi}{q} + \sin.\frac{2i\pi}{q} \cdot \sqrt{-1}$$

ausgedrückt, und man muß folglich, damit in dieſem Falle die Moivre'ſche Formel die erforderliche Allgemeinheit bekommt, ſetzen:

$$\left(\cos x + \sin.x \cdot \sqrt{-1}\right)^{\frac{p}{q}} =$$

$$\left(\cos.\frac{p}{q}x + \sin.\frac{p}{q}x\sqrt{-1}\right)\left(\cos.\frac{2i\pi}{q} + \sin.\frac{2i\pi}{q}\cdot\sqrt{-1}\right)$$

$$= \cos.\frac{px+2i\pi}{q} + \sin.\frac{px+2i\pi}{q}\cdot\sqrt{-1}.$$

Da ferner p eine ganze Zahl und mit q prim iſt, ſo kann man pi für i ſetzen, wodurch man die etc. antere Formel:

$$\left(\cos.x + \sin.x \cdot \sqrt{-1}\right)^{n} = \cos.\frac{p}{q}\left(x + 2i\pi\right) + \sin.\frac{p}{q}\left(x + 2i\pi\right)\cdot\sqrt{-1}$$

erhält, worin man für i alle ganzen Werthe von 0 bis q—1 incl. ſetzen muß.

§. 82. Die Formeln (D), (E), (F_1), (F_2), (G_1), (G_2), welche zur Transformation der Sinus und Coſinus der Vielfachen eines Bogens in Potenzen des Sinus und Coſinus des einfachen Bogens, und umgekehrt, dienen, müſſen auf ähnliche Weiſe modificirt werden, wenn die Exponenten der Potenzen gebrochene Zahlen ſind, und dieſer feine Punct der Theorie der Winkelſchnitte iſt durch die intereſſante Abhandlung, welche Poinſot im Jahre 1825 unter dem Titel: Recherches sur l'analyse des sections angulaires herausgegeben hat, in ein helles Licht geſetzt. Wir wollen über dieſen Gegenſtand nun noch das Folgende mittheilen, welches als weniger wichtig wie das Vorhergehende bei einem erſten Studium übergangen werden kann.

Es ſei:

$$\left.\begin{aligned}\Phi x &= \cos.nx + n\cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos.(n-4)x + \text{etc.}\\ \Psi x &= \sin.nx + n\sin.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin.(n-4)x + \text{etc.}\end{aligned}\right\}, \quad (H)$$

ſo verwandelt ſich die Formel (m) in folgende:

$$(2\cos.x)^n = \Phi x + \Psi x\sqrt{-1},$$

welche nach den Rechnungen in §. 78 als für beliebige Werthe des Exponenten n gültig angeſehen werden kann, wenn man annimmt, daß die Binomialformel für beliebige Werthe des Exponenten gültig iſt, wie dieſes in den meiſten Lehrbüchern der Algebra unabhängig von der Differenzialrechnung bewieſen wird.

Wenn n eine ganze poſitive Zahl iſt, ſo iſt die Function $\Psi x = 0$ und die Function Φx beſteht aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, welche ſich paarweiſe vereinigen, wie vorhin gezeigt iſt; aber im Allgemeinen ſind die zweiten Theile der Gleichungen (H) Reihen von unendlich vielen Gliedern.

Wir wollen der Zahl n den gebrochenen Werth $\frac{p}{q}$ beilegen, wo p,

ganze poſitive Zahlen bezeichnen, welche prim unter ſich ſind; ſo hat die Wurzelgröße:

$$(2\cos. x)^{\frac{p}{q}} \qquad (r)$$

q verſchiedene Werthe, welche in dem Ausdrucke:

$$\left(\Phi x + \Psi x \sqrt{-1}\right)\left(\cos. \frac{p}{q} 2i\pi + \sin. \frac{p}{q} \cdot 2i\pi \sqrt{-1}\right)$$

enthalten ſind, der nach dem weiter oben Geſagten gleichbedeutend iſt mit:

$$\Phi(x + 2i\pi) + \Psi(x + 2i\pi) \cdot \sqrt{-1},$$

wo i alle ganzen Werthe von 0 bis q—1 incl. erhalten muß.

Wir wollen annehmen, daß cos. x poſitiv iſt und mit X den reellen und poſitiven Werth der Wurzelgröße (r) bezeichnen, ſo erhält man die übrigen Werthe der Wurzelgröße, wenn man X durch die von 1 verſchiedenen Wurzeln der Einheit multiplicirt, d. h. die q Werthe der Wurzelgröße ſind in dem Ausdrucke:

$$X\left(\cos. \frac{p}{q} \cdot 2i'\pi + \sin. \frac{p}{q} \cdot 2i\pi \cdot \sqrt{-1}\right)$$

enthalten, wenn man der Zahl i' alle ganzen Werthe von 0 bis q — 1 incl. beilegt.

Es iſt alſo immer möglich den Zahlen i, i' zwiſchen dieſen Grenzen ſolche Werthe beizulegen, daß man hat:

$$X(\cos. \frac{p}{q} \cdot 2i'\pi + \sin. \frac{p}{q} \cdot 2i'\pi \cdot \sqrt{-1})$$
$$= \Phi(x + 2i\pi) + \Psi(x + 2i\pi)\sqrt{-1}, \qquad (s)$$

oder was auf daſſelbe hinausläuft:

$$X(\cos. \frac{p}{q} \cdot 2i'\pi + \sin. \frac{p}{q} 2i'\pi \cdot \sqrt{-1}) =$$
$$(\Phi x + \Psi x \cdot \sqrt{-1})(\cos. \frac{p}{q} 2i\pi + \sin. \frac{p}{q} \cdot 2i\pi \cdot \sqrt{-1}) \qquad (t)$$

und die Aufgabe iſt auf die Beſtimmung der correſpondirenden Werthe der Zahlen i, i' zurückgeführt.

Wenn man in der vorhergehenden Gleichung $x = 0$ ſetzt, ſo hat man:

$$\Psi(0) = 0, \quad \Phi(0) = (1 + 1)^{\frac{p}{q}}, \quad X_0 = 2^{\frac{p}{q}},$$

alſo $i = i'$ und die Formel (s) verwandelt ſich folglich in folgende:

$$X(\cos. \frac{p}{q} \cdot 2i\pi + \sin. \frac{p}{q} \cdot 2i'\pi \cdot \sqrt{-1})$$
$$= \Phi(x + 2i\pi) + \Psi(x + 2i\pi) \cdot \sqrt{-1}.$$

Da man nun $i = 0$ nehmen kann, ſo folgt, daß man für alle zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ liegenden Werthe von x, welche cos. x zu einem poſitiven Bruche machen, hat:

$$\Phi x = X, \quad \Psi x = 0$$

und allgemein hat man zwiſchen dieſen Grenzen wegen der Unc… (u)
beiden reellen und imaginären Theile von einander: …ängigkeit der

$$\Phi(x+2i\pi) = X \cos. \frac{p}{q} \cdot 2i\pi, \quad \text{ein…}$$

$$\Psi(x+2i\pi) = X \sin. \frac{p}{q} \cdot 2i\pi. \qquad (v)$$

§. 83. Wir wollen nun annehmen, daß cos. x negativ ſei, indem x zwiſchen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$ liegt, und mit X den reellen und poſitiven Werth der Wurzelgröße $(-2\cos. x)^{\frac{p}{q}}$ bezeichnen, ſo haben wir:

$$(2\cos. x)^{\frac{p}{q}} = X(-1)^{\frac{p}{q}} = X\left[\cos. \frac{p}{q}(2i'+1)\pi + \sin. \frac{p}{q}(2i'+1)\pi \cdot \sqrt{-1}\right]$$

und man erhält folglich ſtatt der Gleichungen (s) und (t) die folgenden:

$$X\left[\cos. \frac{p}{q}(2i'+1)\pi + \sin. \frac{p}{q}(2i'+1)\pi \cdot \sqrt{-1}\right] = \Phi(x + 2i\pi) + \Psi(x + 2i\pi) \cdot \sqrt{-1}, \qquad (s')$$

$$X\left[\cos. \frac{p}{q}(2i'+1)\pi + \sin. \frac{p}{q}(2i'+1)\pi \cdot \sqrt{-1}\right] = (\Phi x + \Psi x \cdot \sqrt{-1})\left(\cos. \frac{p}{q} \cdot 2i\pi + \sin. \frac{p}{q} \cdot 2i\pi \cdot \sqrt{-1}\right). \qquad (t')$$

Die Zahlen i, i' müſſen wieder alle ganzen Werthe von 0 bis q—1 incl. annehmen können und unter dieſen Werthen muß man die einander entſprechenden kennen.

Wenn man nun $x = \pi$ ſetzt, ſo werden alle Coſinus und Sinus, welche in den zweiten Theilen der Gleichungen (H) vorkommen, reſp. gleich $\cos. \frac{p}{q}\pi$, $\sin. \frac{p}{q}\pi$, ſo daß man erhält:

$$\Phi(\pi) = (1+1)^{\frac{p}{q}} \cos. \frac{p}{q}\pi,$$

$$\Psi(\pi) = (1+1)^{\frac{p}{q}} \sin. \frac{p}{q}\pi,$$

und X_π iſt $= 2^{\frac{p}{q}}$. Aus der Gleichung (t') ergibt ſich alſo nach der Hinweglaſſung des gemeinſchaftlichen Factors $2^{\frac{p}{q}}$:

$$\cos. \frac{p}{q}(2i'+1)\pi + \sin. \frac{p}{q}(2i'+1)\pi \cdot \sqrt{-1}$$

$$= \left(\cos. \frac{p}{q}\pi + \sin. \frac{p}{q}\pi \cdot \sqrt{-1}\right)\left(\cos. \frac{p}{q}2i\pi + \sin. \frac{p}{q}2i\pi \sqrt{-1}\right),$$

$$= \cos. \frac{p}{q}(2i+1)\pi + \sin. \frac{p}{q}(2i+1)\pi \cdot \sqrt{-1},$$

woraus ſich $i' = i$ und folglich:

$$X\left[\cos. \frac{p}{q}(2i+1)\pi + \sin. \frac{p}{q}(2i+1)\pi \sqrt{-1}\right]$$

ſten x_t, $= \Phi(x + 2i\pi) + \Psi(x + 2i\pi) \cdot \sqrt{-1}$
ſen wird. ſe letzte Gleichung zerfällt in die beiden folgenden:

Wenn n
Function Φx $x + 2i\pi) = X \cos. \frac{p}{q}(2i+1)\pi,$
paarweiſe vereini
zweiten Theile der $2i\pi) = X \sin. \frac{p}{q}(2i+1)\pi,$ (v')

Wir wollen der
ſetzt:

$$\left.\begin{aligned} \Phi x &= X \cos. \frac{p}{q}\pi, \\ \Psi x &= X \sin. \frac{p}{q}\pi. \end{aligned}\right\} \qquad (u')$$

§. 84. Wir haben in dem Vorhergehenden vorausgeſetzt, daß die Functionen Φ, Ψ für alle Werthe von x vermöge der Gleichungen (H) einen beſtimmten Werth haben, oder daß man vermittelſt dieſer Gleichungen allein mit einer unbegrenzten Annäherung die Curven conſtruiren kann, deren Abſciſſe x und deren Ordinaten Φx, Ψx ſind. Wenn aber dieſe weſentliche Bedingung nicht erfüllt würde, d. h. wenn die zweiten Theile der Gleichungen (H) keine convergenten Reihen bildeten, ſo würden die erhaltenen Formeln illuſoriſch und hätten keinen beſtimmten Sinn mehr. Nun wird aber die geforderte Bedingung, wie Cauchy gezeigt hat, nur dann erfüllt, wenn man dem Exponenten n poſitive Werthe beilegt.

Denn nach der Binomialformel hat man:

$$(1-\varepsilon)^n = 1 - \frac{n}{1}\cdot\varepsilon - \frac{n(1-n)}{1\cdot 2}\cdot\varepsilon^2 - \frac{n(1-n)(2-n)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\varepsilon^3 - \text{etc.}, \qquad (\varepsilon)$$

welche Entwickelung ſich nur für ganze poſitive Werthe des Exponenten n ſchließt und für jeden andern Werth von n in's Unendliche fortläuft. Wenn y_i das Glied dieſer Reihe bezeichnet, welches i Glieder vor ſich hat, ſo hat man:

$$\frac{y_{i+1}}{y_i} = \frac{i-n}{i+1}\cdot\varepsilon = \frac{1-\frac{n}{i}}{1+\frac{1}{i}}\cdot\varepsilon. \qquad (\varrho)$$

Je größer alſo i wird, deſto mehr convergirt der Werth des Verhältniſſes (ϱ) gegen eine Zahlengrenze, welche größer, oder kleiner als die Einheit iſt, je nachdem der Zahlenwerth ε ſelbſt größer, oder kleiner als die Einheit iſt. Die Reihe (ε) convergirt alſo für alle Werthe von ε, welche kleiner ſind als die Einheit (§. 26). Außerdem haben alle Glieder dieſer Reihe, für welche der Index i größer iſt als der Zahlenwerth von $n+1$ offenbar dasſelbe Zeichen, nämlich das Zeichen des Gliedes:

$$\frac{n(1-n)(2-n)\ldots\ldots(\nu-n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(\nu+1)}\cdot\varepsilon^{\nu+1},$$

wo ν die zunächſt kleinere ganze Zahl als n bezeichnet. Die Reihe (ε) iſt alſo an der Grenze $\varepsilon = 1$ convergent, oder divergent, je nachdem die Größe $(1-\varepsilon)^n$ gegen eine endliche Grenze, gegen Null, oder gegen eine unendliche Grenze convergirt, während ε gegen die Einheit convergirt. Wenn aber der Exponent n poſitiv iſt, ſo hat man:

$$\lim.\ (1-\varepsilon)^n = (1-1)^n = 0,$$

und folglich für poſitive Werthe von n:

$$0 = 1 - \frac{n}{1} - \frac{n(1-n)}{1\cdot 2} - \frac{n(1-n)(2-n}{1\cdot 2\cdot 3} - \text{etc.} \qquad (h)$$

Da aber die Reihe (h), deren Glieder von einem gewiſſen Range an, alle daſſelbe Zeichen haben, convergent iſt, ſo ſind die Reihen (H), welche man erhält, wenn man jedes Glied der Reihe (h) durch einen Factor multiplicirt, welcher bald poſitiv und bald negativ, aber ſeinem Zahlenwerthe nach immer kleiner als die Einheit iſt, um ſo mehr convergent, und zwar für jeden Werth von x, ſo lange der Exponent n einen poſitiven Werth erhält.

Die Formeln in den beiden vorhergehenden §§. gewähren den Vortheil, daß ſie die Werthe der Functionen Φx, Ψx geben, ohne daß man zu den auf der Anwendung der Reihen beruhenden Näherungsrechnungen ſeine Zuflucht zu nehmen braucht. Wenn alſo die Functionen Φx, Ψx für Werthe von x zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ durch die Gleichungen (u) und für Werthe von x zwiſchen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$ durch die Gleichungen (u') gegeben werden, ſo werden ſie für alle poſitive Werthe von $x < (2q - \frac{1}{2})\pi$ durch die Formel (v) und (v') beſtimmt, und da man außerdem nach der Form der Gleichungen (H) hat:

$$\Phi x = \Phi(x \pm 2kq\pi),$$
$$\Psi x = \Psi(x \pm 2kq\pi),$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, ſo folgt, daß die Werthe der Functionen Φx, Ψx für alle Werthe von x bekannt ſind, oder daß man für alle Werthe von x die Grenzen hat, gegen welche die Summen der Reihen:

$$\cos.\frac{p}{q}x + \frac{p}{q}\varepsilon \cdot \cos.\left(\frac{p}{q}-2\right)x + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{1\cdot 2}\varepsilon^2 \cdot \cos.\left(\frac{p}{q}-4\right)x + \text{etc.},$$

$$\sin.\frac{p}{q}x + \frac{p}{q}\varepsilon \cdot \sin.\left(\frac{p}{q}-2\right)x + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{1\cdot 2}\varepsilon^2 \cdot \sin.\left(\frac{p}{q}-4\right)x + \text{etc.},$$

convergiren, wenn die Zahl ε, indem ſie immer kleiner als 1 bleibt, ohne Ende gegen die Einheit convergirt.

Es ſei z. B. $n = \frac{p}{q} = \frac{1}{3}$, ſo hat man für die Werthe von x

zwiſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$, $\Phi x = \sqrt[3]{2\cos.x}$,

zwiſchen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$, $\Phi x = \sqrt[3]{-2\cos.x \cdot \cos.\frac{1}{3}\pi} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{2\cos.x}$,

zwiſchen $\frac{3}{2}\pi$ und $\frac{5}{2}\pi$, $\Phi x = \sqrt[3]{2\cos.x \cdot \cos.\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{2\cos.x}$,

zwiſchen $\frac{5}{2}\pi$ und $\frac{7}{2}\pi$, $\Phi x = \sqrt[3]{-2\cos.x \cdot \cos.\pi} = \sqrt[3]{2\cos.x}$,

zwiſchen $\frac{7}{2}\pi$ und $\frac{9}{2}\pi$, $\Phi x = \sqrt[3]{2\cos.x \cdot \cos.\frac{4}{3}\pi} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{2\cos.x}$,

zwiſchen $\frac{9}{2}\pi$ und $\frac{11}{2}\pi$, $\Phi x = \sqrt[3]{-2\cos.x \cdot \cos.\frac{5}{3}\pi} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{2\cos.x}$,

worauf die Werthe von Φx periodiſch wieder die halben Werthe durchlaufen. Folglich hat die Curve, deren Ordinate Φx iſt, die in Fig. 29 angegebene Form.

Drittes Kapitel.

Beſtimmung des Werthes der entwickelten Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe, wenn ſie für einen beſonderen Werth dieſer letztern unter einer unbeſtimmten Form erſcheinen. — Beſtimmung der Maxima und Minima ſolcher Functionen.

I. Beſtimmung des Werthes der entwickelten Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe, wenn ſie für einen beſonderen Werth dieſer letztern unter einer unbeſtimmten Form erſcheinen.

§. 85. Wir wollen uns in dieſem Kapitel mit zwei wichtigen Anwendungen der Differenzialrechnung beſchäftigen, und zwar zunächſt mit der Beſtimmung des Werthes einer Function von x, welche für einen beſonderen Werth x_0 von x unter der unbeſtimmten Form $\frac{0}{0}$ erſcheint.

Die Aufgabe läuft alſo darauf hinaus, die Grenze zu beſtimmen, gegen welche die Function:

$$\varphi x = \frac{fx}{Fx}$$

convergirt, wenn x gegen den Werth x_0 convergirt und die beiden Functionen fx, Fx zu gleicher Zeit für dieſen Werth von x verſchwinden (§. 28).

Nun hat man aber:

$$\varphi(x+\Delta x) = \frac{fx + \Delta \cdot fx}{Fx + \Delta \cdot Fx},$$

und für den Werth x_0, welcher fx und Fx verſchwinden macht:

$$\varphi(x_0+\Delta x) = \frac{\Delta \cdot fx}{\Delta \cdot Fx} = \frac{\frac{\Delta \cdot fx}{\Delta x}}{\frac{\Delta \cdot Fx}{\Delta x}};$$

folglich wenn man zu der Grenze übergeht:

$$\varphi x_0 = \frac{f'x_0}{F'x_0}.$$

Wenn die Functionen: $f'x$, $F'x$ ebenfalls für $x = x_0$ beide verſchwänden, wie die Functionen fx, Fx, ſo ergäbe ſich ganz auf dieſelbe Weiſe, daß

$$\varphi x_0 = \frac{f''x_0}{F''x_0}$$

wäre, u. ſ. f. Der auf dieſe Weiſe beſtimmte Werth von φx_0 kann übrigens Null, oder unendlich ſein.

Wenn der Werth x_0 die beiden Functionen fx und Fx unendlich machte, ſo würde er die Functionen:

$$\frac{1}{fx}, \quad \frac{1}{Fx},$$

deren reſp. Ableitungen der erſten Ordnung

$$-\frac{f'x}{(fx)^2}, \quad -\frac{F'x}{(Fx)^2}$$

ſind, verſchwinden machen. Man hätte folglich:

$$\frac{1}{fx_0} : \frac{1}{Fx_0} = \frac{f'x_0}{(fx_0)^2} : \frac{F'x_0}{(Fx_0)^2},$$

woraus folgt:

$$\frac{fx_0}{Fx_0} = \frac{f_1x_0}{F'x_0},$$

Hieraus ſchließen wir alſo mit Cauchy, daß die Regel zur Beſtimmung des Werthes von φx_0 dieſelbe bleibt, die Function $\frac{fx_0}{Fx_0}$ mag unter der einen oder unter der andern der unbeſtimmten Formen $\frac{0}{0}, \pm\frac{\infty}{\infty}$ erſcheinen.

§. 86. Durch Anwendung dieſer Regel findet man in Verbindung mit den im vorletzten Kapitel gegebenen Regeln des Differenzirens:

1) für $x = 0$:

$$\frac{a^x - b^x}{x} = \log.a - \log.b = \log.\left(\frac{a}{b}\right),$$

$$\frac{\log.\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot.x} = \frac{\sin.^2x}{x} = 2\sin.x\cos.x = 0,$$

$$\frac{x - \sin.x}{x^3} = \frac{1 - \cos.x}{3x^2} = \frac{\sin.x}{6x} = \frac{\cos.x}{6} = \frac{1}{6},$$

$$\frac{\sin.^3x}{x - \frac{1}{2}\sin.2x} = \frac{3\sin.^2x\cos.x}{1 - \cos.2x} = \frac{3\sin.x(2\cos.^2x - \sin.^2x)}{2\sin.2x}$$

$$= \frac{3\cos.x(2\cos.^2x - 7\sin.^2x}{4\cos.2x} = \frac{3}{2};$$

2) für $x = 1$:

$$\frac{\log.x}{x-1} = \frac{1}{x} = 1,$$

$$\frac{x-1}{x^n-1} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n},$$

$$\frac{x^{\frac{3}{2}} - 1 + (x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}} - x + 1} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x^2-1}}{3x\sqrt{x-1} - 1} = -\frac{3}{2},$$

$$\frac{x^{\frac{1}{2}} - 1 + (x-1)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x-1}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\infty} = 0.$$

§. 87. Wir wollen annehmen, daß ſich die Function Fx auf x reducirt, und daß die andere Function fx die Eigenſchaft beſitzt, mit x zugleich Null oder unendlich zu werden und unterſuchen, was für ein Verhältniß zwiſchen dieſer Function und der Veränderlichen x ſtatt findet, wenn beide zu gleicher Zeit Null oder unendlich werden. Dieſe Unterſuchung kommt auf die eben angeſtellte zurück und man findet z. B. für $x = 0$:

$$\frac{1 - \cos.x}{x} = 0,$$

und für $x = \infty$:

$$\frac{\log.x}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Hieraus ſieht man, daß der Sinusverſus eines unendlich kleinen Bogens gegen dieſen Bogen unendlich klein, und daß der Logarithmus einer unendlich großen Zahl gegen dieſe Zahl ebenfalls unendlich klein iſt.

Es ſei nun die Curve zu unterſuchen, deren Gleichung

$$y = x \log. x$$

iſt.

Für negative Werthe von x wird y imaginär und die Ordinate y iſt poſitiv oder negativ, je nachdem die Werthe von x größer oder kleiner als 1 ſind. Um den $x = 0$ entſprechenden Werth von y zu erhalten, ſetze man:

$$x = \frac{1}{z},$$

ſo erhält man:

$$y = -\frac{\log. z}{z}.$$

Nun iſt aber nach dem Vorhergehenden $y = 0$ für $z = \infty$ oder für $x = 0$, und außerdem hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \log. x + 1,$$

welche Größe für $x = 0$ unendlich wird, ſo daß die Curve die Axe der y im Anfangspunkte der Coordinaten berührt. Dieſes Beiſpiel kann zu dem bereits in §. 16 angeführten Beiſpiele transcendenter Curven gezählt werden, welche plötzlich in ihrem Laufe unterbrochen werden, ohne daß eine Wiedervereinigung zwiſchen zwei Zweigen derſelben Curve ſtattfindet, wie dieſes immer bei algebraiſchen Curven der Fall iſt.

§. 88. Wenn alle Ableitungen von fx und Fx zu gleicher Zeit mit dieſen Functionen ſelbſt Null oder unendlich würden und wenn durch die Anwendung der Regel in §. 85 der Factor, welchen ſie gleichzeitig Null oder unendlich macht, nicht herausgehoben würde; ſo würde das Verfahren unbrauchbar und man müßte den Werth von φx_0 durch beſondere Methoden beſtimmen. Wenn z. B.:

$$fx = \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x-1},$$
$$Fx = \sqrt{x^2-1}$$

iſt, und man ſetzt $x = 1$, ſo verſchwinden dieſe beiden Functionen und ihre Ableitungen aller Ordnungen werden zu gleicher Zeit unendlich. Aber wenn man $x - 1 = z$ ſetzt, ſo kommt:

$$\varphi x = \frac{\sqrt{1+z} - 1 + \sqrt{z}}{\sqrt{z(z+2)}},$$

und wenn man Zähler und Nenner dieſes Bruches durch

$$\sqrt{1+z} + 1 - \sqrt{z}$$

multiplicirt und den gemeinſchaftlichen Factor $\sqrt{z}$ des Zählers und Nenners hinwegläßt, ſo erhält man den Ausdruck:

$$\varphi x = \frac{2}{\sqrt{z+2} \cdot \{\sqrt{1+z} + 1 - \sqrt{z}\}},$$

welcher für $z = 0$ oder $x = 1$ gibt:

$$\varphi x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

§. 89. Bekanntlich kann eine Function nicht für einen beſonderen Werth der Veränderlichen unendlich werden, ohne daß alle ihre Ableitungen zu gleicher

Zeit unendlich werden (§. 35) und folglich muß die vorhergehende allgemeine Methode jedesmal unbrauchbar werden, wenn der Werth von x, für welchen fx und Fx verſchwinden, f'x und F'x unendlich macht. Dagegen kann man den Fall, wo die Ableitungen aller Ordnungen der Functionen fx und Fx zu gleicher Zeit verſchwinden, nur als einen Ausnahmefall betrachten, wenigſtens bei Functionen, welche ſich mathematiſch ausdrücken laſſen, und man hat daher Functionen angeführt, bei welchen dieſe Ausnahme ſtattfindet. Wenn man z. B.

$$fx = a^{-\frac{1}{x^n}}$$

ſetzt, wo a und n poſitive Zahlen bezeichnen, wovon die erſte größer iſt als die Einheit, ſo hat man:

$$f'x = \frac{n \log.a \cdot a^{-\frac{1}{x^n}}}{x^{n+1}},\quad f''x = n \log.a \cdot a^{-\frac{1}{x^n}} \left(\frac{n \log.a}{x^{(n+1)2}} - \frac{n+1}{x^{n+2}} \right),\ \text{etc.}$$

Wenn man $x = 0$ ſetzt, ſo wird die Größe:

$$fx = a^{-\frac{1}{x^n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{x^n}}}$$

unendlich klein oder Null, ſo daß alle Ableitungen f'x, f''x, ... unter der Form $\frac{0}{0}$ erſcheinen. Wir wollen daher

$$\frac{1}{x} = z$$

ſetzen, ſo kommt:

$$f'x = \frac{n \log.a \cdot z^{n+1}}{a^{z^n}},\quad f''x = \frac{n \log.a \cdot (n \log.a \cdot z^{(n+1)2} - (n+1)(z^{n+2})}{a^{z^n}},\ \text{etc.}$$

und der Werth $x = 0$ entſpricht $z = \infty$. Nun iſt aber leicht einzuſehen, daß jeder Ausdruck von der Form:

$$\frac{z^m}{a^{z^n}},$$

worin a, m und n poſitive Zahlen bezeichnen und $a > 1$ iſt, für $z = \infty$ verſchwindet; denn wenn man auf dieſen Ausdruck die Regel für die Beſtimmung des Werthes der Functionen, welche unter der unbeſtimmten Form:

$$\frac{\infty}{\infty}$$

erſcheinen, anwendet, indem man den Zähler und Nenner dieſes Bruches i mal hinter einander differenzirt, wo i die unmittelbar größere ganze Zahl als m bezeichnet, ſo erhält man für $z = \infty$:

$$\frac{z^m}{a^{z^n}} = \frac{k}{\psi z},$$

wo k eine conſtante Zahl und ψz eine Function iſt, welche unendlich bleibt, wenn z unendlich iſt. Es verſchwinden alſo für $x = 0$ alle Ableitungen der Function fx.

Wenn folglich:

$$fx = a^{-\frac{1}{x^n}},\quad Fx = b^{-\frac{1}{x^n}},$$

ist, wo b sowohl als a eine größere positive Zahl als die Einheit und n' n so wohl als n eine positive Zahl ist; so verschwinden die Ableitungen er Ordnungen des Zählers und Nenners des Bruches

$$\varphi x = \frac{a^{-\frac{1}{x^n}}}{b^{-\frac{1}{x^n}}}$$

r $x = 0$ und man kann folglich in diesem Falle die allgemeine Regel nicht wenden. Wenn $n' = n$ ist, so kommt:

$$\varphi x = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{x^n}}$$

ıb der Werth $x = 0$ macht φx zu Null oder unendlich, je nachdem $a >$ er $< b$ ist.

§. 90. Eben so findet man, daß der Werth des Bruches:

$$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

gen Null, und der Function:

$$\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x}$$

gen das Unendliche convergirt, wenn man für x eine immer kleiner werdende sitive Größe nimmt. Folglich ist der Werth der Function:

$$y = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x},$$

elche für $x = 0$ unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, Null, oder unendlich, je nachm man Null als die Grenze der positiven oder als die Grenze der negativen erthe von x betrachtet. Dieses rührt von einer Unterbrechung der Stetigkeit r Function y von der Art her, welche für die analogen Functionen in §. 16 d 87 angegeben sind. *)

*) Außer den beiden vorhin betrachteten unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ können auch noch andere, z. B. $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, ... vorkommen; allein diese lassen sich immer auf die beiden ersten zurückführen. Hat man z. B. $y = f(x) \cdot F(x)$ und ist $f(x_0) = 0$, $F(x_0) = \infty$, so daß y für $x = x_0$ unter der unbestimmten Form $0 \cdot \infty$ erscheint, so braucht man nur

$$y = \frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}} \quad \text{oder} \quad y = \frac{F(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

zu setzen, um y für $x = x_0$ auf die unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ zurückzuführen, deren Werth sich nach dem Vorhergehenden finden läßt.

Wenn ferner $y = [F(x)]^{f(x)}$ ist und man hat für $x = x_0$ successive: 1) $F(x_0) = 0$, $f(x_0) = 0$, 2) $F(x_0) = \infty$, $f(x_0) = 0$, 3) $F(x_0) = 1$, $f(x_0) = \infty$, so erscheint y resp. unter den folgenden drei unbestimmten Formen:

II. Maxima und Minima der entwickelten Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe.

§. 91. Denken wir uns die Reihe von Werthen, welche die Fun $y = fx$ annimmt, wenn man x alle möglichen Werthe beilegt, ohne da aufhört einen reellen und endlichen Werth anzunehmen.

Wenn die Werthe von y, nachdem sie zugenommen haben, abnehmen, hat y in dem Intervalle einen Werth durchlaufen, welcher größer ist, als unmittelbar vorhergehenden und die unmittelbar nachfolgenden Werthe und Maximum genannt wird. Wenn dagegen die Werthe von y, nachdem allmählig abgenommen haben, wieder zunehmen, so hat y in diesem Interv einen Werth durchlaufen, welcher kleiner ist, als die unmittelbar vorherge den und die unmittelbar nachfolgenden Werthe und ein Minimum gen wird. Hieraus sieht man, daß es möglich ist, daß eine Function, weder Maximum noch ein Minimum, oder daß sie mehrere Maxima und Mi habe, so daß ein Minimum immer zwischen zwei Maxima und ein Maxim zwischen zwei Minima fällt. Die in Rede stehende Aufgabe besteht nun da die Werthe der unabhängigen Veränderlichen zu bestimmen, welchen Ma und Minima der Function entsprechen, wenn es solche gibt.

Der Deutlichkeit wegen wollen wir zunächst annehmen, daß weder Function fx, noch ihre Ableitungen eine Unterbrechnung der Stetigkeit er ren, wenn eine dieser Functionen ein Maximum oder Minimum erreicht.

In dieser Voraussetzung ist einleuchtend, daß das Differenzial:

$$dy = f'x \cdot dx$$

das Zeichen verändert, indem es für ein Maximum oder Minimum von Null wird, in dem Falle des Maximums von Positiven zum Negativen, in dem Falle des Minimums vom Negativen zum Positiven übergeht. gemeinschaftliche Bedingung für das Maximum und Minimum von fx also ausgedrückt durch die Gleichung:

$$f'x = 0 \qquad (1)$$

und außerdem ist für das Maximum erforderlich, daß $f'x$ vom Positiven Negativen übergeht, d. h. abnimmt, wenn x zunimmt und daß folglich

$$f''x < 0.$$

Aus einem ähnlichen Grunde ist in dem Falle des Minimums erforder daß der aus der Gleichung (1) abgeleitete Werth der Ungleichheit

$$f''x > 0$$

genügt.

Aber wenn $f''x$ für denselben Werth von x verschwindet, für welchen verschwindet, so entspricht der Werth von $f'x = 0$ einem Maximum oder nimum dieser letzten Function. Im ersten Falle ist $f'x$ diesseits und jenseits Werthes x negativ und fx nimmt für zunehmende Werthe von x beständig während im zweiten Falle $f'x$ diesseits und jenseits des Werthes x negativ und fx mit x beständig zunimmt. Die Gleichung $f'x = 0$ führt also, w zugleich die Gleichung $f''x = 0$ stattfindet, weder zu einem Maximum noch einem Minimum von fx.

Aus demselben Grunde führt die Gleichung $f''x = 0$ weder auf Maximum, noch auf ein Minimum von $f'x$, wenn $f'''x = 0$ ist und w

---

1) 0^0, 2) ∞^0, 3) 1^∞.

Aus $y = [F(x)]^{f(x)}$ folgt aber $\log_e y = f(x) \log_e F(x)$ und:

$$y = e^{f(x) \cdot \log_e F(x)}.$$

Man braucht also bloß den Werth des Exponenten $f(x) \cdot \log_e F(x)$, wel für $x = x_0$ unter der unbestimmten Form $0 \cdot \infty$ erscheint, deren Werth leicht nach dem Vorhergehenden finden läßt. Z. d. Uebers

fx selbst durch ein Maximum oder Minimum geht. Wenn $f'x$ durch ein Maximum geht, so nimmt $f'x$ für zunehmende Werthe von x ab, und geht [illegible]lich durch Null vom Positiven zum Negativen über und fx geht durch ein [illegible]imum. Ebenso ergibt sich, daß in diesem Falle das Minimum von $f'x$ [illegible] Minimum von fx zur Folge hat.

Wenn man also zu gleicher Zeit

$$f'x = 0, \quad f''x = 0$$

[illegible], so geht fx nur in so fern durch ein Maximum oder Minimum, als $f''x$ [illegible]st durch ein Maximum oder Minimum geht, d. h. in so fern

$$f'''x = 0, \quad f^{r}x < 0,$$

[illegible]er

$$f'''x = 0, \quad f^{r}x > 0$$

In diesem Falle sagt man nach der Analogie, daß fx durch ein Maximum [illegible]r Minimum der zweiten Ordnung geht.

Wenn man das Vorhergehende verallgemeinert, so ergibt sich, daß die [illegible]nction fx für einen gegebenen Werth von x nur dann ein Maximum oder [illegible]imum haben kann, wenn der erste nicht für diesen Werth verschwindende Differenzialcoeffizient von gerader Ordnung ist, und zwar findet ein Maximum, oder Minimum statt, je nachdem dieser Coefficient einen negativen [illegible]r positiven Werth annimmt.

Alle diese Resultate lassen sich versinnlichen, wenn man die Function graphisch durch die Ordinate einer Curve darstellt. Denn die Gleichung $f'x = 0$ [illegible]ückt aus, daß die Tangente zu der Axe der Abscissen parallel ist und die Ungleichheiten $f''x < 0$, $f''x > 0$ drücken aus, daß die Curve in dem Falle einer [illegible]itiven Ordinate ihre Concavität oder Convexität und in dem Falle einer [illegible]gativen Ordinate ihre Convexität oder Concavität der Axe der x zukehrt. [illegible]enn endlich $f''x = 0$ ist, ohne daß $f'''x$ verschwindet, so erfährt die Curve [illegible]ne Inflexion (§. 30), so daß der Parallelismus der Tangente zu der Axe [illegible]r x nicht verhindert, daß die Ordinate zu beiden Seiten des Berührungs[illegible]ktes zu- oder abnimmmt.

§. 92. So oft also die Function fx einen algebraisch ausgedrückten Dif[illegible]renzialcoeffizienten $f'x$ hat, erhält man nach dem Vorhergehenden die Werthe [illegible] x, welche größten oder kleinsten Werthen der Function fx entsprechen, [illegible]n man die Gleichung $f'x = 0$ für x auflöst, und man unterscheidet alsn das Maximum von dem Minimum, wenn man die Wurzeln dieser Glei[illegible]ng in die Function $f''x$, und wenn diese verschwände, in $f'''x$ für x sub[illegible]uirt u. s. f.

Es ist aber zu bemerken, daß man oft nach der Natur der Aufgabe a [illegible]ori weiß, daß eine Function kein Maximum oder Minimum gestattet, so [illegible] man alsdann das Zeichen nicht zu untersuchen, sondern blos die Gleichung [illegible]$= 0$ aufzulösen braucht, wobei jedoch vorausgesetzt wird, daß man zugleich [illegible]ht, daß die Wurzeln dieser Gleichung die folgenden Ableitungen nicht ver[illegible]nden machen.

Wir wollen die allgemeine Regel auf die in §. 5 als Beispiel genom[illegible]ne Function:

$$fx = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$$

[illegible]wenden, so haben wir

$$f'x = \frac{x^2 - 20x + 64}{(x - 10)^2}.$$

Die aufzulösende Gleichung ist:

$$x^2 - 20x + 64 = 0,$$

deren Wurzeln $x = 16$ und $x = 4$ ſind. Ferner findet man:

$$f''x = \frac{72}{(x-10)^3},$$

welcher Werth für $x = 16$ poſitiv und für $x = 4$ negativ wird. Der Wu 16 entſpricht alſo ein Minimum und der Wurzel 4 ein Maximum.

Wenn

$$fx = e^x + 2\cos.x + e^{-x},$$

ſo findet man:

$$f'x = e^x - 2\sin.x - e^{-x},$$
$$f''x = e^x - 2\cos.x + e^{-x},$$
$$f'''x = e^x + 2\sin.x - e^{-x},$$
$$f^{IV}x = e^x + 2\cos.x + e^{-x} = fx.$$

Der Werth $x = 0$, welcher $f'x$, $f''x$, $f'''x$ verſchwinden macht, gibt $f^{IV}x$ den poſitiven Werth 4 und der entſprechende Werth von fx, welcher e falls $= 4$ iſt, bildet folglich ein Minimum dieſer Function.

§. 93. Nun kann es aber geſchehen, daß die Function $f'x$ das Zei verändert, indem ſie durch das Unendliche geht, und daß fx nichtsdeſtowen nur eine Stetigkeitsunterbrechung der zweiten Ordnung erfährt, ſo daß Differenzial:

$$dy = f'x\,dx$$

unendlich klein bleibt (§. 35 und §. 54). Unter dieſen Umſtänden ge durch ein Maximum oder durch ein Minimum, je nachdem dy vom Poſi zum Negativen, oder vom Negativen zum Poſitiven übergeht; allein man ſich hiervon direct durch die Unterſuchung der Function fx überzeugen, weil Ableitungen $f''x$, $f'''x$, etc. mit $f'x$ zugleich unendlich werden.

Wenn man z. B.:

$$fx = (x-1)^{\frac{2}{3}}$$

folglich:]

$$f'x = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{1}{3}}$$

hätte, ſo machte der Werth $x = 1$ die Function $f'x$ unendlich und fx ſchwinden. Ueberdies iſt, daß $f'x$ negativ oder poſitiv iſt, je nachdem Werthe von x kleiner oder größer als die Einheit ſind, während fx beſtä poſitiv bleibt, und folglich entſpricht der Werth $x = 1$ einem Minimum fx. Dieſes iſt der Fall, wo die Curve, deren Ordinate fx iſt, einen kleinſten Ordinate entſprechenden Rückkehrpunkt hat (Fig. 31).

Wenn man dagegen:

$$fx = (x-1)^{\frac{1}{3}},$$

folglich:

$$f'x = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}$$

ſetzte, ſo machte der Werth $x = 1$ die Function $f'x$ wieder unendlich un zu Null; allein die Function $f'x$ veränderte bei ihrem Durchgange durch Unendliche das Zeichen nicht mehr, während fx vom Negativen zum Poſitiv überginge und folglich weder ein Maximum, noch ein Minimum erreichte.

Unter dieſen Umſtänden erfährt die Curve eine Inflexion und die Tang im Inflexionspunkte iſt auf der Abſciſſenare ſenkrecht (Fig. 32).

Wenn die Wurzel der Gleichung $f'x = 0$ die Ableitung $f''x$ unend macht, ſo daß eine Stetigkeitsunterbrechung der dritten Ordnung für die Fu

…n fx stattfindet, so muß man wieder direct untersuchen, ob die Function f'x …m Positiven zum Negativen, oder vom Negativen zum Positiven übergeht, …der vielmehr, ob sie verschwindet, ohne das Zeichen zu verändern; denn im …ten Falle findet ein Maximum, im zweiten ein Minimum und im dritten …der ein Maximum noch ein Minimum statt. Diese drei Fälle finden resp. …r die folgenden drei Functionen statt:

$$fx = -(x-1)^{\frac{4}{3}},\quad fx = (x-1)^{\frac{4}{3}},\quad fx = (x-1)^{\frac{5}{3}}.$$

Endlich ist der Fall, wo alle Ableitungen einer Function zu gleicher Zeit …rschwinden (§. 89) offenbar einer von den Fällen, auf welche die allgemeine …egel zur Bestimmung der Maxima und Minima nicht anwendbar ist.

Die besonderen Maxima und Minima, wovon in dem gegenwärtigen §. …e Rede gewesen ist, verificiren das Kepler'sche Princip (§. 6) nicht, und …re Theorie ist bei der Anwendung auf physikalische Aufgaben von geringer …heblichkeit, weßwegen wir uns auch dabei nicht länger aufhalten wollen. …gegen veranlaßt uns die Wichtigkeit der Theorie der gewöhnlichen Maxima …d Minima, dieselbe noch durch die Untersuchung der drei folgenden Aufgaben …erläutern, welche in die Physik oder in die angewandte Geometrie gehören.

§. 94. Aufgabe 1. — Eine auf eine horizontale Tafel AB …g. 33) gestellte Scheibe m wird durch ein Licht F erleuchtet, …ssen Fuß B sich in einer unveränderlichen Entfernung von der …heibe m befindet; aber welches man nach der Verticale BF …f- oder abwärts bewegen kann, und man soll nun bestimmen, …welcher Höhe das Licht befestigt werden muß, damit die Scheibe …m stärksten erleuchtet wird.

Die Dimensionen der Scheibe und des leuchtenden Brennpunktes werden …en die gegenseitige Entfernung derselben als Größen betrachtet, welche ihrer …einheit wegen vernachlässigt werden können, und außerdem ist aus der Theorie …d Erfahrung bekannt, daß die Intensität des von einem leuchtenden Punkte …f ein Flächenelement geworfenen Lichtes im directen Verhältnisse des Sinus …s Winkels steht, welchen die Lichtstrahlen mit dieser Fläche bilden und im …gekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung des erleuchteten Flä…chenelementes von dem leuchtenden Punkte.

Es sei a die unveränderliche Entfernung mB des Mittelpunktes der Scheibe …m Fußpunkte der durch den leuchtenden Punkt F gezogenen Verticale, x der …änderliche Winkel BmF, $\delta = \frac{a}{\cos. x}$ die Entfernung mF, fx die Inten…sität des auf die Scheibe fallenden Lichtes und A die Intensität des Lichtes, …elches sie bei senkrecht einfallenden Strahlen und in einer der Längeneinheit …leichen Entfernung vom leuchtenden Punkte erhält; so hat man:

$$fx = \frac{A \sin. x}{\delta^2} = \frac{A}{a^2} \cdot \sin. x \cos.^2 x.$$

Die Gleichung f'x = 0 ist in diesem Falle:

$$\cos.^3 x - 2 \cos. x \sin.^2 x = 0$$

…d zerfällt in:

$$\cos. x = 0,\quad \text{tang.} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

…ner hat man:

$$f''x = \frac{A}{a^2} \cdot (9 \sin.^2 x - 7) \sin. x,$$

und die Auflösung cos x = 0 gibt:

$$fx = 0, \quad \text{sin. } x = \pm 1, \quad f'x = \pm \frac{2A}{a^2}.$$

Die negativen Werthe von x oder von sin. x würden für fx negative Werthe geben, und entsprechen daher der Aufgabe nicht in dem Sinne, in sie aufgestellt ist, obgleich man annehmen kann, daß die Werthe von fx positiv oder als negativ betrachtet werden, je nachdem die obere oder die untere Fläche der Scheibe erleuchtet wird. In der That ist einleuchtend, daß die Intensität des auf die Scheibe fallenden Lichtes ohne Ende abnimmt, wenn der leuchtende Punkt ohne Ende aufwärts bewegt wird, und folglich kann hier nur von einem mathematischen Minimum die Rede sein, welches sich physisch nicht realisiren läßt.

Die Auflösung:

$$\text{tang. } x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

welche uns allein interessirt, gibt:

$$fx = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{A}{a^2}, \quad f'x = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{A}{a^2}$$

und entspricht dem gesuchten Maximum.

§. 95. Aufgabe 2. — Auf der geraden Linie, welche zwei Wärme ausstrahlende Punkte verbindet, den Punkt zu finden, welcher am wenigsten erwärmt, wenn sich die Intensität der strahlenden Wärme im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung von dem strahlenden Brennpunkte ändert.

Wir wollen annehmen, daß sich die Intensitäten der strahlenden Punkte A, B in der Einheit der Entfernung wie die Zahlen α^3 und β^3 verhalten. Durch a wollen wir die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte A, B und durch x die Entfernung des erhitzten Punktes von dem strahlenden Punkte A bezeichnen; so wird die Intensität der strahlenden Wärme, welche dieser Punkt erhält, ausgedrückt durch:

$$fx = \frac{\alpha^3}{x^2} + \frac{\beta^3}{(a-x)^2}.$$

und dieser Ausdruck wird zu einem Minimum gemacht, wenn man

$$f'x = -\frac{2\alpha^3}{x^3} + \frac{2\beta^3}{(a-x)^3} = 0$$

setzt. Die Werthe $x = \pm \infty$ genügen dieser Gleichung und machen fx verschwinden; aber die gesuchte Auflösung wird erhalten, wenn man

$$\beta^3 x^3 = \alpha^3 (a-x)^3, \quad \text{oder} \quad x = \frac{a\alpha}{\alpha + \beta}$$

setzt, und da die Ableitung:

$$f''x = 6\left[\frac{\alpha^3}{x^4} + \frac{\beta^3}{(a-x)^4}\right]$$

stets positiv bleibt, so folgt, daß die Auflösung einem Minimum entspricht. Endlich entsprechen die Werthe x = 0 und x = a, welche f'x unendlich machen und für welche fx dieselbe Stetigkeitsunterbrechung erfährt, keinem Maximum in dem gewöhnlichen Sinne des Wortes. Diese unendlichen Werthe von fx sind auch aus ähnlichen Gründen, wie die bereits in §. 4 angeführten physisch unzulässig.

§. 96. Aufgabe 3. — Wenn man die Höhe h einer verticalen Linie AB (Fig. 34) messen will, so mißt man von ihrem Fuß

nkte B aus eine horizontale Länge BC = b und beobachtet den inkel BCA = x, und alsdann hat man:

$$h = b \text{ tang. } x. \qquad (2)$$

Man ſoll nun die willkührliche Baſis b ſo wählen, daß man s vortheilhafteſte Dreieck bekommt, d. h. das Dreieck, welches Eigenſchaft hat, daß demſelben Fehler bei der Meſſung des nkels x der kleinſte Fehler der geſuchten Höhe h entſpricht.

Wenn man ſtatt des genauen Winkels x einen etwas davon verſchiedenen nkel $x + \Delta x$ beobachtet, ſo kann der ſich daraus ergebende Werth der geſuchten Höhe durch $h + \Delta h$ ausgedrückt werden, und man hat nahezu:

$$\Delta h = \frac{d \cdot (b \text{ tang. } x)}{dx} \Delta x = \frac{b}{\cos.^2 x} \cdot \Delta x.$$

Soll alſo das Verhältniß des Fehlers Δh an dem berechneten Werthe dem Beobachtungsfehler Δx ein Minimum werden, ſo muß der wahre Werth s Winkels x und der davon abhängige Werth der Baſis b den Factor:

$$\frac{b}{\cos.^2 x}$$

einem Minimum machen, d. h. wenn man für b ſeinen durch die Gleichung als Function von x und h gegebenen Werth ſubſtituirt, den Factor:

$$\frac{h}{tg\, x \cos.^2 x}.$$

Die Aufgabe läuft alſo darauf hinaus, die Function:

$$fx = \text{tang. } x \cos.^2 x = \sin. x \cos. x$$

einem Maximum zu machen.

Nun hat man aber:

$$f'x = \cos.^2 x - \sin.^2 x, \quad f''x = -4 \sin. x \cos. x,$$

ß das geſuchte Maximum entſpricht folglich:

$$\sin. x = \cos. x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = h.$$

Dieſes iſt die bekannte praktiſche Regel, welche man ſo zu ſagen inſtinctmäßig findet, wovon aber nur die Rechnung einen ſtrengen Beweis geben kann.

Die Auflöſung:

$$\sin. x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ßt die Aufgabe analytiſch auf; allein ſie hat nach den geometriſchen Bedingungen der Aufgabe keinen Sinn mehr.

§. 97. Es ſei $y = fx$, $x = \varphi t$, ſo hat man:

$$\frac{dy}{dt} = f'x \cdot \varphi' t,$$

nd folglich zerfällt die Gleichung:

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

in ſelbſt in die beiden anderen:

$$f'x = 0, \quad \varphi' t = 0,$$

nen jede Maxima oder Minima von y, als mittelbare Function von t beſtimmen, beſtimmen kann. Aber wenn die aus der Gleichung $f'x = 0$ abge-

leiteten Zahlenwerthe von x größer ſind, als der größte Werth der
φt, oder kleiner als ihr kleinſter Werth, ſo müſſen dieſe Auflöſungen
Aufgabe, welche in der Beſtimmung der Maxima und Minima von y,
t die unabhängige Veränderliche iſt, beſteht, nicht entſprechend verworfen

Wenn man alſo die Werthe von x, welche den aus der Gleichung
abgeleiteten Werthen von t entſprechen, nach der Folge ihrer Größe
müſſen die Wurzeln der Gleichung f'x zwiſchen die beiden äußerſten
dieſer Reihe fallen.

Viertes Kapitel.

Taylor'ſche und Maclaurin'ſche Formel.

1) Taylor'ſche Formel.

§. 98. Die Erzeugung der Ableitungen der verſchiedenen Ordnungen
auf die Entwickelung der Functionen in Reihen, welche nach den ganzen
ſteigenden Potenzen der unabhängigen veränderlichen Größe fortſchreiten.
wichtige Theorie, welche man aus mehreren Geſichtspunkten betrachten
ſoll der Gegenſtand des gegenwärtigen Kapitels ſein.

Wenn wir, wie im 4ten Kapitel des erſten Buches durch:

$$y,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_n,$$

die Werthe einer Function fx bezeichnen, welche den Werthen:

$$x,\ x+\Delta x,\ x+2\Delta x,\ x+3\Delta x,\ \ldots\ x+n\Delta x$$

der unabhangigen Veränderlichen entſprechen, ſo haben wir nach §. 43:

$$y_n = f(x+n\Delta x) = y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y + \ldots + \Delta^n y.$$

Dieſe Gleichung kann man auch auf folgende Form bringen:

$$f(x+n\Delta x) = fx + \frac{n\Delta x}{1}\cdot\frac{\Delta fx}{\Delta x} + \frac{n^2\Delta x^2}{1\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\Delta^2 fx}{\Delta x^2} + \frac{n^3\Delta x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{\Delta^3 fx}{\Delta x^3} + \ldots + \frac{n^n\Delta x^n}{1.2.3\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{\Delta^n fx}{\Delta x^n},$$

und wenn man $n\Delta x = h$ ſetzt, ſo verwandelt ſie ſich in:

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1}\cdot\frac{\Delta fx}{\Delta x} + \frac{h^2}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\Delta^2 fx}{\Delta x^2} + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{\Delta^3 fx}{\Delta x^3} + \ldots\ldots + \frac{h^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{\Delta^n fx}{\Delta x^n}. \quad (G$$

Wir wollen uns nun vorſtellen, daß das Intervall Δx ohne Ende abnim
indem die Zahl n ohne Ende vergrößert wird, und zwar ſo, daß das Pro

Δx immer der conſtanten Größe h gleich bleibt; ſo nimmt die Anzahl der Glieder, woraus der zweite Theil der vorhergehenden Gleichung beſteht, fortwährend zu, und die Verhältniſſe:

$$\frac{\Delta fx}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta^2 fx}{\Delta x^2}, \quad \frac{\Delta^3 fx}{\Delta x^3}, \ldots\ldots$$

convergiren gegen die Grenzen:

$$\frac{dfx}{dx}, \quad \frac{d^2fx}{dx^2}, \quad \frac{d^3fx}{dx^3}, \ldots\ldots$$

oder:

$$f'x, \; f''x, \; f'''x, \ldots\ldots$$

Ferner convergiren die Brüche:

$$1-\frac{1}{n},$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right),$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{i-1}{n}\right),$$

alle gegen die Einheit, indem i eine beliebige poſitive Zahl $< n$ bezeichnet, welche während des Zunehmens von n conſtant bleibt. Man kann alſo, wie groß die Zahl i auch ſein und welchen Werth man dem Zuwachſe h auch beilegen mag, die Zahl n doch immer ſo groß annehmen, daß die Summe der $i+1$ erſten Glieder des zweiten Theiles der Gleichung (a) beliebig wenig von der Summe:

$$fx + \frac{h}{1}f'x + \frac{h^2}{1\cdot 2}f''x + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''x + \ldots\ldots\ldots + \frac{h^i}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i}f^{(i)}x, \quad (b)$$

verſchieden iſt, wobei wir annehmen, daß die Functionen fx, $f'x$, $f''x$, $\ldots\ldots f^{(i)}x$ ſämmtlich endliche Werthe behalten, weil ſonſt die vorhergehenden Schlüſſe nicht ſtattfinden würden.

Dieſes berechtigt uns jedoch noch nicht, die Function $f(x+h)$ als die Summe der ins Unendliche fortlaufenden Reihe (b) zu betrachten (§. 24). Denn wenn man in der Reihe (a), wovon wir ausgegangen ſind und welche der genaue Werth von $f(x+h)$ iſt, das Glied vom $(\nu+1)^{ten}$ Range betrachtet, wo ν eine zwiſchen i und n liegende, aber weit größere Zahl als i und mit n vergleichbar iſt, bezeichnet; ſo reducirt ſich dieſes Glied nicht mehr nahezu auf:

$$\frac{h^\nu}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\nu}f^{(\nu)}x,$$

weil ſich der Factor:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\right)$$

nicht mehr nahezu auf die Einheit, ſondern im Gegentheil für Werthe von ν, welche der Zahl n ſehr nahe kommen, ſich nahezu auf Null reducirt.

Aber wenigſtens kann man immer ſetzen:

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''x + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''x +$$

$$\ldots\ldots + \frac{h^i}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i} f^{(i)}x + R_i,$$

wo R_i eine unbekannte Function von x und h bezeichnet, und wenn wir die Bedingungen aufstellen, daß der Werth dieser Function zwischen Grenzen fällt, welche sich für ohne Ende zunehmende Werthe des Index i ohne Ende zusammenziehen lassen; so haben wir eben dadurch die Bedingungen bestimmt, unter welchen die Function $f(x+h)$, als die Summe der ins Unendliche fortlaufenden Reihe (b) betrachtet werden kann.

§. 99. Zu diesem Zwecke wollen wir zunächst bemerken, daß, wenn eine Function φh für $h = 0$ verschwindet und ihre Ableitung $\varphi' h$ zwischen den Grenzen 0, h dasselbe Zeichen behält, ohne durch das Unendliche zu gehen, die Function φh dasselbe Zeichen hat, als $\varphi' h$; denn man kann sie, als die Summe unendlich kleiner Elemente betrachten, welche alle dasselbe Zeichen haben, wie $\varphi' h$. Wir setzen voraus, daß die Veränderliche h unabhängig und die Grenze h positiv ist, und für eine negative Grenze würden die Resultate die umgekehrten sein.

Dieses vorausgesetzt, wollen wir nun, wie es gestattet ist, der unbekannten Function R_i die Form:

$$R_i = \frac{h^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i+1)} \cdot \varphi(x, h)$$

geben, wo φ eine andere unbekannte Function bezeichnet; so bestimmt man offenbar die untere und obere Grenze von R_i, wenn man Zahlen P, Q von solcher Beschaffenheit angibt, daß für alle Werthe von h:

$$\left.\begin{aligned} f(x+h) - \Big\{ fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''x + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''x + \ldots \\ + \frac{h^i}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i} f^{(i)}x + \frac{h^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i+1)} P \Big\} > 0, \\ f(x+h) - \Big\{ fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''x + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''x + \ldots \\ + \frac{h_i}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i} f^{(i)}x + \frac{h^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i+1)} Q \Big\} < 0. \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

ist.

Es bezeichnen $\varphi_1 h$, $\varphi_2 h$ die ersten Theile dieser Ungleichheiten, so verschwinden die Functionen φ_1, φ_2, wenn man darin $h = 0$ setzt, und folglich werden diese Ungleichheiten nach der vorhergehenden Bemerkung erfüllt, wenn für alle Werthe von h:

$$\varphi'_1 h = \frac{d\cdot \varphi_1 h}{dh} > 0, \quad \varphi'_2 h = \frac{d\cdot \varphi_2 h}{dh} < 0,$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} f(x+h) - \Big\{ fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''x + \ldots. \\ + \frac{h^{(i-1)}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i-1)} f^{(i-1)}x + \frac{h^i}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i} P \Big\} > 0, \\ f'(x+h) - \Big\{ f'x + \frac{h}{1} f''x + \frac{h^2}{1\cdot 2} f'''x + \ldots. \\ + \frac{h^{i-1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i-1} f^{(i-1)}x + \frac{h^i}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i} Q \Big\} < 0. \end{aligned}\right\} \quad (c')$$

ist.

Aber $\varphi'_1 h$, $\varphi'_2 h$ sind auch Functionen von h, welche für $h = 0$ verschwinden; folglich werden die Ungleichheiten (c') und mithin die Ungleichheiten (c) erfüllt, wenn man hat:

$$\varphi''_1 h = \frac{d^2 \cdot \varphi_1 h}{dh^2} > 0, \quad \varphi''_2 h = \frac{d^2 \cdot \varphi_2 h}{dh^2} < 0,$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} f''(x+h) - \Big\{ f''x + \frac{h}{1} f'''x + \ldots. + \frac{h^{i-2}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i-2)} f^{(i-2)}x \\ + \frac{h^{i-1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i-1)} P \Big\} > 0, \\ f''(x+h) - \Big\{ f''x + \frac{h}{1} f'''x + \ldots. + \frac{h^{i-2}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i-2)} f^{(i-2)}x \\ + \frac{h^{i-1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i-1)} Q \Big\} < 0. \end{aligned}\right\} \quad (c'')$$

Wenn man diese Schlüsse weiter fortsetzt, so gelangt man nach $i + 1$ successiven Differenzirungen zu den Ungleichheiten:

$$\left.\begin{aligned} f^{(i+1)}(x+h) - P > 0. \\ f^{(i+1)}(x+h) - Q < 0, \end{aligned}\right\} (c^{(i+1)}).$$

Nun werden aber diese letzten und folglich auch die ursprünglichen Ungleichheiten (c) erfüllt, wenn man für P und Q resp. den kleinsten und den größten Werth nimmt, welchen die abgeleitete Function:

$$f^{(i+1)}z$$

für die zwischen x und $x + h$ liegenden Werthe von z annimmt.

Wenn diese Function von x bis $x + h$ beständig zu- oder abnähme, so könnte man setzen:

$$P = f^{(i+1)}(x), \quad Q = f^{(i+1)}(x+h),$$

oder umgekehrt:

$$P = f^{(i+1)}(x+h), \quad Q = f^{(i+1)}(x).$$

Der Rest R_i wird also ausgedrückt durch:

$$\frac{h^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i+1)} f^{(i+1)}(x + \theta h),$$

wo θ eine zwischen 0 und 1 liegende unbekannte Zahl bezeichnet, so daß $x + \theta h$ zwischen x und $x + h$ fällt.

Wir ſetzen demnach:

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''x + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''x + \ldots.$$

$$+ \frac{h^i}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i} f^{(i)}x + \frac{h^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i+1)} f^{(i+1)}(x + \theta h). \quad (A)$$

Wenn nun die Zahlenwerthe der Functionen:

$$f^{(i+1)}z$$

für alle Werthe von z zwiſchen x und $x + h$ und für alle möglichen Werthe des Index i eine gewiſſe Grenze λ nicht überſchreiten; ſo hat man numeriſch:

$$R_i < \frac{h^{i+1}\lambda}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (i+1)},$$

und alsdann kann man, welchen Werth h auch haben mag, den Index i immer ſo groß annehmen, daß R_i kleiner wird, als jede gegebene Größe. In dieſem Falle iſt folglich die Function $f(x+h)$ die Summe der ins Unendliche fortlaufenden Reihe (b), was wir auf folgende Weiſe ausdrücken wollen:

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''x + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''x + \text{etc.} \quad (B)$$

Dieſe Formel führt den Namen des engliſchen Geometers Taylor, welcher ſie entdeckt hat, und ſie wird in der Analyſis fortwährend angewandt. Man hat eine Menge von Beweiſen für dieſe Formel gegeben. Der vorhergehende, wie wir denſelben dargeſtellt haben, ſcheint uns vollkommen ſtreng zu ſein, und wir haben denſelben nicht blos deßwegen vorgezogen, um uns dem von dem Erfinder eingeſchlagenen Wege möglichſt zu nähern, ſondern auch, weil uns derſelbe ſehr dazu geeignet zu ſein ſcheint, den Sinn und die Ausdehnung der Anwendbarkeit dieſer Fundamentalformel genau zu fixiren.

§. 100. Es wird jedoch nicht unzweckmäßig ſein, hier noch eine andere Beweisart dieſer Formel mitzutheilen. Zu dem Zwecke kann man immer ſetzen:

$$f(x+h) = fx + h\varphi(x, h),$$

wo die unbekannte Function φ ſo beſchaffen ſein muß, daß ſich das Glied $h\varphi(x, h)$ für $h = 0$ auf Null reducirt. Hieraus ergibt ſich der Ausdruck:

$$\varphi(x, h) = \frac{f(x+h) - fx}{h},$$

welcher unter der Form $\frac{0}{0}$ erſcheint und ſich bekanntlich auf $f'x$ reducirt, wenn man darin $h = 0$ ſetzt. Wir können demnach ſetzen:

$$\varphi(x, h) = f'x + h\varphi_1(x, h),$$

woraus folgt:

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + h^2 \varphi_1(x, h),$$

$$\varphi_1(x, h) = \frac{f(x+h) - fx - h f'x}{h^2}.$$

Dieſer Ausdruck von φ_1 reducirt ſich für $h = 0$ wieder auf $\frac{0}{0}$. Wenn man die allgemeine Regel in §. 85 auf den vorhergehenden Bruch anwendet, indem man von dem Zähler und Nenner deſſelben in Beziehung auf h die Ableitungen nimmt; ſo erhält man:

$$\varphi_1(x, 0) = \frac{f'(x+h) - f'x}{1 \cdot 2 \cdot h},$$

und wenn man von Neuem differenzirt, um die noch ſtattfindende Unbeſtimmtheit zu beſeitigen, ſo kommt:

$$\varphi_1(x, 0) = \frac{f''x}{1 \cdot 2},$$

woraus folgt:

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1 \cdot 2}\left[f''x + h\,\varphi_2(x, h)\right].$$

Hieraus ſieht man ſchon, daß man daſſelbe Entwickelungsgeſetz erhält wie vorhin, worauf man die Grenzen des Reſtes R_i auf dieſelbe Weiſe beſtimmen muß.

§. 101. Wenn man endlich die Grundregeln der Integralrechnung anwenden will, welche bereits in §. 55 auseinandergeſetzt ſind, ſo findet man nicht blos das Geſetz der Taylor'ſchen Reihe und die Grenzen des Reſtes R_i, ſondern auch den Werth von R_i durch ein beſtimmtes Integral ausgedrückt auf dem directeſten Wege. Denn von welcher Beſchaffenheit die Function fx auch ſein mag, ſo hat man, wofern ſie nur zwiſchen den Grenzen x und $x+h$ ſtetig bleibt, doch immer:

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'x \cdot dx.$$

Zur beſſeren Unterſcheidung der wirklichen veränderlichen Größe x unter dem Integrationszeichen von dem in dem Ausdrucke der Grenzen vorkommenden Werthe von x, kann man ſetzen:

$$f(x+h) - fx = \int_x^{x+h} f'x' \cdot dx',$$

oder auch, wenn man die veränderliche Größe vertauſcht und $x' = x + h - z$, alſo $dx' = -dz$ ſetzt:

$$f(x+h) - fx = -\int_h^0 f'(x+h-z)dz = \int_0^h f'(x+h-z)dz.$$

Die Formel (8) in §. 55 verwandelt ſich, wenn man darin z für x ſetzt und für die untere Grenze der Integrale $z_0 = 0$ und für die obere Grenze derſelben $z = h$ nimmt, in:

$$\int_0^h \varphi z \cdot \psi' z dz = \varphi h \cdot \psi h - \varphi(0) \cdot \psi(0) - \int_0^h \psi z \cdot \varphi' z dz. \quad (d)$$

Wenn man in dieſer Formel

$$\varphi z = f'(x+h-z),\ \psi z = z,$$

folglich:

$$\varphi(0) = f'(x+h),\ \varphi h = f'x,\ \psi(0) = 0,\ \psi h = h,$$
$$\varphi' z = -f''(x+h-z),\ \psi' z = 1$$

ſetzt, ſo kommt:

$$\int_0^h f'(x+h-z)dz = hf'x + \int_0^h zf''(x+h-z)dz,$$

und folglich:

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \int_0^h zf''(x+h-z)dz.$$

Wenn wir nun in die Formel (d) die Vorausſetzung:

$$\varphi z = f'(x + h - z),\ \psi z = \frac{1}{2} z^2,$$

folglich:

$$\varphi(0) = f'(x + h),\ \varphi h = f'x,\ \psi(0) = 0,\ \psi h = \frac{1}{2} h^2,$$

$$\varphi' z = - f''(x + h - z),\ \psi' z = z$$

einführen, ſo erhalten wir:

$$\int_0^h z f''(x + h - z)\, dz = \frac{1}{2} h^2 f'x + \frac{1}{2} \int_0^h z^2 f'''(x + h - z) dz,$$

und folglich:

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''x + \frac{1}{1 \cdot 2} \int_0^h z^2 f'''(x + h - z)\, dz.$$

Ebenſo würde man finden:

$$f(x + h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''x + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''x + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \int_0^h z^3 f^{IV}(x + h - z) dz,$$

und durch weitere Fortſetzung dieſer Rechnung würde man finden:

$$f(x + h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''x + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''x + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{h^i}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots i} f^{(i)}x + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots i} \int_0^h z^i f^{(i+1)}(x + h - z)\, dz.$$

Wenn man nun, wie weiter oben durch P und R reſp. den kleinſten und größten Werth von:

$$f^{(i+1)}(x + h - z),$$

für die zwiſchen 0 und h liegenden Werthe von z bezeichnet, ſo hat man:

$$\int_0^h z^i f^{(i+1)}(x + h - z)\, dz > P \int_0^h z^i\, dz,$$

oder:

$$\int_0^h z^i f^{(i+1)}(x + h - z)\, dz > \frac{P h^{i+1}}{i + 1};$$

denn die Ableitung der Function $\frac{z^{i+1}}{i+1}$ iſt $= z^i dz$ (§. 59). Aus demſelben Grunde hat man:

$$\int_0^h z^i f^{(i+1)}(x + h - z)\, dz < \frac{Q h^{i+1}}{i + 1};$$

folglich fällt der Werth von R_i zwiſchen:

$$\frac{P h^{i+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (i + 1)} \text{ und } \frac{Q h^{i+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (i + 1)},$$

und man hat ferner den Ausdruck:

$$R_i = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots i} \int_0^h z^i f^{(i+1)}(x + h - z)\, dz, \qquad (e)$$

deſſen Werth man vermittelſt der ſpäter zu erörternden Methoden genau oder näherungsweiſe berechnen kann, wenn die Function f und folglich die Ableitung $f^{(i+1)}$ gegeben iſt.

§. 102. Wenn wir in der Formel (A) für x die Größe z und dann x — z für h ſetzen, ſo verwandelt ſie ſich in folgende:

$$fx = fz + \frac{x-z}{1}f'z + \frac{(x-z)^2}{1\cdot 2}f''z + \ldots\ldots + \frac{(x-z)^i}{1\cdot 2\ 3\ldots i}f^{(i)}z + \varphi z, \quad (\varphi)$$

wo der Kürze wegen

$$\varphi z = \frac{(x-z)^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i+1}f^{(i+1)}[z+\theta(x-z)]$$

geſetzt iſt.

Für i = 0 gibt die vorhergehende Formel:

$$fx = fz + (x-z)\,f'[z+\theta_1(x-z)],$$

wo θ_1 wie θ eine zwiſchen 0 und 1 liegende, aber im Allgemeinen von θ verſchiedene Zahl bezeichnet, und hieraus ergibt ſich, wenn man φ für f ſetzt:

$$\varphi x = \varphi z + (x-z)\,\varphi'[z+\theta_1(x-z)]. \quad (\varphi')$$

Aber nach der Gleichung (φ) hat man offenbar $\varphi x = 0$, und wenn man dieſe Gleichung (φ) in Beziehung auf z differenzirt, und die ſich gegenſeitig aufhebenden Glieder hinwegläßt, ſo bleibt:

$$\varphi' z = -\frac{(x-z)^i}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i}f^{(i+1)}z,$$

woraus folgt:

$$\varphi'[z+\theta_1(x-z)] = -\frac{(1-\theta_1)^i(x-z)^i}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i}f^{(i+1)}[z+\theta_1(x-z)].$$

Aus der Gleichung (φ') ergibt ſich alſo:

$$\varphi z = \frac{(1-\theta_1)^i(x-z)^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i}f^{(i+1)}[z+\theta_1(x-z)],$$

und man kann in der Formel (A) für den Ausdruck des Reſtes:

$$R_i = \frac{h^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(i+1)}\cdot f^{(i+1)}(x+\theta h),$$

den von Cauchy zuerſt gefundenen gleichbedeutenden Ausdruck:

$$R_i = \frac{(1-\theta_1)^i h^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots i}\cdot f^{(i+1)}(x+\theta_1 h)$$

ſetzen.

§. 103. Auf welche Weiſe man auch zu der Taylor'ſchen Reihe gelangen mag, ſo hat ſie doch nur in ſo fern einen Sinn, als man ſich die erhaltene Reihe von Gliedern durch einen Reſt ergänzt denkt, welcher in gewiſſen Fällen kleiner werden kann, als jede gegebene Größe, und alsdann kann man die ins Unendliche fortlaufende Reihe als der gegebenen Function gleichbedeutend betrachten. In dieſer Vorausſetzung muß zwar die Reihe convergent ſein; allein das Umgekehrte findet nicht ſtatt, und die unendliche Reihe könnte convergent ſein, ohne daß der Reſt R_i, welchen man immer direct berechnen muß, ohne Ende abnähme. In dieſem Falle würde die Taylor'ſche Reihe unbrauchbar und die Summe der convergenten Reihe würde nicht mit der gegebenen Function übereinſtimmen.

Um ſich von der Wahrheit dieſes Satzes zu überzeugen, braucht man nur zu bemerken, daß die Function fx bei den vorhergehenden Betrachtungen als

eine beliebige Function vorausgeſetzt iſt, ſo daß ſie ſowohl eine mathematiſche, als empiriſche Function ſein kann. Zur Anwendung der erhaltenen Formeln genügt es, daß dieſe Function und ihre Ableitungen aller Ordnungen keine den verſchiedenen Werthen der unabhängigen Veränderlichen von x bis $x+h$ incl. entſprechende Stetigkeitsunterbrechung erfahren. Da nun die Form der Curve $y = fz$ zwiſchen den Werthen $z = x$ und $z = x+h$ willkührlich iſt und nicht von der Form der Curve in der Nähe des Anfangspunktes abhängt; ſo würde es ungereimt ſein, wenn man annehmen wollte, daß die Größen:

$$fx,\ f'x,\ f''x,\ f'''x,\ \ldots\ldots,$$

welche ſich alle auf den Anfangspunkt beziehen, implicite den Lauf der Curve in dem ganzen betrachteten Intervalle beſtimmten. Die Function $f(x+h)$ kann alſo im Allgemeinen nicht durch die Reihe der Größen $fx,\ f'x,\ \ldots\ldots,$ ſelbſt wenn ſie ins Unendliche fortlaufen, beſtimmt werden. Aber ſobald man den Reſt R_i in Betracht zieht, bei deſſen Beſtimmung alle Werthe der Function in dem Intervalle von x bis $x+h$ in Rechnung gebracht werden müſſen, verſchwindet dieſe Schwierigkeit und es kann der Zuläſſigkeit der Entwickelung nichts mehr entgegen ſtehen.

Man könnte zwar annehmen, daß, wenn in dem Intervalle von $z = x$ bis $z = x+h$ zwei nicht identiſche Functionen fz, f_1z dennoch ſo beſchaffen wären, daß:

$$f_1x = fx,\ f'_1x = f'x,\ f''_1x = f''x,\ \ldots\ldots \qquad (f)$$

wäre, wenigſtens eine dieſer Functionen für $z = x$ eine Stetigkeitsunterbrechung irgend einer Ordnung erfahren müßte, was ſchon hinreichend wäre, um die Taylor'ſche Reihe nicht ins Unendliche fortlaufen laſſen zu können und was auf den bereits erwähnten Ausnahmefall hinausliefe. In der That haben wir bereits in §. 37 angenommen und werden es ſpäter beweiſen, daß, wenn die Functionen fz, f_1z explicite oder implicite durch algebraiſche Gleichungen beſtimmt werden, die Reihe der Gleichungen (f) die Identität der beiden Functionen zur Folge hat, ſo daß, wenn die beiden Functionen in einem Theile ihrer Verlaufes denſelben algebraiſchen Ausdruck und in einem anderen Theile ihres Laufes verſchiedene algebraiſche Ausdrücke hätten, ſie nothwendig bei dem Uebergange von dem einen Ausdrucke zu dem andern eine Stetigkeitsunterbrechung irgend einer Ordnung erfahren würden. Aber nichts berechtigt uns, dieſe Bemerkung auf empiriſche oder auch nur auf transcendente Functionen auszudehnen, wie Cauchy an einem ſehr einfachen Beiſpiele gezeigt hat.

Wenn man z. B.

$$f_1z = fz + e^{-\frac{1}{z^2}}$$

ſetzt, wo fz eine beliebige Function bleibt, ſo haben wir in §. 89 geſehen, daß für $z = 0$ die Ableitungen aller Ordnungen der transcendenten Function $e^{-\frac{1}{z^2}}$, ſo wie dieſe ſelbſt verſchwinden, und man hat folglich für $z = 0$:

$$f_1x = fx,\ f'_1x = f'x,\ f''_1x = f''x,\ \ldots\ldots,$$

obgleich die Functionen f und f_1 für jeden andern Werth von z verſchieden bleiben.

Demnach iſt die Entwickelung von f_1h durch die Taylor'ſche Formel nicht von der Entwickelung von fh verſchieden, und wenn die ſo ins Unendliche fortlaufende Taylor'ſche Reihe convergent iſt, und fh zur Summe hat; ſo wird doch dieſelbe Reihenentwickelung, obgleich ſie convergent iſt, falſch ſein, wenn man ſie auf die Function f_1 anwendet.

Wir wollen im Allgemeinen mit φz eine Function von z von ſolcher Beſchaffenheit bezeichnen, daß man für einen beſonderen Werth $z = x$ habe:

$$0 = \varphi x = \varphi' x = \varphi'' x = \ldots\ldots,$$

ß es ſeien $R^{(i)}$, $R_1^{(i)}$ die Reſte der Taylor'ſchen Reihe für die Func-
nen:

$$f(x+h),\ f_1(x+h) = f(x+h) + \varphi(x+h);$$

muß man für jeden Werth des Index i haben:

$$R_1^{(i)} - R^{(i)} = \varphi(x+h),$$

s ſich übrigens auch leicht a posteriori vermittelſt des Ausdruckes des Re-
s in einem beſtimmten Integrale wieder finden ließe.

§. 104. Die Anzahl der Glieder, woraus die Taylor'ſche Reihe be-
ht, iſt nur in dem einen Falle eine endliche, wenn die Function fx eine
ze algebraiſche Function iſt; denn wenn alsdann m den höchſten Exponen-
n von x in dieſer Function bezeichnet, ſo iſt die Ableitung der m^{ten} Ord-
ng eine conſtante Größe und die Ableitungen der höhern Ordnungen ver-
ſchwinden (§. 60).

Wenn man $fx = x^m$ ſetzt, ſo gibt die Taylor'ſche Reihe für einen be-
ebigen Exponenten m die Entwickelung von $(x+h)^m$ und ſtimmt mit der
ewton'ſchen Binomialformel überein, welche dadurch, wie bereits in §. 66
d §. 82 bemerkt iſt, für einen beliebigen Exponenten bewieſen wird, und zu
icher Zeit hat man:

$$R_i = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-i)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i}\int_0^h z^i(x+h-z)^{m-i-1}dz.$$

§. 105. Die Taylor'ſche Reihe hatte ihrer Allgemeinheit wegen ſchon
ge die Aufmerkſamkeit der Analyſten auf ſich gezogen, als Lagrange die-
lbe zur Grundlage der Theorie der Functionen machte, um dadurch, wie er
ubte, bei dem Uebergange von der Discontinuität zur Continuität die An-
endung jedes Hülfsbegriffes der Grenze, der Fluxion, oder des unendlich Klei-
n zu vermeiden. Zu dieſem Zwecke nahm Lagrange an, daß ſich jede be-
ebige Function oder wenigſtens jede beliebige mathematiſche Function $f(x+h)$
einer Reihe von folgender Form:

$$fx + \varphi_1 x \cdot h^\alpha + \varphi_2 x \cdot h^\beta + \varphi_3 x \cdot h^\gamma + \text{etc.}$$

ntwickeln läßt. Hierauf zeigte Lagrange, indem er ſich auf die algebraiſche
atur der Function ſtützte, daß dieſe Potenzen weder negative noch gebrochene
xponenten haben können, ſo lange x und h unbeſtimmt bleiben. Denn wenn
e Reihe Potenzen von h mit negativen Exponenten enthielte, ſo würden,
enn man $h = 0$ ſetzte, die Glieder mit dieſen negativen Exponenten unend-
ch werden, und folglich hätte fx einen unendlich großen Werth, was nur für
rticuläre Werthe von x ſtattfinden kann. Wenn ferner die Reihe ein Glied
it einer Potenz von h mit dem gebrochenen Exponenten $\frac{p}{q}$ enthielte, ſo hätte
eſes Glied nach den bekannten Eigenſchaften der Wurzelgrößen ſo viele ver-
iedene Werthe, als der Nenner q Einheiten hat, ſo daß $f(x+h)$ für das-
lbe Syſtem von Werthen von x und fx mehrere verſchiedene Werthe haben
ürde, was nur für gewiſſe beſondere Werthe von x und von fx ſtattfinden
nn, und zwar aus demſelben Grunde, aus welchem nicht alle Punkte einer
urve Durchſchnittspunkte mehrerer Zweige der Curve ſein können.

Man kann alſo annehmen, daß die allgemeine Entwickelung von $f(x+h)$
urch die Formel:

$$f(x+h) = fx + h\varphi_1 x + h^2\varphi_2 x + h^3\varphi_3 x + \text{etc.} \qquad (h)$$

ausgedrückt wird, und alsdann nennt Lagrange $\varphi_1 x$ die Ableitung von
x und bezeichnet ſie durch $f'x$ um die zwiſchen fx und $\varphi_1 x$ ſtattfindende ge-

x verſchwinden. Denn die Wurzelgröße $(x-a)^{\frac{p}{q}}$ gibt der Function eben viele verſchiedene reelle oder imaginäre Werthe, als die ganze Zahl q Einheiten enthält. Da dieſelbe Wurzelgröße wieder in den Differenzialcoefficienten von fx vorkommt, ſo lange x unbeſtimmt bleibt; ſo nehmen dieſe Coefficienten, wie es der Fall ſein muß, ebenfalls q verſchiedene Werthe an. Es gibt also eigentlich ebenſo viele verſchiedene Functionen $f(x+h)$ und Reihenentwicklungen derſelben, als die fragliche Wurzelgröße Werthe geſtattet. Aber wenn man der Veränderlichen x den beſonderen Werth a beilegt, ſo verſchwindet die Wurzelgröße in allen Coefficienten:

$$fa,\ f'a,\ f''a,\ \text{etc.}$$

der Glieder der Taylor'ſchen Reihe, während ſie in der Function $f(a+h)$ noch exiſtirt und $=h^{\frac{p}{q}}$ wird. Die Taylor'ſche Reihe kann alſo in ihrer gewöhnlichen Form alsdann die Function nicht mehr darſtellen, weil die Function mehrere Werthe hat, während die Reihe nur einen einzigen Werth haben würde, und folglich muß die Reihenentwickelung von $f(a+h)$ Glieder mit der Wurzelgröße $h^{\frac{p}{q}}$ enthalten.

Wir wollen übrigens bemerken, daß eine in der Function fx vorkommende Wurzelgröße auf zwei verſchiedene Arten für beſondere Werthe von x verſchwinden kann; nämlich 1) wenn die Größe unter dem Wurzelzeichen verſchwindet, und 2) wenn ein Factor oder Coefficient der Wurzelgröße Null wird. Dieſer letzte Fall bildet nach denſelben Principien keine Ausnahme von der Taylor'ſchen Formel. Denn es ſei:

$$(x-a_1)^m\ (x-a)^{\frac{p}{q}}$$

ein Glied, wodurch die Wurzelgröße $(x-a)^{\frac{p}{q}}$ in die Function fx eingeführt wird, ſo verſchwindet dieſes Glied für den Werth $x=a_1$, welcher den Factor $(x-a_1)^m$ verſchwinden macht. Da der Exponent des Binomes $x-a_1$ nach der Vorausſetzung eine ganze und poſitive Zahl iſt, ſo nimmt derſelbe bei jeder Differenzirung um eine Einheit ab, und es kommen in den Ableitungen der Function fx von der m^{ten} und von den höhern Ordnungen Glieder vor, worin dieſes Binom nicht mehr als Factor der Wurzelgröße $(x-a)^{\frac{p}{q}}$ erſcheint. Hieraus folgt, daß die Entwickelung der Function $f(a_1+h)$ durch die Taylor'ſche Reihe und wenigſtens bis zu dem Gliede von dem Range $m-1$ inclus. fortgeſetzt, ebenſo viele verſchiedene Werthe beibehält, als die Function $f(a_1+h)$ durch die Wurzelgröße $(x-a)^{\frac{p}{q}}$ bekommt.

Aus dem Vorhergehenden darf man aber nicht mit einigen Schriftſtellern ſchließen, daß in einem ſolchen Falle die Taylor'ſche Reihe wenigſtens bis zu dem Gliede incl. fortgeſetzt werden muß, worin die Wurzelgröße $(x-a)$ wieder erſcheint; denn dieſe Wurzelgröße kommt immer mit der Vielheit ihrer Werthe in dem beſtimmten Integrale vor, welches den Werth des Reſtes ausdrückt, was für einen Werth der Index i auch haben mag, und die Strenge der Schlüſſe erfordert immer, daß man dieſen Reſt der Reihe in Rechnung bringt.

Man ſieht z. B., daß die Lagrange'ſche Schlußweiſe nicht mehr anwendbar ſein würde, wenn der Factor der Wurzelgröße eine transcendente Function von der weiter oben (§. 102) angegebenen Art wäre, welche, ſo z

ihre Ableitungen, für gewiſſe Werthe von x verſchwinden, und es würde zwiſchen der Function und ihrer Reihenentwickelung nur dann Identität ſtattfinden können, wenn man bei irgend einem Gliede dieſer Reihe ſtehen bliebe und den Reſt in Rechnung brächte.

§. 108. Wenn die Function fz oder ihre Ableitungen von irgend einer Ordnung an nicht mehr für den anfänglichen Werth $z = x$, ſondern für einen zwiſchen $z = x$ und $z = x + h$ liegenden Werth $z = a$ eine Stetigkeitsunterbrechung der erſten Ordnung erführen, ſo wäre die Taylor'ſche Formel, ſobald man $h =$ oder $> a - x$ ſetzt, nicht mehr anwendbar, ſo wohl, als wenn ſich die Unterbrechung der Stetigkeit auf den anfänglichen Werth bezöge; jedoch iſt die Lagrange'ſche Metaphyſik nicht auf dieſen Fall anwendbar, welchen man nicht als einen Ausnahmefall der Anwendbarkeit der Taylor'ſchen Formel zu betrachten pflegt. Aber ſobald man den Reſt R_i in Rechnung bringt, wie ſolches immer geſchehen muß, zeigt ſich die Unbrauchbarkeit der Taylor'ſchen Formel dadurch, daß es nicht möglich iſt, Grenzen des Reſtes anzugeben, oder denſelben durch ein beſtimmtes Integral zu berechnen, wenn die Function unter dem Integralzeichen $\int$ durch das Unendliche geht, ſei es an der Grenze, oder im Verlaufe der Integration.

2) Maclaurin'ſche Formel und ihre Anwendungen.

§. 109. Wenn man in der Formel (B) $x = 0$ ſetzt, ſo erhält man:

$$fh = f(0) + \frac{h}{1} \cdot f'(0) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(0) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f'''(0) + \text{etc.}$$

und wenn man alsdann x für h ſetzt, ſo kommt:

$$fx = f(0) + \frac{x}{1} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f'''(0) + \text{etc.}, \quad (C)$$

ſo daß man das Problem der Transformation einer beliebigen Function in eine nach den ganzen und ſteigenden Potenzen der unabhängigen veränderlichen Größe fortſchreitende Reihe gelöſt hat. Man könnte das Geſetz dieſer Reihe auch durch die bekannte Methode der unbeſtimmten Coefficienten ohne Anwendung der Taylor'ſchen Formel ſehr einfach finden; denn wir wollen annehmen, daß ſich die Function fx in eine nach den ganzen und ſteigenden Potenzen von x fortſchreitende Reihe entwickeln läßt, und ſetzen:

$$fx = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.},$$

ſo erhalten wir durch Differenzirung:

$$f'x = B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{etc.},$$
$$f''x = 2C + 2 \cdot 3Dx + \text{etc.},$$
$$f'''x = 2 \cdot 3D + \text{etc.},$$
$$\text{etc.}$$

und wenn wir in dieſen Gleichungen $x = 0$ ſetzen, ſo kommt:

$$A = f(0),\ B = f'(0),\ C = \frac{1}{2} f''(0),\ D = \frac{1}{2 \cdot 3} f'''(0),\ \text{etc.}$$

Durch dieſes Verfahren, deſſen man ſich auch zuweilen zur Ableitung der Taylor'ſchen Reihe bedient, hat Maclaurin die Formel (C) erhalten, welche noch jetzt ſeinen Namen führt, obgleich man ſie in der neuern Zeit dem engliſchen Geometer Stirling als dem erſten Erfinder zugeſchrieben hat. Uebrigens muß man dieſe Formel nicht als weſentlich verſchieden von der Taylor'ſchen Formel betrachten, welche blos eine größere Allgemeinheit hat, weil ſie ſo lange ſtattfindet, als die Größen x und h unbeſtimmt

je nachdem i eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Man hat also die Rei

$$\log.(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{etc.}, \qquad (i)$$

welche convergent ist, so lange x zwischen -1 und $+1$ liegt. An der ob Grenze $x = 1$ ist diese Reihe ebenfalls noch convergent, denn man hat:

$$\log. 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.}, \qquad (j)$$

und bekanntlich ist jede Reihe abnehmender und abwechselnd positiver und gativer Glieder nothwendig convergent. (§. 26.)

Wenn man $x = -1$ setzt, so kommt:

$$\log. 0 = -\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}\right\},$$

und da bekanntlich das negative Unendliche der Logarithmus von Null ist, ist die Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}$$

divergent, was sich übrigens auch leicht direct darthun läßt.

Ferner hat man:

$$\log.\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log.(1+x) - \log.(1-x)$$

$$= 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{etc.}\right\}. \qquad (k)$$

und wenn man alsdann

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{\nu}{n}, \text{ folglich } x = \frac{\nu}{2n+\nu},$$

setzt, so kommt:

$$\log.\left(1 + \frac{\nu}{n}\right) = \log.\left(\frac{n+\nu}{n}\right) = \log.(n+\nu) - \log.n$$

$$= 2\left\{\frac{\nu}{2n+\nu} + \frac{1}{3}\left(\frac{\nu}{2n+\nu}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\nu}{2n+\nu}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{\nu}{2n+\nu}\right)^7 + \text{etc.}\right\}.$$

Diese letzte Reihe convergirt für ganze Werthe der Zahlen n und ν i mer sehr schnell und gibt den Logarithmus der Zahl $n + \nu$, wenn der vo bekannt ist. Vermittelst dieser Reihe berechnet man aber blos die Logarith der Primzahlen, weil sich die Logarithmen der übrigen Zahlen durch einf Additionen daraus ergeben, und zwar berechnet man zu diesem Zwecke die garithmen der Primzahlen auf eine größere Anzahl von Decimalstellen, man in der Tafel beibehalten will.

Wir wollen $n = 1$ und $\nu = 1$ setzen, so haben wir, da der Logarith der Einheit gleich Null ist, die Reihe:

$$\log. 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \text{etc.}\right),$$

welche weit schneller convergirt als die Reihe (j) und wovon man nur e kleine Anzahl von Gliedern zu berechnen braucht, um

$$\log. 2 = 0{,}69314718 \ldots\ldots$$

zu erhalten, und folglich ist:

$$\log. 4 = 1{,}38629436 \ldots\ldots$$

Wenn man in der Reihe (l), $n = 4$, $\nu = 1$ ſetzt, ſo kommt:

$$\log 5 = \log. 4 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \frac{1}{7 \cdot 9^7} + \text{etc.}\right),$$

folglich:

$$\log. 5 = 1{,}60943791 \ldots\ldots$$

Das dritte Glied dieſer Reihe hat nur noch auf die ſechste Decimalſtelle Einfluß und das fünfte Glied würde bei der Berechnung der gewöhnlichen Logarithmentafeln ganz unmerklich ſein.

Die Summe der Logarithmen von 2 und 5 gibt den Neper'ſchen Logarithmus von 10 = 2,30258509 ..... und wenn man die Einheit, welche der gewöhnliche Logarithmus von 10 iſt, durch dieſe Zahl dividirt, ſo erhält man den gewöhnlichen Logarithmus von e oder den Modulus der Brigg'ſchen Logarithmen = 0,4342944819 ..... (§. 64). Vermittelſt dieſes Modulus kann man die gewöhnlichen Logarithmen aller Primzahlen finden, deren Neper'ſche Logarithmen bereits berechnet ſind. Die Analyſis gibt noch bequemere und kürzere Methoden zur Berechnung der Logarithmen an die Hand; allein alle dieſe Methoden, ſo wie die, wovon wir eben einen Begriff zu geben geſucht haben, wurden erſt erfunden, nachdem man ſchon lange Zeit Logarithmentafeln beſaß, welche durch mühſamere Verfahrungsarten berechnet ſind.

§. 111. Da alle Ableitungen der Function e^x mit ihr ſelbſt identiſch ſind, ſo reduciren ſie ſich, wie ſie für $x = 0$ auf die Einheit. Die Maclaurin'ſche Formel gibt folglich die Reihe:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{etc.}, \quad (m)$$

welche zuletzt immer für jeden Werth von x convergirt, denn wenn man das Glied dieſer Reihe, welches i Glieder vor ſich hat, mit y_i bezeichnet, ſo convergirt das Verhältniß:

$$\frac{y_{i+1}}{y_i} = \frac{x}{i+1},$$

ohne Ende gegen die Grenze Null, wenn i immer größer werdende Werthe annimmt, was für einen Werth x auch haben mag.

Wenn man $x = 1$ ſetzt, ſo erhält man den Reihenausdruck der Zahl e wieder, welcher in §. 61 aus der Binomialformel abgeleitet iſt.

Nach den Formeln (d) in §. 67 findet man auch:

$$\sin. x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{etc.}, \quad (m_1)$$

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{etc.} \quad (m_2)$$

Dieſe ſehr merkwürdigen Reihen, welche von Newton herrühren, haben, wie die Reihe (m), die Eigenſchaft, daß ſie zuletzt immer convergent werden, was für einen Werth x auch haben mag, ſo daß ſie ſich auf Kreisbogen erſtrecken, welche den ganzen Kreisumfang oder eine beliebige Anzahl von Kreisumfängen überſchreiten. Man könnte ſich derſelben zur Berechnung der natürlichen trigonometriſchen Tafeln bedienen und aus dieſen alsdann vermittelſt der Reihe (i) die Logarithmen der trigonometriſchen Linien berechnen; allein man hatte für die Bedürfniſſe der Aſtronomie weit früher die trigonometriſchen Tafeln berechnet, als Newton lebte.

Da die Reihen (m), (m_1), (m_2) für alle Werthe von x convergent ſind, ſo kann man auch von denſelben ausgehen und gleich von vornherein ſetzen:

$$\left.\begin{aligned} \psi x &= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.},\\ fx &= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{etc.},\\ \mathfrak{f}x &= 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}; \end{aligned}\right\} \quad (n)$$

und dann die Eigenſchaften der Functionen ψ, f, $\mathfrak{f}$ nach den Eigenſchaften der convergenten Reihen, wovon ſie die Summen ſind, beſtimmen. Auf dieſe Weiſe fände man:

$$\left.\begin{aligned} \psi(0) = 1,\ f(0) = 0,\ \mathfrak{f}(0) = 1;\\ \psi' x = \psi x,\ f' x = \mathfrak{f} x,\ \mathfrak{f}' x = -fx; \end{aligned}\right\} \quad (o)$$

und aus dieſem Syſteme von Gleichungen könnte man auf die im zweiten Kapitel des erſten Buches angegebene Weiſe alle Eigenſchaften der Functionen ψ, f, $\mathfrak{f}$ ableiten.

Die Gleichungen (n) würden dieſe Eigenſchaften ſelbſt unmittelbar an die Hand geben, ohne daß man die Gleichungen (o) zu Hülfe zu nehmen brauchte. So ergäbe ſich z. B. aus der Form dieſer Reihen ſelbſt:

$$\psi(x\sqrt{-1}) = \mathfrak{f}x + fx \cdot \sqrt{-1},$$
$$\psi(-x\sqrt{-1}) = \mathfrak{f}x - fx \cdot \sqrt{-1},$$
$$(fx)^2 + (\mathfrak{f}x)^2 = 1,$$
$$f(x+y) = fx \cdot \mathfrak{f}y + fy \cdot \mathfrak{f}x; \text{ etc.}$$

Aber obgleich dieſer Gang logiſch ſtreng iſt, ſo ſcheint uns derſelbe doch für eine didactiſche Darſtellung, wobei man beſonders einen rationalen Zuſammenhang der Theorieen zu erzielen ſuchen muß, nicht geeignet zu ſein. Im Allgemeinen werden die Functionen in ihrem ganzen Verlaufe durch das Geſetz ihrer Differenzialincremente characteriſirt, und nur unter gewiſſen Bedingungen können ſie ebenfalls in ihrem ganzen Verlaufe für alle Werthe der veränderlichen Größe durch convergente Reihen ausgedrückt werden. *)

---

*) Cauchy hat in der letzten Zeit eine ſehr merkwürdige Regel zur Beſtimmung der Convergenz der Reihenentwickelung einer Function nach den ganzen und poſitiven Potenzen der unabhängig Veränderlichen gegeben. Es bezeichnen:

$$\varrho_0(\cos.\theta_0 + \sqrt{-1}\ .\ \sin.\theta_0),\ \varrho_1(\cos.\theta_1 + \sqrt{-1}\ .\ \sin.\theta_1),$$
$$\varrho_2(\cos.\theta_2 + \sqrt{-1}\ .\ \sin.\theta_2),\ \text{etc.}$$

die reellen oder imaginären Werthe, welche für x an die Stelle geſetzt, die Function $\mathfrak{f}x$ oder ihre erſte Ableitung $\mathfrak{f}'x$ unendlich machen, oder vielmehr, welche einer der Gleichungen:

$$\frac{1}{\mathfrak{f}x} = 0,\ \frac{1}{\mathfrak{f}'x} = 0$$

genügen; ſo werden dieſe Werthe reell und poſitiv oder negativ ſein, wenn die poſitiven oder negativen Zahlen θ_0, θ_1, θ_2, etc. gerade oder ungerade Vielfache von π werden. Was die Zahlen ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2, etc. anlangt, welche Cauchy Moduli zu nennen pflegt, ſo kann man ſie als weſentlich poſitiv betrachten. Dieſes vorausgeſetzt, iſt die nach den ganzen und poſitiven Potenzen von x fortſchreitende Reihenentwickelung von $\mathfrak{f}x$ für jeden reellen oder imaginären Werth:

§. 112. Bei den Anwendungen, welche den Gegenſtand der beiden vorhergehenden Paragraphen bilden, haben wir blos die Convergenz der Maclaurin'ſchen Reihe bewieſen, aber ſtreng genommen muß man direct beweiſen, daß dieſe convergenten Reihenentwickelungen gewiſſe Functionen zu ihren Summen haben, oder daß der Reſt r_i für ſchickliche Werthe von i kleiner werden kann, als jede gegebene Größe.

Nun wird aber der Reſt r_i in den Entwickelungen (i), (m), (m_1), (m_2) reſp. ausgedrückt durch:

$$\mp \frac{x^{i+1}}{(i+1)\,(1+\theta x)^{i+1}},\quad \frac{x^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(i+1)}\cdot e^{\theta x}$$

$$\mp \frac{x^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(i+1)}\cdot \begin{Bmatrix}\text{sin.}\\ \text{cos.}\end{Bmatrix}(\theta x).$$

Die beiden letzten Ausdrücke geben für den Zahlenwerth des Verhältniſſes $\frac{r_{i+1}}{r_i}$ einen Bruch, welcher für einen jeden Werth von x kleiner werden kann, als jede gegebene Größe, wofern man für i nur eine hinreichend große Zahl nimmt. Dieſelbe Bedingung wird in Beziehung auf den erſten Ausdruck von r_i erfüllt, ſobald man für x eine poſitive Zahl ſetzt.

§. 113. Aus der Formel (l) in §. 75 folgt:

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot \log\left(\frac{1+\sqrt{-1}\cdot \text{tang. } x}{1-\sqrt{-1}\cdot \text{tang. } x}\right),$$

und wenn man den Logarithmus nach der Formel (k) entwickelt: *)

$$x = \text{tang. } x - \frac{1}{3}\text{tang.}^3 x + \frac{1}{5}\text{tang.}^5 x - \frac{1}{7}\text{tang.}^7 x + \text{etc.} \qquad (p)$$

Dieſe letzte Reihe iſt zuerſt von Leibnitz angegeben. Sie convergirt nur für Werthe von tang. x, welche zwiſchen — 1 und + 1 liegen, oder

---

$$\varrho(\cos.\,\theta + \sqrt{-1}\,.\,\sin.\,\theta),$$

von x, deſſen Modulus ϱ kleiner iſt als der kleinſte der Moduli $\varrho_{,,}$ $\varrho_{,,}$ $\varrho_{,,}$ etc. convergent. Hieraus folgt unmittelbar, daß jede periodiſche Function, wie sin. x, cos. x, welche, wie ihre erſte Ableitung, für keinen reellen oder imaginären Werth von x unendlich wird, ſich für jeden Werth von x in eine nach den ganzen und poſitiven Potenzen von x fortſchreitende convergente Reihe entwickeln läßt.

*) Dieſe Reihe ergibt ſich auch unmittelbar aus der Maclaurin'ſchen Reihe, wenn man bemerkt, daß man, wenn $f(x) = \text{arc. tang. } x$ iſt, hat:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x\sqrt{-1}} = \frac{1}{1+x\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1-x\sqrt{-1})^{-1} + (1+x\sqrt{-1})^{-1}\right]$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{-1})^{n-1}\cdot\frac{1.2.3..(n-1)}{2}\left[(1-x\sqrt{-1})^{-n} + (1+x\sqrt{-1})^{-n}\,.\,(-1)^n\right]$$

$$f^{(n)}(0) = (\sqrt{-1})^{n-1}\cdot\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{2}\,[1-(-1)^n],$$

woraus ſich die Werthe von $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, ... ergeben, wenn man n ſucceſſive gleich 1, 2, 3, ... ſetzt. Z. d. Ueberſ.

für Werthe von x zwiſchen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ und findet folglich auch nur für dieſe Werthe ihre Anwendung, obgleich die Function tang. x zwiſchen den Grenzen $x = -\frac{1}{2}\pi$ und $x = +\frac{1}{2}\pi$ ſtetig bleibt.

Die Reihe (p) iſt jedoch an der Grenze $x = \frac{1}{4}\pi$ noch convergent und an dieſer Grenze hat man:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \text{etc.};$$

allein dieſe Reihe convergirt doch zu langſam, als daß man den Werth der transcendenten Zahl π darnach berechnen könnte. Wenn man $x = 30°$ ſetzt, wovon die Tangente $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ iſt, ſo gibt die vorhergehende Formel:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \text{etc.}\right),$$

und durch dieſe letzte Reihe hat Lagny die Zahl π bis auf 127 Decimalſtellen berechnet. Es gibt übrigens noch andere Reihenentwickelungen, vermittelſt welcher ſich der Werth von π noch weit ſchneller berechnen läßt.

Aus der Formel (i) ergibt ſich:

$$\log. x = \log.\left(\frac{1+x}{1+\frac{1}{x}}\right) = \log.(1+x) - \log.\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{4}\left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right) + \text{etc.}$$

Dieſe neue Reihe iſt zwar für alle reellen Werthe von x divergent, allein wenn man der Größe x den imaginären Werth $e^{z\sqrt{-1}}$ beilegt, ſo erhält man:

$$\log. x = z\sqrt{-1},\quad x^m - \frac{1}{x^m} = e^{mz\sqrt{-1}} - e^{-mz\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\cdot\sin. mz,$$

und folglich verwandelt ſich die vorhergehende Formel, nachdem man durch $2\sqrt{-1}$ dividirt hat, in folgende:

$$\frac{1}{2}z = \sin. z - \frac{1}{2}\sin. 2z + \frac{1}{3}\sin. 3z - \frac{1}{4}\sin. 4z + \text{etc.}$$

Dieſe neue Reihe iſt offenbar für jeden Werth von z convergent, aber ihre Summe iſt nur dann gleich $\frac{1}{2}z$, wenn der Werth von z zwiſchen den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$, $+\frac{1}{2}\pi$ liegt.

Der geometriſche Ort der Gleichung:

$$y = \sin. x - \frac{1}{2}\sin. 2x + \frac{1}{3}\sin. 3x - \frac{1}{4}\sin. 4x + \text{etc.} \qquad (q)$$

iſt ein Syſtem paralleler gerader Linien:

..... M_1N_1, MN, M'N', M''N'', ... (Fig. 35),

deren endliche Gleichungen resp. folgende sind:

$$.... \; y = \frac{1}{2}(x + \pi), \; y = \frac{1}{2}x, \; y = \frac{1}{2}(x - \pi), \; y = \frac{1}{2}(x - 2\pi), ...$$

Die gemeinschaftliche Abscisse der Punkte NM' ist $OP = \pi$; allein die Gleichung (q) gibt, wenn man darin $x = \pi$ setzt, für den Werth von y, weder die Ordinate PN, noch die gleiche und mit entgegengesetzten Zeichen behaftete Ordinate PM'. Aus dieser Gleichung folgt $y = 0$, d. h. ein Werth von y, welcher der halben Summe der Ordinaten PN, PM' gleich ist. Dasselbe findet statt, wenn man für x ein positives oder negatives Vielfache von π setzt (§. 38). In der Folge werden wir auf diese wesentliche Eigenthümlichkeit der Entwickelungen discontinuirlicher Functionen zurückkommen und die Gleichung (q) als einen speciellen Fall weit allgemeinerer Gleichungen wieder erhalten.

§. 114. Die Entwickelung einer Function in eine nach den Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortschreitende Reihe führt auf die Reihenentwickelung mit Exponentialfunctionen; denn es sei fx die gegebene Function, so verwandelt sie sich, wenn man:

$$x = \log. z, \text{ oder } z = e^x$$

setzt, in:

$$f(\log. z) = Fz$$

und läßt sich im Allgemeinen nach den Potenzen von z entwickeln. Es sei Ax^m irgend ein Glied der Reihenentwickelung, so nimmt dasselbe, wenn man darin für z seinen Werth setzt, die Form Ae^{mx} an, und folglich wird die Function f auf diese Weise in eine Reihe von Exponentialgrößen entwickelt. *)

---

*) Vermittelst der Maclaurin'schen Reihe und des Principes für die Bildung der Ableitungen der inversen Functionen kann man auch alle Reihen von der Form:

$$x = a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + ... = f(y)$$

umkehren, d. h. $y = \varphi(x)$ unter einer nach den Potenzen von x fortschreitenden ähnlichen Reihenform erhalten. Denn nach der Maclaurin'schen Formel hat man:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)\frac{x}{1} + \varphi'(0)\frac{x^2}{1.2} + \varphi'''(0)\frac{x^3}{1.2.3} + ...$$

so daß man blos die Werthe von $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, ... zu bestimmen braucht. Nun ist aber:

$$\begin{aligned} f'(y) &= a_1 + 2a_2y + 3a_3y^2 + ... \\ f''(y) &= 2a_2 + 6a_3y + ... \\ f'''(y) &= 6a_3 + ... \\ \text{etc.} &= \text{etc.} \end{aligned}$$

und:

$$\varphi(0) = 0, \text{ weil } \varphi(x) \text{ dieselbe Form hat, als } f(y).$$

$$\varphi'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{a_1},$$

$$\varphi''(0) = -\frac{f''(0)}{[f'(0)]^3} = -\frac{2a_2}{a_1^3},$$

$$\varphi'''(0) = \frac{3[f''(0)]^2 - f'''(0) \cdot f'(0)}{[f'(0)]^5} = \frac{12a_2^2 - 6a_1a_3}{a_1^5},$$

$$\text{etc.} = \text{etc.}$$

Es ist also:

$$y = \frac{1}{a_1}x - \frac{a_2}{a_1^3}x^2 + \frac{2a_2^2 - a_1a_3}{a_1^5}x^3 + ...$$

Dasselbe Verfahren ist bei den Functionen log. (1 + x), sin x, tang. x anwendbar, um daraus die inversen Functionen in Reihenform abzuleiten.

Z. d. Uebers.

Drittes Buch.

Differenzirung der entwickelten und unentwickelten Functionen mit mehreren Veränderlichen.

Erſtes Kapitel.

Von den entwickelten Functionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen und von ihrer Differenzirung. — Grundbegriffe über die Stetigkeitsunterbrechungen der Functionen von zwei und drei Veränderlichen.

---

§. 115. Bisher haben wir nur Functionen von einer einzigen Veränderlichen, d. h. Größen, betrachtet, deren Werth beſtimmt iſt, ſobald man den Werth einer andern veränderlichen Größe, wovon ſie abhängen, angegeben hat; aber im Allgemeinen iſt der Werth einer Größe von den Werthen abhängig, welche mehrere andere Größen annehmen, die ſich unabhängig von einander ändern können, und in dieſem Falle ſagt man, daß die erſte Größe eine Function mehrerer unabhängiger veränderlicher Größen ſei.

So ändert ſich z. B. die Intenſität der Schwere mit der Höhe des ſchweren Körpers über dem Niveau des Meeres und auch mit der geographiſchen Breite, und zwar ſind dieſe veränderlichen Größen von einander unabhängig; denn man kann ſich vorſtellen, daß ſich die Höhe des ſchweren Körpers ändert, ohne daß ſich die geographiſche Breite ändert, und umgekehrt. Wenn die Figur der Erde merklich von der eines Rotationsſphäroides verſchieden wäre, ſo änderte ſich die Intenſität der Schwere auch mit der geographiſchen Länge und würde eine Function von drei unabhängig veränderlichen Größen.

Wenn ein feſter Körper, welcher urſprünglich gleichförmig erhitzt iſt, ſich abkühlt, ſo ändert ſich die Temperatur in jedem Punkte ſeiner Maſſe mit der Zeit, aber ſie ändert ſich auch in demſelben Augenblicke von einem Punkte zum andern; denn die nahe an der Oberfläche liegenden Molecule müſſen ſchneller die Temperatur des umgebenden Mittels annehmen, als die gegen die Mitte des Körpers zu liegenden Molecule. Die Temperatur in jedem Punkte der Maſſe des Körpers iſt folglich eine Function von vier unabhängig veränderlichen Größen, nämlich von der ſeit dem Beginnen des Abkühlens verfloſſenen Zeit und von den drei Coordinaten, welche die Lage des betrachteten Punktes innerhalb des Körpers beſtimmen.

Dieſe Beiſpiele ließen ſich leicht beliebig vermehren, und man ſieht leicht ein, daß bei den meiſten Naturerſcheinungen jede meßbare Größe von vielen andern Größen abhängt, welche ſich unabhängig von einander verändern können. Um aber die Urſachen zu vereinfachen und ſie der Rechnung zugänglich zu machen, nimmt man an, daß dieſe Größen mit Ausnahme von einer, zwei oder drei derſelben feſte Werthe bekommen und alsdann werden die davon abhängigen Größen Functionen von einer, von zwei oder von drei unabhängig veränderlichen Größen.

Um auszudrücken, daß eine Größe u eine Function von mehreren veränderlichen Größen x, y, z, ... iſt, bedient man ſich der Bezeichnung:

$$u = f(x, y, z, \ldots),$$

und wenn man andeuten will, daß bei der Beſtimmung der Function außerdem auch conſtante Größen oder Parameter a, b, c, ... vorkommen, ſo ſchreibt man:

$$u = f(x, y, z, \ldots a, b, c, \ldots).$$

Eine Function kann in Beziehung auf jede der veränderlichen Größen, wovon ſie abhängt eine mathematiſche oder empiriſche, algebraiſche, oder transcendente, rationale oder irrationale, ganze oder gebrochene, lineare oder nicht lineare, etc. ſein, und wir brauchen in Beziehung auf die Klaſſification, welche wir bei den Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe angegeben haben, hier in Beziehung auf die Functionen von mehreren veränderlichen Größen nichts weiter hinzuzufügen.

Wenn die Function u durch eine nicht in Beziehung auf u aufgelöſte Gleichung:

$$F(u, x, y, z, \ldots) = 0$$

mathematiſch beſtimmt wird, ſo iſt die Function u eine unentwickelte und wird eine entwickelte Function, ſobald man die vorhergehende Gleichung in Beziehung auf u auflöſt.

§. 116. Eine Function von mehreren Veränderlichen, welche keinen mathematiſchen Ausdruck hat, oder für welche man dieſen Ausdruck nicht kennt, wird für die zwiſchen gegebenen Grenzen der unabhängigen Veränderlichen liegenden Werthe als bekannt angeſehen, wenn man Tafeln hat, welche die Werthe der Function angeben, die eben ſo vielen Syſtemen der den unabhängigen Veränderlichen beigelegten und einander ſehr nahe kommenden Werthen entſprechen. Allein die Conſtruction dieſer Tafeln iſt reell nur für die Functionen von zwei unabhängigen veränderlichen Größen ausführbar.

Es ſeien:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_{m-1}, x_m;$$
$$y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_{n-1}, y_n;$$

zwei Reihen einander hinreichend genäherter Werthe von x und y und $u_{h,k}$ bezeichne den dem Syſteme (x_h, y_k) entſprechenden Werth der Function u; ſo laſſen ſich die allen Combinationen, welche man aus den in den beiden obigen Reihen enthaltenen Werthen von x und y bilden kann, entſprechenden Werthe von u der Bequemlichkeit wegen auf folgende Weiſe in eine Tafel zuſammenſtellen:

	x_1	x_2	x_3	. . . . .	x_{m-1}	x_m
y_1	$u_{1,1}$	$u_{2,1}$	$u_{3,1}$		$u_{m-1,1}$	$u_{m,1}$
y_2	$u_{1,2}$	$u_{2,2}$	$u_{3,2}$		$u_{m-1,2}$	$u_{m,2}$
y_3	$u_{1,3}$	$u_{2,3}$	$u_{3,3}$		$u_{m-1,3}$	$u_{m,3}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
y_{n-1}	$u_{1,n-1}$	$u_{2,n-1}$	$u_{3,n-1}$		$u_{m-1,n-1}$	$u_{m,n-1}$
y_n	$u_{1,n}$	$u_{2,n}$	$u_{3,n}$	. . . . .	$u_{m-1,n}$	$u_{m,n}$

$$\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

ohne Ende der Ableitung $f'(x, y)$ von $f(x, y)$ in Beziehung auf die Veränderliche x, und wenn man die Ableitung von $f(x, y)$ in Beziehung auf die als unabhängige Veränderliche betrachtete Größe y mit $f_1(x, y)$ bezeichnet; ſo convergirt das Verhältniß:

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y}$$

gegen die Grenze $f_1(x + \Delta x, y)$ wenn Δy immer kleiner und kleiner wird. Endlich convergirt dieſe letzte Grenze, deren Werth mit Δx veränderlich iſt, ihrerſeits gegen die Grenze $f_1(x, y)$ wenn Δx gegen Null convergirt.

Bezeichnet man alſo mit dx, dy, dz, unendlich kleine Werthe von Δx, Δy, Δz, ſo hat man:

$$dz = f'(x, y)\,dx + f_1(x, y)\,dy.$$

Aber wenn wir andererſeits mit $d_x z$ das Differenzial von z bezeichnen, wenn ſich x allein änderte und mit $d_y z$ das Differenzial von z wenn ſich y allein änderte, ſo hat man:

$$f'(x, y) = \frac{d_x z}{dx}, \quad f_1(x, y) = \frac{d_y z}{dy}$$

und folglich:

$$dz = \frac{d_x z}{dx}\,dx + \frac{d_y z}{dy}\,dy. \qquad (1)$$

In dieſem Ausdrucke bezeichnet dz das Totaldifferenzial, $d_x z$, $d_y z$ bezeichnen die partiellen Differenziale und:

$$\frac{d_x z}{dx}, \quad \frac{d_y z}{dy}$$

ſind die partiellen Differenzialcoeffizienten oder die partiellen Ableitungen.

Gewöhnlich pflegt die Benennung partielle Differenzen der mehr paſſenden, aber nicht ſo wohlklingenden Benennung partielle Differenziale vorgezogen zu werden, was daher kommt, daß die Geometer des letzten Jahrhunderts ſtatt des Ausdruckes Differenzial den Ausdruck Differenz gebrauchten, indem ſie darunter eine unendlich kleine Differenz verſtanden.

Die Formel (1) bietet, wie wir ſie eben ausgedrückt haben, keine Zweideutigkeit dar; allein in der Praxis würde die Anwendung der Indices unten an dem Differenzialzeichen beſchwerlich ſein und oft zu Schreib- oder Druckfehlern Veranlaſſung geben, weswegen man es vorzieht, blos

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy \qquad (2)$$

zu ſchreiben, wobei keine Verwechſelung des Totaldifferenziales dz im erſten Theile der Gleichung mit den partiellen Differenzialen dz, welche in den Zählern der Differenzialcoefficienten im zweiten Theile der Gleichung vorkommen, zu befürchten iſt.

In der That ſind die Differenziale nur Hülfsſymbole, welche im Verlaufe der analytiſchen Combinationen angewandt werden, um zu den Differenzialcoefficienten zu gelangen, welche numeriſch beſtimmte Functionen ſind, ſo bald man die veränderlichen Größen, wovon ſie abhängen, beſtimmte Zahlenwerthe beilegt. So lange aber die Veränderlichen x, y von einander unabhängig ſind

und die Veränderungen dx, dy durch keine Relation mit einander verbu
ſind, bleiben die Verhältniſſe des Totaldifferenziales dz zu dx oder dy, nän

$$\frac{d_x z}{dx} + \frac{d_y z}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d_x z}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{d_y z}{dy},$$

unbeſtimmt. Die Ausdrücke:

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dy}$$

würden folglich keinen beſtimmten Werth haben, wenn das im Zähler vor
mende dz ein Totaldifferenzial bezeichnen ſollte, und die Rechnung könnte, i
ſie auf Aufgaben angewandt wird, die eine beſtimmte Auflöſung zulaſſen,
auf ſolche Ausdrücke führen.

Nichtsdeſtoweniger ſchreiben einige Analyſten nach dem Beiſpiele von
ler und Laplace die partiellen Differenzialcoefficienten zwiſchen Parent
auf folgende Weiſe:

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy;$$

aber gewöhnlich betrachtet man dieſe Parentheſen als überflüſſig. *)

---

*) Beiſpiel 1. Es ſei:

$$u = x^3 + ax^2y + y^3$$

ſo iſt:

$$\frac{du}{dx} dx = (3x^2 + 2axy)\, dx,$$

$$\frac{du}{dy} dy = (ax^2 + 3y^2)\, dy,$$

und folglich das Totaldifferenzial:

$$du = (3x^2 + 2axy)\, dx + (ax^2 + 3y^2)\, dy.$$

Beiſpiel 2. Es ſei:

$u = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ſo iſt $\frac{du}{dx} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}$ und $\frac{du}{dy} = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$,

folglich das Totaldifferenzial:

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy = \frac{dx}{y} - \frac{ydx}{x^2} + \frac{dy}{x} - \frac{xdy}{y^2}.$$

Beiſpiel 3. Es ſei:

$$u = \log.\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{y}\right) = \log.\left(x + \sqrt{x^2 - y^2}\right) - \log. y,$$

ſo iſt:

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \text{ und } \frac{du}{dy} = -\frac{x}{y\sqrt{x^2 - y^2}}$$

folglich:

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{xdy}{y\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{ydx - xdy}{y\sqrt{x^2 - y^2}}$$

Beiſiel 4. Es ſei:

$$u = \log. \text{tang.} \frac{x}{y},$$

ſo iſt:

§. 119. Die Formel (2) erſtreckt ſich ohne alle Schwierigkeiten auf ictionen von einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen, und für u = , y, z, t, ...) hat man z. B.:

$$du = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz + \frac{du}{dt}dt + \text{etc.} \qquad (3)$$

$$= \frac{d\ \text{tang.}\frac{x}{y}}{dx\ \text{tang.}\frac{x}{y}} = \frac{\sec.^2\frac{x}{y}}{y\ \text{tang.}\frac{x}{y}}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{d\ \text{tang.}\frac{x}{y}}{dy\ \text{tang.}\frac{x}{y}} = \frac{-\sec.^2\frac{x}{y}}{y^2\ \text{tang.}\frac{x}{y}}$$

und folglich:

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = \frac{\sec.^2\frac{x}{y}}{y\ \text{tang.}\frac{x}{y}}dx - \frac{x\sec.^2\frac{x}{y}}{y^2\ \text{tang.}\frac{x}{y}}dy$$

$$= \frac{ydx - xdy}{y^2\ \text{tang.}\frac{x}{y}}\sec.^2\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2 \sin.\frac{x}{y}\cos.\frac{x}{y}}.$$

Beiſpiel 5. Es ſei:

$$u = \frac{xy^2}{z^2 - a^2},$$

ſo iſt:

$$\frac{du}{dx} = \frac{y^2}{z^2 - a^2}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{2xy}{z^2 - a^2}, \quad \frac{du}{dz} = -\frac{2x^1y^{-2}z}{(z^2 - a^2)^2}$$

und folglich das Totaldifferenzial:

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = \frac{y^2dx}{z^2 - a^2} + \frac{2xy\,dy}{z^2 - a^2} - \frac{2xy^2zdz}{(z^2 - a^2)^2}$$

$$= \frac{y^2(z^2 - a^2)dx + 2xy(z^2 - a^2)dy - 2xy^2zdz}{(z^2 - a^2)^2}.$$

Beiſpiel 6. Es ſei:

$$u = x\,\Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right),$$

ſo iſt:

$$\frac{du}{dx} = \Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) + \frac{x}{y}\,\Phi'\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right),$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{x^2}{y^2}\,\Phi'\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) + \frac{x}{z}\,\Phi'\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right),$$

$$\frac{du}{dz} = -\frac{xy}{z^2}\,\Phi'\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right),$$

und folglich das Totaldifferenzial:

$$du = \Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)dx + \frac{x}{y}\,\Phi'\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)dx - \frac{x^2}{y^2}\,\Phi'\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)dy$$

$$+ \frac{x}{z}\,\Phi'\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)dy - \frac{xy}{z^2}\,\Phi'\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)dz.$$

Z. d. Ueberſ.

Wenn alſo Δu, Δx, Δy, Δz, Δt, etc. ſehr kleine Veränderungen der erſten Ordnung bezeichnen, ſo hat man bis auf Größen der zweiten und der höhern Ordnungen genau:

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y + \frac{du}{dz}\Delta z + \frac{du}{dt}\Delta t + \text{etc.} \quad (4)$$

wenigſtens ſo lange die partiellen Ableitungen:

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \frac{du}{dt}, \text{ etc.}$$

keine ſehr großen Werthe annehmen, ſo daß die Brüche:

$$\frac{1}{\frac{du}{dx}}, \frac{1}{\frac{du}{dy}}, \frac{1}{\frac{du}{dz}}, \frac{1}{\frac{du}{dt}}, \text{ etc.}$$

ſo klein werden, daß ſie mit Δx, Δy, Δz, Δt, etc. vergleichbar ſind (§. 45)

Wenn alſo eine Function von Größen abhängt, welche ſehr kleine poſitive oder negative Veränderungen erfahren, ſo iſt die Totalveränderung der Function nahezu gleich der algebraiſchen Summe der Veränderungen, welche dieſe Function in ihrem Werthe würde erfahren haben, wenn ſich jede der Größen wovon ſie abhängt, allein geändert hätte.

Das Princip des Zuſammenfallens ſehr kleiner Bewegungen welches bei der Erklärung der Naturerſcheinungen eine ſo wichtige Rolle ſpielt und worauf die neuen Theorien des Schalles und des Lichtes beruhen, iſt weiter nichts, als eine Folgerung aus dem eben ausgeſprochenen Satze, welcher man daher das Princip des Zuſammenfallens kleiner Veränderungen nennen könnte. Wenn man dieſes Princip mit dem Principe der Proportionalität kleiner Veränderungen (§. 5) zuſammenhält, ſo ſieht man ein, wie eine beſchränkte Anzahl von Verſuchen oder Beobachtungen die Mittel zur Berechnung der Veränderungen einer Größe an die Hand geben kann, welche nach einem empiriſchen und unbekannten Geſetze von mehreren anderen Größen abhängig iſt, wofern die Veränderungen dieſer letzten Größen in enge Grenzen eingeſchloſſen ſind. Denn ſtreng genommen genügt es ſchon, die Werthe von Δu für ſo viele Werthſyſteme von Δx, Δy, Δz, Δt, etc. zu beobachten als man in der Gleichung (4) partielle Ableitungen numeriſch zu beſtimmen hat, und alsdann gibt dieſe Gleichung den Werth von Δu durch eine lineare Function von Δx, Δy, etc., für ſehr kleine, aber übrigens beliebige Werthe dieſer Veränderungen. Die Beobachtungskunſt beſteht alsdann darin, unter ſolchen Umſtänden zu beobachten, daß dieſe unbekannten Coefficienten mit der größten Genauigkeit beſtimmt werden können und die Wahrſcheinlichkeitsrechnung gibt zu dieſem Zwecke Indicationen an die Hand, welche wir hier nicht näher anführen können.

§. 120. Der Beweis der Formel (2) oder der Formel (3), welche eine Verallgemeinerung derſelben iſt, erfordert nicht, daß die Veränderlichen x, y, z, etc. von einander unabhängig ſind, was wir größerer Allgemeinheit wegen vorausgeſetzt haben; allein nichts hindert, alle dieſen Veränderlichen x, y, etc., oder einige derſelben, als Functionen einer neuen unabhängigen Veränderlichen v zu betrachten, oder vielmehr anzunehmen, daß mehrere dieſer Veränderlichen, z. B. y und z Functionen von x ſind. Alsdann iſt u aus einem doppelten Grunde eine Function von x, nämlich unmittelbar, in ſo fern x in dem Ausdrucke von u vorkommt und mittelbar, weil u eine Function der Größen y und z iſt, welche ſelbſt unmittelbare Functionen von x ſind. Alsdann muß man in der Formel (3) für:

$$\frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz$$

die Größe:

$$\left(\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right)dx$$

ſetzen, und ebenſo in allen ähnlichen Fällen.

Dieſe Bemerkung benutzt man zur Erleichterung der Differenzirung der mathematiſchen Functionen von einer einzigen Veränderlichen, wenn der Ausdruck derſelben complicirt iſt. Wenn man z. B. die Function:

$$u = \frac{1+x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}},$$

zu differenziren hätte, ſo könnte man ſetzen:

$$\sqrt{1+x} = y,\quad \sqrt{1-x} = z,$$

folglich:

$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}},\quad dz = -\frac{dx}{2\sqrt{1-x}}$$

Andererſeits hätte man:

$$u = \frac{y^2}{y-z},$$

folglich:

$$\frac{du}{dy} = \frac{y^2-2yz}{(y-z)^2},\quad \frac{du}{dz} = \frac{y^2}{(y-z)^2}.$$

Wenn man dieſe Werthe in die Formel:

$$du = \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz = \left(\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right)dx$$

ſubſtituirt, ſo findet man:

$$du = \left(\frac{y-2z}{2(y-z)^2} - \frac{y^2}{2z(y-z)^2}\right)dx,$$

und nachdem man für die Hülfsveränderlichen y, z ihre Werthe in x ſubſtituirt hat:

$$du = \frac{x-3+\sqrt{-x^2}}{4\sqrt{1-x}\,(1-\sqrt{1-x^2})}\cdot dx.$$

§. 121. Wenn bei den Anwendungen des Calculs auf Naturerſcheinungen eine Function u ſowohl unmittelbar, als mittelbar von einer gewiſſen Größe t abhängt, ſo iſt es zuweilen nicht blos bequem, ſondern ſogar unumgänglich nothwendig, in der Veränderung von u den Theil, welcher unmittelbar von der Veränderung von t und den Theil, welcher von der Veränderung einer Größe v, die ſelbſt eine Function von t iſt, herrührt, für ſich zu betrachten. Um dieſe doppelte Abhängigkeit durch ein Beiſpiel zu erläutern, wollen wir uns ein materielles Theilchen denken, welches ſich vermöge der Wirkung eines electriſirten Körpers im Raume bewegt.

Die Intenſität der bewegenden Kraft iſt eine unmittelbare Function der Zeit t, weil ſich die electriſche Ladung des electriſirten Körpers fortwährend

vermindert, und eine mittelbare Function derſelben veränderlichen Größe, ſie von den Coordinaten des bewegten materiellen Theilchens, welche ſich j Augenblick ändern, abhängig iſt. Die feinſten Unterſuchungen in der Th der Bewegung der Himmelskörper beruhen auf Unterſcheidungen dieſer zwiſchen den verſchiedenen Theilen der Veränderung einer Function, w man als eben ſo viele einzelne Wirkungen oder Einflüſſe der Veränderung und derſelben veränderlichen Größe betrachten muß. In einem ſolchen kann der Differenzialcoefficient verſchiedene und lauter endliche Werthe ha je nachdem man du als ein totales oder als ein partielles Differe betrachtet, und alsdann ſind gewiſſe Bezeichnungen erforderlich, welche Zweideutigkeit beſeitigen; allein es laſſen ſich in dieſer Beziehung keine a meine Regeln aufſtellen.

§. 122. Vermittelſt der Formel (3) kann man auch eine Relation be ſen, welche unter dem Namen des Lehrſatzes von den homogenen F tionen bekannt iſt. In rein algebraiſchem Sinne ſagt man, daß eine F tion $f(x, y, z, ...)$ homogen ſei, wenn man für jeden Werth von θ Relation hat:

$$f(\theta x, \theta y, \theta z, ...) = \theta^n f(x, y, z, ...).$$

Wenn man beide Theile dieſer Gleichung in Beziehung auf θ differen ſo erhält man die neue Identität:

$$\frac{d \cdot f(\theta x, \theta y, \theta z, ...)}{dx} x d\theta + \frac{d \cdot f(\theta x, \theta y, \theta z, ...)}{dy} y d\theta$$

$$+ \frac{d \cdot f(\theta x, \theta y, \theta z, ...)}{dz} z d\theta + \text{etc.} = n\theta^{n-1} d\theta \cdot f(x, y, z...),$$

und wenn man durch $d\theta$ dividirt und dann $\theta = 1$ ſetzt; ſo kommt:

$$x \frac{df(x, y, z, ...)}{dx} + y \frac{df(x, y, z, ...)}{dy} + z \frac{df(x, y, z, ...)}{dz} +$$

$$= nf(x, y, z, ...),$$

wodurch der Lehrſatz von den homogenen Functionen analytiſch ausgedrückt n

§. 123. Wir wollen wieder die Function mit zwei unabhängigen ä änderlichen:

$$z = f(x, y)$$

betrachten. Wenn wir mit $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ die partiellen Veränderungen bezeich welche dieſe Function erfährt, wenn x um Δx zunimmt, ohne daß y ſich dert und wenn y um Δy wächſt, ohne daß ſich x ändert; ſo haben wir:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Die Veränderungen, welche die beiden Theile dieſer Gleichung erfahren, n man darin $y + \Delta y$ für y ſetzt, müſſen ausgedrückt werden durch:

$$\Delta_y \Delta_x z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)$$
$$- f(x, y + \Delta y) + f(x, y),$$

und wegen der Symmetrie des zweiten Theiles dieſer Gleichung in Bezieh auf die Veränderlichen x, y muß man für beliebige Werthe der Increm Δx, Δy die Relation haben:

$$\Delta_y \Delta_x z = \Delta_x \Delta_y z;$$

folglich, wenn man zu der Grenze übergeht:

$$d_y d_x z = d_x d_y z, \qquad (5)$$

und;

$$\frac{d\, d_x z}{dy\, dx} = \frac{d_x d_y}{dx dy}.$$

Bei einer Formel wie dieſe nimmt man an, daß die Art und die Ordnung der partiellen Differenzirungen durch das Vorhandenſein und durch die Aufeinanderfolge der in den Nennern vorkommenden Factoren dx, dy zur Genüge angedeutet wird und man ſchreibt daher:

$$\frac{ddz}{dydx} = \frac{ddz}{dxdy},$$

oder noch einfacher:

$$\frac{d^2z}{dydx} = \frac{d^2z}{dxdy}.$$

Der eben bewieſene Satz iſt auf jede Art ſtetiger Functionen anwendbar und muß ſich immer numeriſch oder algebraiſch verificiren. Wir wollen z. B.

$$z = \text{arc. tang.} \frac{x}{y}$$

ſetzen, ſo haben wir:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{d^2z}{dydx} = \frac{d^2z}{dxdy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Es ſei ferner:

$$z = \frac{x^2y}{1+y^2},$$

ſo kommt:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2xy}{1+y^2}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{x^2(1-y^2)}{(1+y^2)^2}$$

$$\frac{d^2z}{dydx} = \frac{d^2z}{dxdy} = \frac{2x(1-y^2)}{(1+y^2)^2}.$$

Iſt die Identität der beiden Theile der Gleichung (5) einmal dargethan, ſo folgt daraus, daß man in einem Ausdrucke von der Form:

$$d_x d_y d_z \ldots\ldots u,$$

die Aufeinanderfolge irgend zweier ſucceſſiver Indices umkehren und vermittelſt einer oder mehrerer ſolcher Umkehrungen in der Ordnung der Indices oder der ſucceſſiven Differenzirungen alle möglichen Permutationen vornehmen kann, ohne an dem Endreſultate etwas zu verändern. Das Raiſonnement iſt daſſelbe, als das, welches man in den Elementen der Arithmetik anwendet, um den Satz zu beweiſen, daß man, ohne den Werth eines Productes aus mehreren Factoren zu verändern, die Ordnung der ſucceſſiven Multiplicationen auf alle möglichen Arten abändern kann, nachdem vorher bewieſen iſt, daß das Product aus zwei Factoren nicht geändert wird, welchen von dieſen beiden Factoren man als Multiplicand oder als Multiplicator betrachten mag.

§. 124. Vermittelſt des Lehrſatzes im vorhergehenden §. findet man leicht den Ausdruck der Totaldifferenziale der verſchiedenen Ordnungen der Functionen von mehreren unabhängigen veränderlichen Größen. Wenn man die beiden Theile der Gleichung:

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy,$$

worin $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ Functionen von x, y bezeichnen und dx, dy als constante Fa toren behandelt werden können, weil x, y die unabhängigen Veränderliche bezeichnen, in Beziehung auf x und y differenzirt; so erhält man:

$$d^2z = \left[d \cdot \frac{\frac{dz}{dx}}{dx}\,dx + \frac{d \cdot \frac{dz}{dx}}{dy}\,dy\right]dx + \left[\frac{d \cdot \frac{dz}{dy}}{dx}\,dx + \frac{d \cdot \frac{dz}{dy}}{dy}\,dy\right]d$$

$$= \left(\frac{d^2z}{dx^2}dx + \frac{d^2z}{dyd}\,dy\right)dx + \left(\frac{d^2z}{dxdy}dx + \frac{d^2z}{dy^2}\,dy\right)dy$$

$$= \frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}dxdy + \frac{d^2z}{dy^2}\,dy^2 .$$

Das Differenzial d^2z im ersten Theile dieser Gleichung ist ein Totaldif ferenzial der zweiten Ordnung und die Ausdrücke:

$$\frac{d^2z}{dx^2},\quad \frac{d^2z}{dxdy},\quad \frac{d^2z}{dy^2}$$

bezeichnen die drei partiellen Differenzialcoefficienten oder die drei partielle Ableitungen der zweiten Ordnung, welche im Allgemeinen bestimmte Functio nen der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y sind, aber welche zufälli auch nur eine dieser Veränderlichen enthalten oder sich auf constante Größe reduciren, oder sogar auch für gewisse Werthe der Veränderlichen x, y unbe stimmt bleiben können, wie wir gehörigen Orts sehen werden.

Durch Fortsetzung dieser Rechnung ergibt sich, daß das Totaldifferenzia der n^{ten} Ordnung einer Function von zwei unabhängigen Veränderlichen x, y ausgedrückt wird durch:

$$d^nz = \frac{d^nz}{dx^n}dx^n + \frac{n}{1} \cdot \frac{d^nz}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2}dx^{n-2}dy^2 + \text{etc.} + \frac{d^nz}{dy^n}dy^n ,$$

welcher Ausdruck offenbar der Binomialformel analog ist, durch dieselbe Ar von Induction bewiesen wird und sich auf folgende symbolische Form:

$$d^nz = \left(\frac{1}{dx} \cdot dx + \frac{1}{dy} \cdot dy\right)^n d^nz ,$$

bringen läßt.

Ebenso würde das Gesetz der Entwickelung des Totaldifferenziales einer Function u von einer beliebigen Anzahl unabhängiger Veränderlicher x, y, z, t, ... durch die symbolische Gleichung:

$$d^nu = \left(\frac{1}{dx} \cdot dx + \frac{1}{dy} \cdot dy + \frac{1}{dz} \cdot dz + \text{etc.}\right)^n d^nu .$$

ausgedrückt. Den Grund dieser Analogieen zwischen der Entwickelung der Po tenzen und der Entwickelung der endlichen oder unendlich kleinen Differenzen haben wir bereits in §. 43 angegeben.

Unter *Gleichungen mit partiellen Differenzialen*, oder wie man sich gewöhnlicher ausdrückt, *mit partiellen Differenzen* (§. 118) ver steht man die Gleichungen, welche zwischen den unabhängigen Veränderlichen, den davon abhängigen Functionen und den partiellen Ableitungen oder den partiellen Differenzialcoefficienten dieser Function stattfinden; wogegen man unter

Gleichungen mit gewöhnlichen Differenzialen oder ſchlechthin unter Differenzialgleichungen diejenigen verſteht, worin nur Differenzialcoefficienten wie die vorkommen, wovon in der Theorie der Functionen einer einzigen Veränderlichen die Rede geweſen iſt. Die Ordnung einer partiellen Differenzialgleichung wird durch die Ordnung des darin vorkommenden Differenzialcoefficienten von der höchſten Ordnung beſtimmt. Die allgemeinſte Form einer partiellen Differenzialgleichung der erſten Ordnung zwiſchen zwei unabhängigen Veränderlichen x, y und der Function z iſt:

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

die einer partiellen Differenzialgleichung der zweiten Ordnung zwiſchen denſelben Veränderlichen iſt:

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}\right) = 0,$$

u. ſ. f.

Unter der Rechnung mit partiellen Differenzialen oder mit partiellen Differenzen verſteht man den Theil der Theorie der Functionen, welcher von den zwiſchen den Functionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher und zwiſchen ihren partiellen Differenzialcoefficienten oder ihren partiellen Ableitungen ſtattfindenden Verhältniſſen und im Allgemeinen von den partiellen Differenzialgleichungen der verſchiedenen Ordnungen handelt.

Wenn man blos zwei unabhängige Veränderliche x, y und eine Function z derſelben betrachtet, wie ſolches faſt immer bei den Anwendungen auf Geometrie der Fall iſt, ſo findet man es bequem, jede der partiellen Ableitungen der drei erſten Ordnungen mit einem einzigen Buchſtaben zu bezeichnen, weil dieſe Ableitungen häufig angewandt werden, und zu dieſem Zwecke werden wir uns nach Monge der folgenden Bezeichnung bedienen:

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy},$$

$$r = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2z}{dxdy}, \quad t = \frac{d^2z}{dy^2},$$

$$u = \frac{d^3z}{dx^3}, \quad m = \frac{d^3z}{dx^2dy}, \quad w = \frac{d^3z}{dxdy^2}, \quad v = \frac{d^3z}{dy^3},$$

oder:

$$dz = p\,dx + q\,dy$$
$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dxdy + t\,dy^2,$$
$$d^3z = u\,dx^3 + 3m\,dx^2dy + 3w\,dxdy^2 + v\,dy^3.$$

Nach dieſer Bezeichnung werden die partiellen Differenzialgleichungen der erſten und zweiten Ordnung zwiſchen den drei Veränderlichen x, y, z folglich ganz allgemein ausgedrückt durch:

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \quad f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

§. 125. Aus der analytiſchen Geometrie im Raume iſt bekannt, daß die ſtetige Function $z = f(x, y)$ immer durch die Ordinate einer auf drei rechtwinklichte Axen bezogenen krummen Fläche dargeſtellt werden kann. Die Werthe der Ableitungen p, q, r, s, t, ſtehen zu der Richtung der Berührungsebene und zu gewiſſen geometriſchen Eigenſchaften der krummen Fläche in Beziehungen, welche wir unterſuchen werden, wenn wir ſpeciell von der Anwendung der Differenzialrechnung auf die Geometrie in drei Dimenſionen handeln werden. In

dieſem Augenblicke dagegen wollen wir unterſuchen, von welchem Nutzen die geometriſchen Begriffe zur Erläuterung der Theorie der Functionen ſein können.

Nun iſt aber in dieſer Beziehung leicht einzuſehen, daß die geometriſche Darſtellung der Functionen von zwei veränderlichen Größen durch die Ordinaten krummer Flächen von wenig praktiſchem Nutzen iſt; denn wenn ſich eine Curve, wovon man eine endliche Anzahl einander hinreichend nahe liegender Punkte kennt, leicht in der Ebene conſtruiren läßt, ſo fehlt es doch auf der andern Seite an bequemen Verfahrungsarten zur figürlichen Darſtellung einer krummen Fläche im Raume, wovon man nur eine endliche Anzahl von Punkten kennt und ſelbſt einer Fläche, deren Geſetz der Erzeugung bekannt iſt. Dieſe Schwierigkeit hat die Entſtehung eines neuen Zweiges der Geometrie veranlaßt, welchen man die descriptive oder darſtellende Geometrie genannt hat, und deren Zweck darin beſteht, die Conſtructionen, welche im Raume ausgeführt werden müßten, auf graphiſche Conſtructionen in der Ebene zurückzuführen.

§. 126. Von allen Verfahrungsarten der descriptiven Geometrie zur Beſtimmung krummer Flächen mittelſt ebener Conſtructionen beſteht die allgemeinſte und die einzige, womit wir uns hier wegen ihres unmittelbaren Zuſammenhanges mit der analytiſchen Theorie der Functionen beſchäftigen wollen, darin, daß man die krumme Fläche mit einer Reihe horizontaler Ebenen durchſchneidet und die Durchſchnittscurven, welche Niveaulinien genannt werden, auf die horizontale Ebene der x, y projicirt, wo die projicirten Linien und ihre Projectionen, wegen des Parallelismus der Ebenen vollkommen aufeinander legbar ſein müſſen.

Für jede Niveaulinie hat man $z = c$, wo c eine beliebige Conſtante bezeichnet, und folglich iſt:

$$dz = 0 \text{ oder } pdx + qdy = 0,$$

die gemeinſchaftliche Differenzialgleichung aller Projectionen der Niveaulinien, und aus derſelben folgt:

$$y' = -\frac{p}{q}, \qquad (6)$$

wodurch für jeden Punkt (x, y) die Richtung der Tangente an der Projection einer Niveaulinie für dieſen Punkt beſtimmt iſt.

Wenn man von einem Punkte der krummen Fläche, deſſen Coordinaten x, y, z ſind, zu einem benachbarten Punkte, deſſen Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ ſind, übergeht; ſo ſteigt man in verticaler Richtung um die Höhe dz auf und beſchreibt parallel zu der Horizontalebene die unendlich kleine Linie $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Die Neigung oder der Abhang der auf der krummen Fläche beſchriebenen Linie, oder die Tangente des Winkels, welchen ſie mit der Horizontalebene bildet, wird folglich ausgedrückt durch:

$$\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{p + qy'}{\sqrt{1 + y'^2}}. \qquad (7)$$

Die Größe dieſer Neigung ändert ſich in demſelben Punkte der krummen Fläche, oder für dieſelben Werthe von x, y, p, q mit dem willkührlichen Verhältniſſe y'. Wenn man daher die Richtung der Linie des ſtärkſten Abhanges oder Falles beſtimmen will, ſo muß man die Ableitung des vorhergehenden Ausdruckes, als Function von y' betrachtet, gleich Null ſetzen, wodurch man:

$$y' = \frac{q}{p}, \qquad (8)$$

oder

$$qdx - pdy = 0,$$

für die gemeinſchaftliche Differenzialgleichung aller Projectionen der Linien des ſtärkſten Falles auf die Ebene der xy erhält. Nach einem bekannten Lehrſatze ergibt ſich aus der Vergleichung der Gleichungen (6) und (8), daß das Syſtem der Projectionen der Niveaulinien von dem Syſteme der Projectionen der Linien des ſtärkſten Falles rechtwinklicht durchſchnitten wird. Wenn alſo eine gewiſſe Anzahl einander hinreichend genäherter Curven des einen Syſtemes gegeben iſt, ſo kann man die Curven des andern Syſtemes mit einer hinreichenden Annäherung zeichnen.

Wenn man den aus der Gleichung (8) genommenen Werth von y' in den zweiten Theil der Gleichung (7) ſubſtituirt, ſo erhält man für den Werth des ſtärkſten Falles:

$$\sqrt{p^2+q^2}.$$

Das Verfahren, welches gegenwärtig in Frankreich bei den großen topographiſchen Arbeiten zur Darſtellung des Reliefs eines Terrains auf einer Horizontalebene angewandt wird, beſteht in der That darin, auf dieſer Horizontalebene die Reihe von Projectionen der Niveaulinien zu zeichnen, welche man erhält, wenn man die Oberfläche des Terrains mit gleichweit von einander entfernten Horizontalebenen durchſchneidet und die Reihe der Projectionen der Linien des ſtärkſten Falles conſtruirt, welche die Curven des erſten Syſtemes unter einem rechten Winkel durchſchneiden.

§. 127. Wenn jede verticale Ordinate die krumme Fläche nur in einem einzigen Punkte trifft und immer einen endlichen Werth behält, ſo bilden die Projectionen der Niveaulinien eine Reihe von Linien, wovon keine die übrigen ſchneidet, und welche auch nicht in ſich ſelbſt zurückkehren, nachdem z gewiſſe Werthe überſchritten hat. Dieſer Fall verdient eine beſondere Aufmerkſamkeit, weil derſelbe bei allen den Unterſuchungen vorkommt, wo die Veränderliche z eine phyſiſche Größe bezeichnet, welche eine Function zweier Coordinaten eines materiellen Punktes iſt. Wir wollen z. B., um die Begriffe zu fixiren, eine kreisförmige Scheibe betrachten, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten x, y iſt und welche man urſprünglich auf irgend eine Weiſe erhitzt hat. Ferner wollen wir annehmen, daß dieſe Scheibe eine ſo geringe Dicke hat, daß die Temperatur aller auf einer Normale der beiden Flächen der Scheibe liegenden Molecule nahezu dieſelbe iſt; ſo wird die Temperatur z aller auf derſelben Normale liegenden Molecule für einen beliebigen Zeitpunkt eine Function der Coordinaten x, y des Fußpunktes der Normale. Dieſe Function kann poſitiv oder negativ ſein, je nachdem man den Nullpunkt der Temperaturen beſtimmt; allein ſie wird immer einen endlichen Werth behalten, und zwar im Allgemeinen für jedes Syſtem von Werthen der Coordinaten x, y nur einen einzigen Werth. Das Geſetz dieſer Function wird anſchaulich gemacht, wenn man auf der Ebene der xy eine Reihe von Linien α, β, γ, ... (Fig. 36) beſchreibt, welche der Differenzialgleichung:

$$pdx + qdy = 0,$$

genügen, oder auf welchen die Temperatur denſelben Werth behält, und wenn man an jede Linie eine Zahl ſetzt, welche den Werth der Temperatur für die auf dieſer Linie liegenden Punkte ausdrückt. Dieſe Linien von gleicher Temperatur, deren Syſtem das Geſetz der Function z beſtimmen und graphiſch darſtellen kann, werden iſothermiſche Linien genannt.

Die Veränderliche z könnte auch die Dichtigkeit, die Ausdehnung und Zuſammenziehung eines materiellen Theilchens, den darauf wirkenden Druck, die Intenſität des darauf fallenden Lichtes, die Intenſität der von demſelben ausgehenden electriſchen und magnetiſchen Wirkungen ꝛc. bezeichnen, und die all-

gemeinen Merkmale der Function, womit wir uns bei dieſer Art von Unterſuchungen allein zu beſchäftigen haben, würden ganz dieſelben bleiben.

Um keine nicht durchaus nothwendigen Ausdrücke einzuführen, *) wollen wir auch die Linien Niveaulinien nennen, längs welcher die Function $z = f(x, y)$ einen conſtanten Werth behält, obgleich die Function z eine phyſiſche Größe und nicht mehr die verticale Ordinate einer krummen Fläche ausdrücken ſoll, wovon der Punkt (x, y, z) den Punkt (x, y) zur Horizontalprojection hat. Die Veränderung der Function z iſt Null, wenn man von einem Punkte auf der Niveaulinie zu dem benachbarten übergeht und ſie iſt für dieſelbe unendlich kleine Verrückung die möglichſt größte, wenn dieſe Verrückung in einer auf der Niveaulinie (§. 126) ſenkrechten Richtung geſchieht. Man kann daher die Linien, welche die Niveaulinien unter einem rechten Winkel durchſchneiden und den Projectionen der Linien des ſtärkſten Falles in der Theorie der krummen Flächen entſprechen, Linien der größten Veränderung nennen.

§. 128. Die in den vorhergehenden §§. betrachteten Functionen z, welche ſich übrigens mathematiſch ausdrücken laſſen mögen oder nicht, würden nicht unendlich werden können; aber ſie können Stetigkeitsunterbrechungen der erſten Ordnung erfahren, welche in dem plötzlichen Uebergange von einem endlichen Werthe zu einem andern beſtehen. Dieſes folgt, wie wir bereits an einem ähnlichen Falle gezeigt haben (§. 38), aus der Regel ſelbſt, vermöge welcher wir uns vorſtellen können, daß eine phyſiſche Größe z eine Function der Coordinaten eines mathematiſchen Punktes (x, y) wird. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß z die Dichtigkeit der Platte M (Fig. 36), längs der Normale, deren Fußpunkt, (x, y) iſt, bezeichnet. Um mit dieſer Definition eine phyſiſche Bedeutung verbinden zu können, muß man ſich auf der Fläche der Platte eine geſchloſſene Curve willkührlich beſchrieben denken, deren Umfang σ eine Fläche ω umſchließt, worin der Punkt (x, y) liegt. Die Fläche ω kann zur Grundfläche eines geraden Cylinders genommen werden, deſſen Höhe die Dicke der Platte iſt, und das Verhältniß der Maſſe dieſes Cylinders zu ſeinem Volumen iſt alsdann eine gewiſſe Zahl D, welche die mittlere Dichtigkeit des Cylinders ausdrückt.

Denkt man ſich nun, daß die Fläche ω ohne Ende abnimmt, aber immer den Punkt (x, y) enthält, ſo iſt die Grenze z, gegen welche das veränderliche Verhältniß D convergirt, und welche ſich mit den Coordinaten x, y ändern kann, die Function von x, y, welche man als Maß der Dichtigkeit der Platte auf der im Punkte (x, y) errichteten Normale nimmt. Das eben in Beziehung auf das Maß der Dichtigkeit Geſagte, würde auch auf das Maß der Temperatur, oder jeder andern phyſiſchen Größe anwendbar ſein.

Die Grenze z ändert ſich im Allgemeinen nicht, welche Form die Curven σ und welche Lage der Punkt (x, y) innerhalb der von dieſen Curven begrenzten Fläche auch haben mögen, und ſie ändert ſich im Allgemeinen auch nicht, wenn man den Punkt (x, y) ſogar auf den Umfang der Fläche ω verlegt; denn man könnte für dieſen Punkt einen demſelben innerhalb der Fläche ω unendlich nahe liegenden Punkt $(x + dx, y + dy)$ ſubſtituiren, für welchen der Werth der Function z von dem Werthe derſelben Function für den Punkt (x, y) nur um eine unendlich kleine Größe verſchieden wäre und folglich ver-

*) Man könnte die Linien, welche materielle Theilchen verbinden, die ſich in demſelben phyſiſchen Zuſtande befinden, oder für welche die betrachtete phyſiſche Größe $y = f(x, y)$ denſelben Werth hat, iſomeriſche Linien nennen, und dieſe Benennung iſt der bereits in den Gebrauch übergegangenen Benennung iſothermiſche Linien analog.

nachlässigt werden könnte. Allein nichts destoweniger begreift man leicht, daß sich die Grenze z für gewisse besondere Werthe von x, y ändern kann, je nachdem die unendlich kleine Fläche ω in allen Richtungen alle benachbarte Punkte von (x, y) enthält, oder nur die zwischen gewissen durch den Punkt (x, y) gezogenen Linien liegenden Punkte. In diesem letzten Falle ist der Unterschied der Werthe von z für zwei einander unendlich naheliegende Punkte nicht mehr unendlich klein, oder mit andern Worten, die Function z erfährt alsdann eine Unterbrechung der Stetigkeit der ersten Ordnung, welche in dem plötzlichen Uebergange von einem endlichen Werthe zu einem andern endlichen Werthe besteht.

Ein Beispiel dieser Art von Unterbrechungen der Stetigkeit erhält man, wenn man sich vorstellt, daß die Platte M (Fig. 37) aus zwei verschiedenen und nach der Linie np zusammengelötheten Metallen besteht. Die Dichtigkeit der Platte ist alsdann eine Function, welche sich plötzlich ändert, wenn man durch die Löthlinie geht, und wenn man für den Punkt (x, y) einen auf dieser Linie liegenden Punkt μ nimmt; so hat die Function z zwei verschiedene Werthe, je nachdem man diesen Punkt als zu dem Theile A oder zu dem Theile B der Platte gehörig betrachtet. Es seien z_1, z_2 diese beiden Werthe der Function z, so ist die eben erwähnte Grenze gleich:

$$\frac{z_1 + z_2}{2},$$

wenn der Punkt μ innerhalb der Fläche ω liegt; sie ist gleich z_1, wenn der Umfang σ durch den Punkt μ geht und zur Linken der Tangente st liegt, und sie ist endlich $= z_2$, wenn der Umfang wieder durch den Punkt μ geht, aber zur Rechten derselben Tangente liegt.

Wir wollen die Linien np, längs welcher die Function plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem andern endlichen Werthe übergeht **Unterbrechungslinien** nennen. Mehrere Unterbrechungslinien np, n′p′, n″p″, etc. (Fig. 38) können im Punkte μ einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben. Durch den Punkt μ wollen wir an diese Linien die Tangenten st, s′t′, s″t″, etc. ziehen und mit α_1, α_2, α_3, etc. die Bogen bezeichnen, welche auf dem Kreisumfange von dem Halbmesser $= 1$ die Winkel:

$$s\mu s', \; s'\mu s'', \; s''\mu t, \; \text{etc.}$$

messen; so hat die Function z im Punkte μ verschiedene Werthe z_1, z_2, z_3, etc. je nachdem man den Punkt μ als zu dem einen oder zu dem andern der Winkelräume:

$$n\mu n', \; n'\mu n'', \; n''\mu p, \; \text{etc.} \qquad (\alpha)$$

gehörig betrachtet. Die Grenze z, mit welcher diese Function im Allgemeinen übereinstimmt, ist gleich

$$\frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \text{etc.}}{2\pi},$$

wenn der Punkt μ in die Fläche ω fällt und sie bekommt die Werthe z_1, z_2, z_3, etc., wenn der Umfang σ durch den Punkt μ geht und außerdem ganz in einem der Winkelräume (α) liegt.

Wenn es Unterbrechungslinien gibt, so sind die Niveaulinien keine geschlossenen Curven mehr. Wenn z. B. np (Fig. 39) eine Unterbrechungslinie ist, so endigt sich eine vom Punkte μ ausgehende und zur Linken der Unterbrechungslinie liegende Niveaulinie im Allgemeinen zur Rechten derselben Linie in einem von μ verschiedenen Punkte ν. Umgekehrt kann man die Unterbrechungslinie als eine Verbindungslinie der Unterbrechungspunkte der aufeinander fol-

genden Niveaulinien betrachten, wenn dieſe Linien und folglich die Funct
Stetigkeitsunterbrechungen der erſten Ordnung erfahren.

Die Stetigkeitsunterbrechungen der zweiten Ordnung der Function z
den im Allgemeinen durch die Exiſtenz der vorſpringenden Punkte in den
veaulinien characteriſirt. Wenn man die einander in den ſucceſſiven Ni
linien entſprechenden vorſpringenden Punkte verbindet, ſo beſchreibt man
andere Linie, welche man eine Unterbrechungslinie der zweiten
nung nennen kann, u. ſ. f.

§. 129. Betrachten wir nun die Function mit drei unabhängigen
änderlichen:

$$u = f(x, y, z),$$

wenn u den Werth einer gewiſſen phyſiſchen Größe für einen Punkt (x,
bezeichnet, z. B. eine Attractiv- oder Repulſivkraft, eine Dichtigkeit,
Druck, eine Temperatur, u. ſ. w.

Wenn man:

$$\frac{d \cdot f(x, y, z)}{dx} = X, \quad \frac{d \cdot f(x, y, z)}{dy} = Y, \quad \frac{d \cdot f(x, y, z)}{dz} = Z,$$

ſetzt, ſo hat man:

$$du = Xdx + Ydy + Zdz,$$

in welchem Ausdrucke jeder der Buchſtaben X, Y, Z im Allgemeinen
Function der drei unabhängigen Veränderlichen x, y, z bezeichnet.

Da außerdem nach §. 123

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx}, \quad \frac{d^2u}{dxdz} = \frac{d^2u}{dzdx}, \quad \frac{d^2u}{dydz} = \frac{d^2u}{dzdy}$$

ſo müſſen die Functionen X, Y, Z die drei Bedingungsgleichungen erfüll

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}. \quad (1$$

Wen man der Function u eine Reihe conſtanter Werthe beilegt, ſo e
man eine Reihe von Flächen, welche alle der Differenzialgleichung:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

genügen und ſich nicht ſchneiden können, weil ſonſt die Function für denſ
materiellen Punkt mehrere verſchiedene Werthe annehmen könnte. Wenn
Function u eine Temperatur bezeichnet, ſo bekommen dieſe Flächen den N
iſothermiſche Flächen, während ſie in der Hydroſtatik, wo die Functi
einen Druck bezeichnet, Niveauflächen genannt werden, welchen Aus
wir aus dem bereits angegebenen Grunde (§. 127) bei jeder phyſiſchen
deutung der Function u beibehalten:

Wenn die Coordinaten x, y, z, rechtwinklige ſind, ſo wird die Entfer
des Punktes (x, y, z) von einem unendlich naheliegenden Punkte:

$$(x + dx, y + dy, z + dz),$$

ausgedrückt durch:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

und während des Ueberganges von einem Punkte zum andern nimmt die F
tion u das Increment du an, ſo daß das Verhältniß dieſes Incremente
der gegenſeitigen Entfernung der beiden betrachteten Punkte ausgedrückt
durch:

$$\frac{Xdx + Ydy + Zdz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

durch:

$$\frac{X + Yy' + Zz'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}, \qquad (m)$$

der Kürze wegen:

$$\frac{dy}{dx} = y', \frac{dz}{dx} = z'$$

t wird. Die Größe dieſes Verhältniſſes ändert ſich für denſelben Punkt Raumes oder für dieſelben Werthe der Größen X, Y, Z mit den will-ichen Verhältniſſen y', z', welche die Richtung beſtimmen, nach welcher Verrückung ſtattgefunden hat. Wenn man auf die als Function von y', z' chtete Größe (m) die Methode anwendet, welche weiter unten zur Be-nung der Maxima und Minima der Functionen mehrerer veränderlicher ßen angegeben werden wird, ſo findet man, daß der größte Werth des ältniſſes (m) ausgedrückt wird durch:

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},$$

daß die Linien der größten Veränderung die Niveauflächen unter rechten keln treffen.

§. 130. Die Theorie der Stetigkeitsunterbrechungen der Functionen von r oder von zwei Veränderlichen, welche phyſiſche Größen ausdrücken (§. 38 §. 128) läßt ſich ohne Schwierigkeit auf die Functionen mit drei Verän-ichen erſtrecken. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß ie Dichtigkeit des Körpers M im Punkte (x, y, z) ausdrückt. Zur nähern immung der Bedeutung dieſer Definition muß man ſich innerhalb des Kör-eine geſchloſſene Fläche ω von einer beliebigen Lage denken, jedoch ſo, der Punkt (x, y, z) in derſelben liegt. Das Verhältniß der Maſſe des dieſer Fläche umſchloſſenen Volumens zu dieſem Volumen ſelbſt iſt eine iſſe Zahl D, welche die *mittlere* Dichtigkeit von v ausdrückt. Stellt ſich nun vor, daß die Dimenſionen des Volumens v durch die fortwäh-e Veränderung der Fläche ω ohne Ende abnehmen, aber ſo, daß der kt (x, y, z) immer in dieſer Fläche bleibt; ſo iſt die Grenze, gegen welche veränderliche Verhältniß D convergirt, die Function u von x, y, z, welche als Maß der Dichtigkeit des Körpers im Punkte (x, y, z) nimmt. Dieſe inition iſt **mutatis mutandis** auch auf das Maß der Temperatur oder jeder ren phyſiſchen Größe anwendbar.

Hiernach iſt leicht begreiflich, wie die im Allgemeinen ſtetige Function u die auf gewiſſen Flächen liegenden Punkte plötzlich von einem endlichen rthe zu einem andern endlichen Werthe übergehen kann, und welche Flächen daher *Unterbrechungsflächen* nennen wollen. Es bezeichne μ einen einer ſolchen Fläche liegenden Punkt und A, B ſeien die beiden Theile des pers M, in welche derſelbe durch dieſe Fläche getheilt wird, und endlich u u_1, u_2 reſp. die Werthe der Grenze u für zwei unendlich nahe liegende kte von μ, wovon der eine in dem Theile A und der andere in dem ile B liegt; ſo wird der Werth der Grenze u für den Punkt μ ausge-kt durch:

$$\frac{u_1 + u_2}{2}.$$

Wenn der Punkt μ der gemeinſchaftliche Durchſchnittspunkt mehrerer Un-rechungsflächen iſt, ſo zieht man an die Durchſchnittslinien dieſer Flächen Punkte μ Tangenten, denkt ſich aus dem Punkte μ als Mittelpunkt mit

dem Halbmeſſer = 1 eine Kugel beſchrieben, verbindet die Punkte, worin di Tangenten die Kugelfläche treffen, durch Bogen größter Kreiſe und theilt ſo dieſ Fläche in Abtheilungen, deren Flächen τ_1, τ_2, τ_3, etc. den Regionen de Körpers M entſprechen, für welche die Grenze u in der unmittelbaren Näh des Punktes μ die Werthe u_1, u_2, u_3, etc. annimmt. Der Werth dieſe Function für den Punkt μ iſt alsdann das Mittel:

$$\frac{u_1\tau_1 + u_2\tau_2 + u_3\tau_3 + \text{etc.}}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \text{etc.}} = \frac{u_1\tau_1 + u_2\tau_2 + u_3\tau_3 + \text{etc.}}{4\pi}.$$

Man kann die Unterbrechungsfläche als den geometriſchen Ort der Unter brechungslinien der Niveauflächen betrachten, wenn dieſe Flächen, und folglich die Function μ Stetigkeitsunterbrechungen der erſten Ordnung erfahren.

Die Stetigkeitsunterbrechungen der zweiten Ordnung der Function u ent ſprechen den Kanten oder den vorſpringenden Linien auf den Niveauflächen und der geometriſche Ort der Kanten, welche einander auf den ſucceſſiven Ni veauflächen entſprechen, iſt eine Fläche, welche man eine Unterbrechungs fläche der zweiten Ordnung nennen kann.

Zweites Kapitel.

Differenzirung der unentwickelten Functionen von einer oder mehreren unabhängigen Veränderlichen. — Vertauſchung der Veränderlichen.

1. Differenzirung der unentwickelten Functionen.

§. 131. Wenn die Veränderliche y implicite als Function von x durch eine unaufgelöſ'te Gleichung:

$$f(x, y) = 0 \qquad (a)$$

beſtimmt wird, ſo kann der erſte Theil dieſer Gleichung als eine Function u der Veränderlichen x, y betrachtet werden, welche beſtändig = 0 bleibt, ſo daß die Incremente dx, dy durch die Gleichung:

$$du = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy = 0, \text{ oder } \frac{dy}{dx} = -\frac{du}{dx} : \frac{du}{dy}$$

mit einander verbunden ſind. Statt das Hülfszeichen u anzuwenden, kann man auch ſetzen:

$$\frac{df(x, y)}{dx}\,dx + \frac{df(x, y)}{dy}\,dy = 0,$$

oder was noch einfacher iſt:

$$\frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy = 0.$$

Wenn man den Differenzialcoefficienten $\frac{dy}{dx}$ mit y' bezeichnet, ſo nimmt dieſe Gleichung folgende Form an:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} y' = 0, \qquad (a')$$

raus folgt:

$$y' = -\frac{df}{dx} : \frac{df}{dy}.$$

Der zweite Theil dieſer Gleichung iſt im Allgemeinen eine entwickelte unction der beiden Veränderlichen x, y, und wenn man den aus der Gleiung (a) abgeleiteten Werth von y als Function von x ſubſtituirt; ſo erhält an y' als eine Function der einzigen Veränderlichen x. Wenn die Gleichung a) eine algebraiſche iſt, ſo kann man auch nach den gewöhnlichen Methoden wiſchen den Gleichungen (a) und (a') eliminiren, und alsdann beſtimmt die ultirende Gleichung, welche im Allgemeinen in Beziehung auf y' nicht algeriſch auflösbar iſt, die Ableitung y' als Function von x implicite.

Wegen des zwiſchen der unabhängigen Veränderlichen x und jeder der unctionen y, y' ſtattfindenden Zuſammenhanges iſt der erſte Theil der Gleiung (a') eine Function von x, welche für jeden Werth von x gleich Null leiben muß. Folglich iſt die Ableitung dieſes erſten Theiles, wenn man y, y' als Functionen von x behandelt, auch gleich Null, und man hat zwiſchen x, , y', y'', die Gleichung:

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dxdy} y' + \frac{d^2f}{dy^2} y'^2 + \frac{df}{dy} y'' = 0, \qquad (a'')$$

ſo daß man zwiſchen den Gleichungen (a), (a'), (a'') irgend zwei dieſer vier Veränderlichen eliminiren kann. Wenn man z. B. y' fortſchafft, ſo hat man wiſchen x, y', y'' die Gleichung:

$$\frac{d^2f}{dx^2} \cdot \left(\frac{df}{dy}\right)^2 - 2\frac{d^2f}{dxdy} \cdot \frac{df}{dx} \cdot \frac{df}{dy} + \frac{d^2f}{dy^2} \cdot \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^3 y'' = 0.$$

Ebenſo müßte man, um y''' zu beſtimmen, von dem erſten Theile der Gleichung (a'') die Ableitung in Beziehung auf x nehmen, indem man wieder die Regel für die Differenziirung der mittelbaren Functionen anwendete, wodurch man erhielte:

$$\frac{d^3f}{dx^3} + 3\frac{d^3f}{dx^2dy} y' + 3\frac{d^3f}{dxdy^2} y'^2 + \frac{d^3f}{dy^3} y'^3$$
$$+ 3\frac{d^2f}{dxdy} y'' + 3\frac{d^2f}{dy^2} y' y'' + \frac{df}{dy} y''' = 0.$$

Es hat durchaus keine Schwierigkeit, dieſe Rechnung ſucceſſive weiter fortzuſetzen und unmittelbar die Formel abzuleiten, welche den Werth von $y^{(n)}$ gibt.

§. 132. Wenn man n Gleichungen zwiſchen n + 1 Veränderlichen hat, bleibt nur eine einzige dieſer Veränderlichen eine unabhängige, wovon alle rigen Functionen ſind, welche ſich explicite ausdrücken ließen, wenn man die mination zwiſchen den gegebenen Gleichungen und die Auflöſung der reſulenden Gleichungen bewerkſtelligen könnte.

Wenn wir der Kürze wegen durch:

$$f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0, \ldots\ldots f_n = 0, \qquad (b)$$

e Gleichungen bezeichnen, wodurch die n + 1 Veränderlichen t, x, y, z, ... it einander verbunden ſind, ſo haben wir auch die abgeleiteten Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} df_1 &= \frac{df_1}{dt}dt + \frac{df}{dx}dx + \frac{df_1}{dy}dy + \frac{df_1}{dz}dz + \text{etc.} = 0,\\ df_2 &= \frac{df_2}{dt}dt + \frac{df_2}{dx}dx + \frac{df_2}{dy}dy + \frac{df_2}{dz}dz + \text{etc.} = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ df_n &= \frac{df_n}{dt}dt + \frac{df_n}{dx}dx + \frac{df_n}{dy}dy + \frac{df_n}{dz}dz + \text{etc.} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (b')$$

Wenn nun t die unabhängige Veränderliche iſt, ſo dividirt man all Gleichungen (b') durch dt und man erhält n lineare Gleichungen zwiſche n Differenzialcoefficienten:

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt},\ \text{etc},$$

vermittelſt welcher Gleichungen die Coefficienten einzeln als Functione t, x, z, etc. beſtimmt werden.

Ebenſo beſtimmen die Gleichungen:

$$\overline{\frac{d^2f_1}{dt_2}} = 0, \overline{\frac{d^2f_2}{dt^2}} = 0, \ \ldots\ldots \overline{\frac{d^2f_n}{dt^2}} = 0, \quad (b'')$$

welche man durch Differenzirung der Gleichungen (b') erhält, wenn m y, z, etc. als Functionen von t betrachtet, die Ableitungen der zr Ordnung:

$$\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2},\ \text{etc.}$$

u. ſ. f. Die Querſtriche über den Größen (b'') ſollen andeuten, da Zähler derſelben **Totaldifferenziale** und keine partiellen Differenziale (§. 118.)

Um die Begriffe beſſer zu fixiren, wollen wir annehmen, daß zw den drei Veränderlichen x, y, z die beiden Gleichungen:

$$f_1(x, y, z) = 0,\ f_2(x, y, z) = 0,$$

habe und daß x zur unabhängigen Veränderlichen genommen werde; ſo eine erſte Differenzirung:

$$\frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy}y' + \frac{df_1}{dz}z' = 0,$$
$$\frac{df_2}{dx} + \frac{df_2}{dy}y' + \frac{df_2}{dz}z' = 0.$$

woraus folgt:

$$y' = \left(\frac{df_1}{dx}\cdot\frac{df_2}{dz} - \frac{df_1}{dz}\cdot\frac{df_2}{dx}\right) : \left(\frac{df_1}{dy}\cdot\frac{df_2}{dz} - \frac{df_1}{dz}\cdot\frac{df_2}{dy}\right)$$
$$z' = \left(\frac{df_1}{dy}\cdot\frac{df_2}{dx} - \frac{df_1}{dx}\cdot\frac{df_2}{dy}\right) : \left(\frac{df_1}{dy}\cdot\frac{df_2}{dz} - \frac{df_1}{dz}\cdot\frac{df_2}{dy}\right).$$

Eine zweite Differenzirung führt auf die Gleichungen der zweiten nung:

$$\frac{d^2f_1}{dx^2} + 2\frac{d^2f_1}{dxdy}y' + 2\frac{d^2f_1}{dxdz}z' + 2\frac{d^2f_1}{dydz}y'z'$$
$$+ \frac{d^2f_1}{dy^2}y'^2 + \frac{d^2f_1}{dz^2}z'^2 + \frac{df_1}{dy}y'' + \frac{df^2}{dz}z'' = 0,$$

$$\frac{d^2f_2}{dx^2} + 2\frac{d^2f_2}{dxdy}y' + 2\frac{d^2f_2}{dxdz}z' + 2\frac{d^2f_2}{dydz}y'z'$$
$$+ \frac{d^2f_2}{dy^2}y'^2 + \frac{d^2f_2}{dz^2}z'^2 + \frac{df_2}{dy}y'' + \frac{df_2}{dz}z'' = 0,$$

welche die Werthe von y'', z'' als Functionen von x, y, z geben, nachdem man die aus den vorhergehenden Gleichungen abgeleiteten Werthe von y', z' substituirt hat. Alsdann kann man die Elimination von y, z, vermittelst der beiden gegebenen Gleichungen vornehmen, so daß man zwei Endgleichungen, die eine mit x, y'' und die andere mit y, z'' erhält.

Ebenso könnte man die Differenzialcoefficienten y''', z''', u. s. f. bestimmen.

§. 133. Wir wollen nun zu dem Falle übergehen, wo die Anzahl der Gleichungen zwischen den Veränderlichen mehrere der letzteren unbestimmt läßt, und um den einfachsten Fall zu betrachten, wollen wir annehmen, daß man zwischen den drei Veränderlichen x, y, z die eine Gleichung:

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (c)$$

habe, so ergibt sich daraus wieder die Gleichung:

$$df = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0, \qquad (c')$$

wodurch die Totaldifferenziale der Veränderlichen x, y, z mit einander verbunden sind. Aber im Allgemeinen will man die partiellen Ableitungen der Veränderlichen berechnen, welche man als Function betrachtet, und zwar in Beziehung auf jede der unabhängigen Veränderlichen (§. 118). Diese partiellen Ableitungen ergeben sich aus der vorhergehenden Gleichung, nachdem man bestimmt hat, welche der Veränderlichen als unabhängig behandelt werden sollen. Wir wollen annehmen, daß x und y die unabhängigen Veränderlichen sind, und setzen (§. 124):

$$dz = pdx + qdy,$$

so verwandelt sich die Gleichung (c') in:

$$\left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}p\right)dx + \left(\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}q\right)dy = 0,$$

und da sie stattfinden muß, was für ein Verhältniß die Veränderungen dx, dy sich zu einander haben mögen, so zerfällt sie in die beiden folgenden Gleichungen:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}p = 0, \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}q = 0, \qquad (d)$$

woraus sich die Werthe von p, q im Allgemeinen als Functionen von x, y, z geben, und man kann alsdann z vermittelst der Gleichung (c) fortschaffen.

Wenn man die Gleichung (c') differenzirt, indem man x und y als unabhängige Veränderliche und folglich dx, dy als constante Factoren behandelt, erhält man:

$$d^2f = \frac{d^2f}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2f}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2f}{dz^2}dz^2$$
$$+ 2\left(\frac{d^2f}{dxdy}dxdy + \frac{d^2f}{dxdz}dxdz + \frac{d^2f}{dydz}dydz\right) + \frac{df}{dz}d^2z = 0. \qquad (c'')$$

Für das Totaldifferenzial d^2z hat man den conventionellen Ausdruck (§. 124):

$$d^2z = r\,dx^2 - 2s\,dx\,dy - t\,dy^2$$

[illegible] man [illegible] dz in die Glei-[illegible] [illegible] man:

$$\left(\frac{df}{dz}r - \frac{d^2f}{dz^2}p^2 - 2\frac{d^2f}{dx\,dz}p - \frac{d^2f}{dx^2}\right)dx^2$$

$$-2\left(\frac{df}{dz}s + \frac{d^2f}{dy\,dz}p - \frac{d^2f}{dx\,dz}q - \frac{d^2f}{dz^2}pq + \frac{d^2f}{dx\,dy}\right)dx\,dy$$

$$\left(\frac{df}{dz}t + \frac{d^2f}{dz^2}q^2 - 2\frac{d^2f}{dy\,dz}q + \frac{d^2f}{dy^2}\right)dy^2 = 0.$$

[illegible] Gleichung unabhängig von den [illegible] Factoren dx, dy, statt-[illegible] [illegible] sie in drei andere Gleichungen, welche nach der Sub-[illegible] [illegible] den Gleichungen (d) abgeleiteten Werthe von p, q in fol-[illegible]:

$$\frac{df}{dx} = -2\frac{d^2f}{dx\,dz}\cdot\frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dz} + \frac{d^2f}{dz^2}\cdot\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \frac{d^2f}{dx^2}\cdot\left(\frac{df}{dz}\right)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^2 s - \frac{df}{dz}\cdot\left(\frac{d^2f}{dy\,dz}\cdot\frac{df}{dx} + \frac{d^2f}{dx\,dz}\cdot\frac{df}{dy}\right)$$

$$+ \frac{d^2f}{dx\,dy}\cdot\left(\frac{df}{dz}\right)^2 + \frac{d^2f}{dz^2}\cdot\frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dy} = 0,$$

$$\frac{df}{dz} = -2\frac{d^2f}{dy\,dz}\cdot\frac{df}{dy}\cdot\frac{df}{dz} + \frac{d^2f}{dz^2}\cdot\left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \frac{d^2f}{dy^2}\cdot\left(\frac{df}{dz}\right)^2 = 0.$$

[illegible] auf einem directeren Wege zu demselben Resultate, wenn [illegible] man, da die Gleichungen (d) für jeden Werth von x und [illegible], die Ableitungen ihrer ersten Glieder, successive in Be-[illegible] x und auf y genommen, gleich Null setzen kann und einerseits [illegible] daß die partiellen Ableitungen:

$$\frac{df}{dx},\ \frac{df}{dy},\ \frac{df}{dz}$$

[illegible] die drei Veränderlichen x, y, z enthalten und andererseits, daß [illegible] unentwickelte Functionen von x, y sind, so daß man hat:

$$\frac{dz}{dx} = p,\ \frac{dz}{dy} = q,\ \frac{dp}{dx} = r,\ \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s,\ \frac{dq}{dy} = t.$$

[illegible] Weise erhält man vier Gleichungen; denn die Gleichungen (d) [illegible] folgendermaßen ausdrücken:

$$\overline{\frac{df}{dx}} = 0,\ \overline{\frac{df}{dy}} = 0,$$

[illegible] Querstriche andeuten, daß man die [illegible] auf y differenzirt hat, indem nicht [illegible] [illegible] vorkommenden Veränderlichen x, y, [illegible] [illegible] genommen ist, welche ver[illegible] [illegible] abhängt. Demnach muß die [illegible] [illegible] auf y mit der Ableitung [illegible] identisch sein, indem beide [illegible]

$$\frac{d^2f}{dxdy} = 0$$

werden können.

) könnte man die partiellen Ableitungen der höhern Ordnungen für nen von einer beliebigen Anzahl unabhängiger Veränderlicher, welche o eine Anzahl von Gleichungen mit einander verbunden sind, bestimdaß sich eine andere Schwierigkeit, als die Weitläufigkeit der Rechbieten könnte.

4. Wir haben schon mehrere Male den Satz in Erinnerung ge- eine entwickelte oder unentwickelte algebraische Function, welche, so re successiven Ableitungen für einen besonderen Werth der unabhänderlichen verschwindet, identisch gleich Null ist. Dieser Satz, welfür jede Art von Functionen stillschweigend als wahr anzunehmen jedoch streng bewiesen werden, um so mehr, da derselbe für nicht- Functionen nicht allgemein gültig ist. Nun läßt sich aber dieser leicht beweisen, sobald man die Regel für die Differenzirung der ten Functionen (Gleichungen) aufgestellt hat.

es sei y eine Function von x, welche durch die algebraische Gleichung:

$$) = Y_n x^n + Y_{n-1}x^{n-1} + ... + Y_2 x^2 + Y_1 x + Y_0 = 0, \quad (g)$$

ird, worin die Coefficienten Y_n, etc., ganze Polynome von y be- o kann man, der Allgemeinheit des Beweises unbeschadet, annehmen, der Werth von x ist, welcher y, y', y'', etc. verschwinden macht. y mit x zugleich verschwinden, so muß Y_0 von der Form $Y_0 y$ sein, anderes Polynom mit y bezeichnet. Wir wollen diesen Werth von Gleichung (g) substituiren und dann differenziren, so kommt:

$$nY_n x^{n-1} + (n-1)\,Y_{n-1}x^{n-2} + ... + 2Y_2 x + Y_1$$

$$x^n + Y'_{n-1}x^{n-1} + ... + Y'_2 x + Y_1 x + Y_0 + Y'_0 y) = 0.$$

0 hat man nach der Voraussetzung $y = 0$ und diese Gleichung h auf:

$$Y_1 + y' Y_0 = 0.$$

nach der Voraussetzung muß sich aus der vorhergehenden Gleichung : 0 ergeben, und folglich ist Y_1 durch y theilbar und von der Form

man von der Gleichung (g) die zweite Ableitung nimmt, so er-

$$(n-1)Y_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)Y_{n-1}x^{n-3} + ... + 2Y_2$$

$$nY'_n x^{n-1} + (n-1)Y'_{n-1}x^{n-2} + ... + 2Y'_2 x + Y_1 + Y'_1 y]$$

$$'_n x^n + Y''_{n-1}x^{n-1} + ... + Y''_2 x^2 + Y''_1 x + 2Y'_0 + Y''_0 y]$$

$$x_{n-1}x^{n-1} + ... + Y'_2 x^2 + Y'_1 x + Y_0 + Y'_0 y] = 0.$$

[redacted] $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$ setzt, so reducirt sich

$$2Y_2 + y'' Y_0 = 0;$$

schwinden soll, so muß Y_2 die Form $Y_2 y$, so kann man beweisen, daß y ein Gleichung (g) ist, woraus sich folgbaben mag, wodurch der ausge-

Hieraus folgt, wie bereits in §. 37 und §. 103 bemerkt iſt, daß eine Function, welche in einem Theile ihres Laufes durch die algebraiſche Function fx und in einem andern Theile durch eine andere, nicht mit der erſten identiſche Function f_1x ausgedrückt wird, nothwendig eine Stetigkeitsunterbrechung von einer niedrigen oder höhern Ordnung für den Werth von x erfährt, welcher der Wiedervereinigung der Functionen f, f_1 entſpricht; denn ſonſt würde die algebraiſche Function:

$$y = fx - f_1x,$$

ſo wie alle ihre Ableitungen bis ins unendliche verſchwinden, ohne identiſch Null zu ſein, was dem eben bewieſenen Satze zuwider ſein würde.

§. 135. Wir haben in §. 70 angenommen, und man nimmt es gewöhnlich an, aber ohne formellen Beweis, daß die Function:

$$\log. x = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

eine irreductibele transcendente Function iſt, welche ſich durch keine entwickelte oder unentwickelte algebraiſche Function ausdrücken läßt; aber erſt Liouville hat dieſen wichtigen Satz auf folgende ſehr einfache Art bewieſen. *)

Wenn log. x durch eine entwickelte algebraiſche Function $\frac{X}{X_1}$ ausgedrückt werden könnte, worin X, X_1 ganze poſitive Polynome bezeichnen, welche als prim unter ſich vorausgeſetzt werden können; ſo erhielte man durch Differenzirung:

$$\frac{1}{x} = \frac{X'X_1 - XX'_1}{X_1^2}, \text{ oder } \frac{X_1^2}{x} = X'X_1 - XX'_1,$$

woraus folgt, daß X_1 durch x theilbar iſt; aber X nicht, weil ſonſt X nicht zu X_1 prim wäre. Man kann alſo ſetzen:

$$X_1 = x^n\Xi, \text{ folglich } X'_1 = nx^{n-1}\Xi + x^n\Xi'$$

wo Ξ ein nicht durch x theilbares Polynom bezeichnet und n einen ganzen poſitiven Exponenten. Man erhält alſo die Gleichung:

$$x^{2n-1}\Xi^2 = x^n\Xi X' - nx^{n-1}\Xi X - x^n\Xi' X,$$

oder:

$$n\Xi X = x(\Xi X' - \Xi' X) - x^n\Xi^2,$$

welche ungereimt iſt, weil der zweite Theil derſelben durch x theilbar iſt, aber der erſte nicht.

Wir wollen nun annehmen, daß die Function $y = \log. x$ implicite durch die algebraiſche Gleichung:

$$f(x, y) = X_n y^n + X_{n-1}y^{n-1} + ... + X_1 y + X_0 = 0 \quad (h)$$

beſtimmt werden könne, wo die Coefficienten X_n, etc. ganze Polynome von x bezeichnen; ſo hätte man:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y' = 0$$

*) Journal de Mathématiques, t. II. p. 66.

und wenn man für y' seinen durch die Differenzirung der logarithmischen Function gegebenen Werth setzt:

$$x\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}=0. \qquad (i)$$

Wenn nun aber eine der Wurzeln der Gleichung (i), welche als irreductibel, d. h. als nicht in rationale Factoren von x zerlegbar vorausgesetzt ist, die Eigenschaft hat, die Gleichung (h) identisch zu machen, so wird diese Gleichung, deren erster Theil eine rationale Function von x ist, auch durch alle übrigen Wurzeln der Gleichung (i) identisch gemacht. Wenn man also diese Wurzeln, welche im Allgemeinen eben so viele verschiedene Functionen von x sind, resp. mit y_1, y_2, ... y_n bezeichnet, so hat man:

$$\frac{dx}{x}=dy_1,\ \frac{dx}{x}=dy_2,\ \ldots\ldots\ \frac{dx}{x}=dy_n,$$

und folglich:

$$\frac{dx}{x}=\frac{1}{n}d(y_1+y_2+\ldots\ldots+y_n)=-\frac{1}{n}d\left(\frac{X_{n-1}}{X_n}\right),$$

was, wie eben bewiesen worden, unmöglich ist.

Die Transcendente e^x läßt sich ebenfalls durch keine algebraische Function ausdrücken; denn die Gleichung $f(x, e^x)=0$, wo f eine algebraische Function bezeichnet, ist gleichbedeutend mit der Gleichung $f(\log.\ y, y)=0$, deren Unmöglichkeit eben bewiesen ist.

Dagegen bilden die Sinus, Cosinus und Kreisbogen keine irreductibelen Transcendenten, weil sich dieselben in Exponentialgrößen und Logarithmen verwandeln lassen, indem man imaginäre Wurzelgrößen anwendet, wodurch, aus einem algebraischen Gesichtspunkte betrachtet, die Natur der Function nicht geändert wird.

Die Potenzen mit irrationalen Exponenten bilden ebenfalls keine irreductibelen Transcendenten, weil der Ausdruck $y=x^\alpha$ gleichbedeutend ist mit $y=e^{\alpha\log.x}$, und sich also die durch x^α angedeutete Operation an x, wo α eine Irrationalzahl bezeichnet, durch die durch das Zeichen $\log.x$ angedeutete Operation und durch die durch das Zeichen e^u angedeutete Operation an e^u verrichten läßt.

Es bliebe nun noch zu beweisen übrig, daß die Functionen e^α, $\log.x$ auch irreductibel unter sich sind; allein da dieser Beweis complicirter ist als die vorhergehenden, so verweisen wir auf die Abhandlung von Liouville selbst.

Im Allgemeinen schließt sich der Beweis der Irreductibilität der verschiedenen transcendenten Functionen an die Untersuchungen über die Theilbarkeit der Zahlen und über die algebraische Zerlegbarkeit der Gleichungen an, und alle diese Untersuchungen haben das mit einander gemein, daß dadurch mehr die Theorie, als die Fortschritte der Methoden vervollkommnet werden, worauf die Anwendungen des Calculs beruhen. Da bei diesen Untersuchungen die Beweise fast immer durch die Zurückführung auf das Absurde geführt werden, so stößt man dabei auch auf die Schwierigkeiten und Complicationen einer Beweisart, welche zwar logisch streng ist, aber welche über den rationalen Zusammenhang und über die Erzeugung oder den Grund der bewiesenen Wahrheiten keinen Aufschluß gibt.

II. Vertauſchung der Veränderlichen.

§. 136. Es iſt hier der Ort, die Vertauſchung der unabhängigen Veränderlichen, welche wir bei der Auseinanderſetzung der Principien der Theorie der Ableitungen und der Differenziale (§. 39 und §. 56) nur angedeutet haben, allgemein zu behandeln.

Wir wollen annehmen, daß, wenn y als Function der unabhängigen Veränderlichen x betrachtet wird, dieſe Function und ihre Ableitungen der verſchiedenen Ordnungen in einer Gleichung:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots\right) = 0 \qquad (f)$$

vorkommen, und es darauf ankommt, zu wiſſen, wie die Ableitungen:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots$$

als Functionen einer dritten unabhängigen Veränderlichen t, welche mit x und y durch eine gegebene Gleichung:

$$\varphi(x, y, t) = 0 \qquad (\varphi)$$

verbunden iſt, ausgedrückt werden müſſen.

Wenn man die Gleichung (φ) in Beziehung auf die unabhängige Veränderliche t differenzirt, ſo erhält man eine Reihe von abgeleiteten Gleichungen:

$$\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = 0 \qquad (\varphi')$$

$$\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2\varphi}{dx^2}\cdot\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\cdot\frac{dy^2}{dt^2}$$
$$+2\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{d^2\varphi}{dx\,dt}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d^2\varphi}{dy\,dt}\cdot\frac{dy}{dt}\right) + \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0, \qquad (\varphi'')$$

$$\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^3y}{dt^3} + \text{etc.} = 0, \qquad (\varphi''')$$

etc.

Aber andererſeits hat man auch:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt},$$

woraus folgt:

$$\frac{dy'}{dt} = y''\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

und folglich:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3.$$

Durch dieſelbe Rechnung findet man:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\cdot\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt} + 3\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^3x}{dt^3}\right] : \left(\frac{dx}{dt}\right)^5,$$

u. ſ. f.

Vermittelſt der Gleichungen (φ), (φ'), (φ''), etc. kann man aus den vorhergehenden Formeln die Veränderliche x und ihre Ableitungen:

$$\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}, \ldots\ldots$$

tſchaffen, ſo daß die Formel (f), nachdem man die Werthe von:

$$x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots$$

bſtituirt hat, nur noch die Größen:

$$t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^3y}{dt^3}, \ldots\ldots$$

thält, und ebenſo könnte man ſie darauf zurückführen, daß ſie nur noch die röße n:

$$t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}, \ldots\ldots$$

thielte.

§. 137. Die Vertauſchung der unabhängigen Veränderlichen iſt nur ein ſonderer Fall der Vertauſchung der Veränderlichen überhaupt. Wenn man r die beiden in der Gleichung (f) vorkommenden veränderlichen Größen x, zwei andere veränderliche Größen v, t ſubſtituiren will, welche mit den er- n durch die beiden Gleichungen:

$$\varphi(x, y, v, t) = 0, \quad \psi(x, y, v, t) = 0$$

rbunden ſind, wo t die unabhängige Veränderliche bezeichnet; ſo nimmt man n dieſen beiden letzten Gleichungen die ſucceſſiven Ableitungen, indem man y, v als unentwickelte Functionen von t betrachtet, wodurch man eine Reihe n Gleichungen erhält, welche wir der Kürze wegen mit:

$$(\varphi'), (\psi'), (\varphi''), (\psi''), (\varphi'''), (\psi'''), \text{ etc.}$$

zeichnen wollen. Die Anzahl dieſer Gleichungen iſt $= 2n$, wenn $\frac{d^ny}{dx^n}$ r höchſte in der Gleichung (f) vorkommende Differenzialcoefficient iſt. Ver- ittelſt dieſer $2n$ Gleichungen drückt man alsdann in Verbindung mit den bei- n Gleichungen, wovon ſie abgeleitet ſind, die Größen:

$$x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots\ldots \frac{d^nx}{dt^n}; \quad y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{dt^n} \qquad (1)$$

s Functionen von:

$$t, v, \frac{dv}{dt}, \frac{d^2v}{dt^2}, \ldots\ldots \frac{d^nv}{dt^n} \qquad (2)$$

us, und ſubſtituirt die erhaltenen Ausdrücke in die Werthe von:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}$$

s Functionen der Größen (1); ſo erhält man endlich die Formel (f) ver- ittelſt der Größen (2) ausgedrückt.

§. 138. Um die Allgemeinheit dieſes Verfahrens zu zeigen, brauchen wir nur auf den Fall zweier unabhängiger Veränderlicher anzuwenden. Es ſei ıher:

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}, \ldots\ldots\right) = 0 \qquad (F)$$

eine Gleichung, worin man für die drei Veränderlichen x, y, z drei andere Veränderliche u, v, t ſetzen will, wo die beiden letzten als unabhängige Veränderliche behandelt werden und alle drei mit x, y, z durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x, y, z, u, v, t) = 0,\ \psi(x, y, z, u, v, t) = 0,\\ \tilde{\omega}(x, y, z, u, v, t) = 0.\end{array}\right\} \quad (\Phi)$$

verbunden ſind, ſo hat man:

$$\frac{dz}{dv} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dv} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dv},\quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dv^2} = \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}\cdot\frac{dx}{dv}\cdot\frac{dy}{dv} + \frac{d^2z}{dy^2}\cdot\left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dv^2} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dv^2},$$

$$\frac{d^2z}{dvdt} = \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{dx}{dv}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d^2z}{dxdy}\left(\frac{dx}{dv}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dv}\right) + \frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{dz}{dv}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dvdt} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dvdt},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dy^2}\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dt^2},$$

etc.

Aus dieſen Formeln leitet man die partiellen Ableitungen:

$$\frac{dz}{dx},\ \frac{dz}{dy},\ \frac{d^2z}{dx^2},\ \frac{d^2z}{dxdy},\ \frac{d^2z}{dy^2},\ \text{etc.}, \quad (3)$$

als Functionen von:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{dx}{dv},\ \dfrac{dy}{dv},\ \dfrac{dz}{dv},\ \dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt},\ \dfrac{dz}{dt}\\ \dfrac{d^2x}{dv^2},\ \dfrac{d^2y}{dv^2},\ \dfrac{d^2z}{dv^2},\ \dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2},\ \dfrac{d^2z}{dt^2}\\ \dfrac{d^2x}{dvdt},\ \dfrac{d^2y}{dvdt},\ \dfrac{d^2z}{dvdt},\ \text{etc.}\end{array}\right\} \quad (4)$$

ausgedrückt, ab.

Aber wenn man andererſeits die Gleichungen (Φ) ſucceſſive in Beziehung auf v und in Beziehung auf t differenzirt und bis zu den Differenzialen von derſelben Ordnung, als die höchſten in der Gleichung (F) vorkommenden Ableitungen fortgeht; ſo erhält man ſo viele Gleichungen, als erforderlich ſind, um die Größen (4) und folglich die Größen (3) als Functionen von:

$$\frac{du}{dv},\ \frac{du}{dt},\ \frac{d^2u}{dv^2},\ \frac{d^2u}{dvdt},\ \frac{d^2u}{dt^2},\ \text{etc.}$$

auszudrücken. *)

*) Wir wollen das vorhin Geſagte durch ein Beiſpiel erläutern, welches in der Mechanik und in der mathematiſchen Phyſik häufig vorkommt.

Drittes Kapitel.

Beſtimmung des Werthes der entwickelten und unentwickelten Functionen von mehreren veränderlichen Größen, wenn dieſe Functionen unter unbeſtimmten Formen erſcheinen. — Theorie der Maxima und Minima dieſer Functionen.

I. Beſtimmung des Werthes der entwickelten Functionen von mehreren veränderlichen Größen, wenn dieſe Functionen unter unbeſtimmten Formen erſcheinen.

§. 139. Wenn Functionen von einer einzigen unabhängigen Veränderlichen für beſondere Werthe dieſer letztern unter den unbeſtimmten Formen:

$$\frac{0}{0}, \pm\frac{\infty}{\infty},$$

erſcheinen, ſo wird der Werth ſolcher Functionen nach den in Kap. 3 des vorhergehenden Buches angegebenen Verfahrungsarten beſtimmt; aber wenn eine Function z von zwei unabhängigen Veränderlichen x, y unter einer dieſer unbeſtimmten Formen für ein Werthepaar der Veränderlichen x und y erſcheint,

---

Es ſeien x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes und r, ω, ψ die Polarcoordinaten deſſelben, ſo hat man bekanntlich zwiſchen dieſen ſechs Veränderlichen die folgenden drei Gleichungen:

$$z = r\cos.\omega, \quad y = r\sin.\omega\sin.\psi, \quad x = r\sin.\omega\cos.\psi,$$

und vermittelſt des vorhin angegebenen Verfahrens findet man:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr}\sin.\omega\cos.\psi + \frac{du}{d\omega}\frac{\cos.\omega\cos.\psi}{r} - \frac{du}{d\psi}\frac{\sin.\psi}{r\sin.\omega},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dr}\sin.\omega\sin.\psi + \frac{du}{d\omega}\frac{\cos.\omega\sin.\psi}{r} + \frac{du}{d\psi}\frac{\cos.\psi}{r\sin.\omega},$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dr}\cos.\omega - \frac{du}{d\omega}\frac{\sin.\omega}{r},$$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dr^2}\sin.^2\omega\sin.\psi\cos.\psi + \frac{d^2u}{d\omega^2}\frac{\cos.^2\omega\sin.\psi\cos.\psi}{r^2} - \frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{\sin.\psi\cos.\psi}{r^2\sin.^2\omega}$$
$$+ 2\frac{d^2u}{d\omega dr}\frac{\sin.\omega\cos\omega\sin.\psi\cos.\psi}{r} + \frac{d^2u}{d\psi dr}\left(\frac{\cos.^2\psi - \sin.^2\psi}{r}\right)$$
$$+ \frac{d^2u}{d\psi\,d\omega}\frac{(\cos.^2\psi - \sin.^2\psi)\cos.\omega}{r^2\sin.\omega} - \frac{du}{dr}\frac{\sin.^2\omega\sin.\psi\cos.\psi}{r}$$
$$- \frac{du}{d\omega}\frac{\cos.\omega\sin.\psi\cos.\psi}{r^2}\left(2\sin.\omega + \frac{1}{\sin.\omega}\right) + \frac{du}{d\psi}\left(\frac{\sin.^2\psi - \cos.^2\psi}{r^2\sin.^2\omega}\right),$$

$$\frac{d^2u}{dxdz} = \frac{d^2u}{dr^2}\sin.\omega\cos.\omega\cos.\psi - \frac{d^2u}{d\omega^2}\frac{\sin.\omega\cos.\omega\sin.\psi}{r^2}$$
$$+ \frac{d^2u}{d\omega dr}\frac{(\cos.^2\omega - \sin.^2\omega)\cos.\psi}{r} - \frac{d^2u}{d\psi dr}\frac{\sin.\psi\cos.\omega}{r\sin.\omega} + \frac{d^2u}{d\omega d\psi}\frac{\sin.\psi}{r^2}$$
$$+ \frac{du}{d\omega}\frac{(\sin.^2\omega - \cos.^2\omega)\cos.\psi}{r^2} - \frac{du}{dr}\frac{\sin.\omega\cos.\omega\cos.\psi}{r},$$

ſo kann man den Zahlenwerth der Function durch die erwähnte Methode erſt dann beſtimmen, nachdem man einen willkührlichen Zuſammenhang oder eine willkührliche Relation zwiſchen den beiden unabhängigen Veränderlichen angenommen hat, und der für z erhaltene Zahlenwerth ändert ſich im Allgemeinen mit der zwiſchen y und x aufgeſtellten Relation. Man kann daher, ſo lange x und y unabhängig bleiben, die Unbeſtimmtheit der Function z nicht abſolut beſeitigen, ſondern blos im Allgemeinen Grenzen angeben, zwiſchen welchen der Werth von z liegen muß.

Es ſei:

$$z = \frac{f(x, y)}{F(x, y)},$$

und x_0, y_0 ſeien die Werthe von x, y, welche die Functionen f und F gleichzeitig verſchwinden machen. Mit p_0, q_0, r_0, etc. wollen wir die Werthe bezeichnen, welche die partiellen Ableitungen p, q, r, etc. der Function f annehmen, wenn man darin $x = x_0$, $y = y_0$ ſetzt (§. 124) und P_0, Q_0, R_0, etc. ſeien die analogen Größen für die Function F. Endlich bezeichne y_0' den Werth, welchen das ſich aus der zwiſchen y und x aufgeſtellten willkührlichen Relation ergebende Verhältniß $y' = \frac{dy}{dx}$ für daſſelbe Werthſyſtem von x und y annimmt; ſo wird der Werth z_0 von z ausgedrückt durch:

$$\frac{d^2u}{dydz} = \frac{d^2u}{dr^2}\sin.\omega\cos.\omega\sin.\psi - \frac{d^2u}{d\omega^2}\frac{\sin.\omega\cos.\omega\sin.\psi}{r^2}$$
$$+ \frac{d^2u}{d\omega dr}\frac{(\cos.^2\omega - \sin.^2\omega)\sin.\psi}{r} + \frac{d^2u}{d\psi dr}\frac{\cos.\psi\cos.\omega}{r\sin.\omega} - \frac{d^2u}{d\omega d\psi}\frac{\cos.\psi}{r^2}$$
$$+ \frac{du}{d\omega}\frac{(\sin.^2\omega - \cos.^2\omega)\sin.\psi}{r^3} - \frac{du}{dr}\frac{\sin.\omega\cos.\omega\sin.\psi}{r},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\sin.^2\omega\cos.^2\psi + \frac{d^2u}{d\omega^2}\frac{\cos.^2\omega\cos.^2\psi}{r^2} + \frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{\sin.^2\psi}{r^2\sin.^2\omega}$$
$$+ 2\frac{d^2u}{d\omega dr}\frac{\sin.\omega\cos.\omega\cos.^2\psi}{r} - 2\frac{d^2u}{d\psi dr}\frac{\sin.\psi\cos\psi}{r}$$
$$- 2\frac{d^2u}{d\omega d\psi}\frac{\sin.\psi\cos.\psi}{r^2\,tang.\omega} + \frac{du}{dr}\frac{\cos.^2\omega\cos.^2\psi + \sin.^2\psi}{r}$$
$$+ \frac{du}{d\omega}\cos.\omega\left(\frac{\sin.^2\psi - 2\sin.^2\omega\cos.^2\psi}{r^2\sin.\omega}\right) + 2\frac{du}{d\psi}\frac{\sin.\psi\cos.\psi}{r^2\sin.^2\omega},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\sin.^2\omega\sin.^2\psi + \frac{d^2u}{d\omega^2}\frac{\cos.^2\omega\sin.^2\psi}{r^2} + \frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{\cos.^2\psi}{r^2\sin.^2\omega}$$
$$+ 2\frac{d^2u}{d\omega dr}\frac{\sin\omega\cos.\omega\sin.^2\psi}{r} + 2\frac{d^2u}{d\psi dr}\frac{\sin.\psi\cos.\psi}{r}$$
$$+ 2\frac{d^2u}{d\omega d\psi}\frac{\sin.\psi\cos.\psi}{r^2\,tang.\omega} + \frac{du}{dr}\left(\frac{\cos.^2\omega\sin.^2\psi + \cos.^2\psi}{r}\right)$$
$$\frac{du}{d\omega}\cos.\omega\left(\frac{\cos.^2\psi - 2\sin.^2\omega\sin.^2\psi}{r^2\sin.\omega}\right) - 2\frac{du}{d\psi}\frac{\sin.\psi\cos.\psi}{r^2\sin.^2\omega},$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\cos.^2\omega + \frac{d^2u}{d\omega^2}\frac{\sin.^2\omega}{r^2} - 2\frac{d^2u}{d\omega dr}\frac{\sin.\omega\cos.\omega}{r} + \frac{du}{dr}\frac{\sin.^2\omega}{r}$$
$$+ 2\frac{du}{d\omega}\frac{\sin.\omega\cos.\omega}{r^2}.$$

Z. d. Ueberſ.

$$z_0 = \frac{P_0 + q_0 y'_0}{P_0 + Q_0 y'_0}, \qquad (a)$$

bleibt unter dieſer allgemeinen Form, wegen der Unbeſtimmtheit des Cocienten y'_0 unbeſtimmt; aber wenn man zu gleicher Zeit:

$$P_0 = 0, \quad P_0 = 0, \qquad (p)$$

r:

$$q_0 = 0, \; Q_0 = 0, \qquad (q)$$

te, ſo verſchwände der Coefficient y'_0 und der Werth von z_0 bliebe nicht hr unbeſtimmt.

Wenn endlich die beiden Syſteme von Gleichungen (p), (q) gleichzeitig tt fänden, ſo müßte man von den Functionen f, F die Ableitungen der eiten Ordnung nehmen, welche im Allgemeinen ausgedrückt werden durch:

$$r + 2sy' + ty'^2 + qy'',$$
$$R + 2Sy' + Ty'^2 + Qy'',$$

d ſich für $x = x_0$, $y = y_0$ vermöge der Gleichungen (q) auf:

$$r_0 + 2s_0 y'_0 + t_0 y'^2_0, \quad R_0 + 2S_0 y'_0 + T_0 y'^2_0$$

ıciren, woraus folgt:

$$z_0 = \frac{r_0 + 2s_0 y'_0 + t_0 y'^2_0}{R_0 + 2S_0 y'_0 + T_0 y'^2_0}, \qquad (b)$$

d dieſer Werth iſt wegen der Unbeſtimmtheit des Coefficienten y'_0 im Allmeinen unbeſtimmt.

Wenn ferner:

$$r_0 = 0, \; s_0 = 0, \; t_0 = 0; \; R_0 = 0, \; S_0 = 0, \; T_0 = 0,$$

ire, ſo müßte man zu den Ableitungen der dritten Ordnung übergehen, ſ. f. Dieſes Verfahren läßt ſich leicht auf eine beliebige Anzahl unabhänger veränderlicher Größen erſtrecken.

Beiſpiel 1. Es ſei:

$$z = \frac{\log. x + \log. y}{x + 2y - 3}, \; x_0 = 1, \; y_0 = 1,$$

kommt:

$$p_0 = 1, \; q_0 = 1, \; P_0 = 1, \; Q_0 = 2,$$

oraus folgt:

$$z_0 = \frac{1 + y'_0}{1 + 2y'_0},$$

d z_0 kann alle Werthe zwiſchen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen.

Beiſpiel 2. Es ſei:

$$z = \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} - 1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}} - y + 1}; \; x_0 = 1, \; y_0 = 1,$$

hat man:

$$p_0 = 0, \; q_0 = \frac{3}{2}, \; P_0 = 0, \; Q_0 = -1,$$

nd z_0 bekommt den beſtimmten Werth $-\frac{3}{2}$.

Beiſpiel 3. Es ſei:

$$z = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2};\ x_0 = 0,\ y_0 = 0,$$

ſo geſchieht den Gleichungen (p) und (q) Genüge. Man muß daher zu Ableitungen der zweiten Ordnung übergehen und man erhält:

$$r_0 = 2,\ s_0 = 2,\ t_0 = 2,\ R_0 = 2,\ S_0 = 0,\ T_0 = 2,$$

woraus folgt:

$$z_0 = \frac{(1+y'_0)^2}{1+y'^2_0}.$$

Der Werth von z_0 liegt, obgleich er unbeſtimmt iſt, zwiſchen den Gr zen 0 und + 2, wie man fände, wenn man auf dieſe Function von y'_0 gewöhnliche Regel für die Beſtimmung der Maxima und Minima anwendet

§. 140. Die eben auseinandergeſetzte Methode kann unbrauchbar werd wenn die Functionen p_0, q_0, P_0, Q_0, etc. unendlich werden, oder ſelbſt un unbeſtimmten Formen erſcheinen, und alsdann muß man zu beſondern Re nungskunſtgriffen ſeine Zuflucht nehmen. Wir wollen z. B. die Function:

$$z = y\sqrt{x^2+y^2}$$

betrachten, deren partielle Ableitungen der erſten und zweiten Ordnung f gende ſind:

$$p = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ q = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$r = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\ s = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\ t = \frac{2y^3+3yx^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für die Werthe $x_0 = 0,\ y_0 = 0$ verſchwindet die Function z und i partiellen Ableitungen erſcheinen unter der Form $\frac{0}{0}$. Ferner überzeugt u ſich leicht, daß ſich die wahren Werthe der Größen p, q, r, s, t nach vorhergehenden Methode nicht würden beſtimmen laſſen; aber wenn man Syſtem ſehr nahe liegender Werthe betrachtet, für welches:

$$x = x_0 + \Delta x_0 = \Delta x_0,$$
$$y = y_0 + \Delta y_0 = \Delta y_0,$$

iſt, und wenn man $\Delta y_0 = \alpha \Delta x_0$ ſetzt, ſo kommt:

$$p_0 = \Delta x_0 \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}},\ q = \Delta x_0 \cdot \frac{1+2\alpha^2}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

$$r_0 = \frac{\alpha^3}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}},\ s_0 = \frac{1}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}},\ t_0 = \frac{2\alpha^3+3\alpha}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nun kann man Δx_0 gegen die Grenze Null convergiren laſſen, und ſich α an dieſer Grenze in y'_0 verwandelt; ſo hat man:

$$p_0 = 0,\ q_0 = 0,$$

$$r_0 = \frac{y'^3_0}{(1+y'^2_0)^{\frac{3}{2}}},\ s_0 = \frac{1}{(1+y'^2_0)^{\frac{3}{2}}},\ t_0 = \frac{2y'^3_0+3y'_0}{(1+y'^2_0)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Werthe von r_0, s_0, t_0, bleiben unbeſtimmt, aber liegen immer zwiſchen gewiſſen Grenzen, welche für

r_0 ſind -1 und $+1$, und entſprechen $y'_0 = -\infty$, $y'_0 = +\infty$;
s_0 „ 0 „ $+1$, „ „ „ $y'_0 = \pm\infty$, $y'_0 = 0$;
t_0 „ -2 „ $+2$, „ „ „ $y'_0 = -\infty$, $y'_0 = +\infty$.

II Beſtimmung des Werthes der unentwickelten Functionen, wenn ſie unter unbeſtimmten Formen erſcheinen.

§. 141. Es ſei:

$$f(x, y) = 0 \qquad (c)$$

eine Gleichung, welche y implicite als Function von x beſtimmt, und wir wollen ſetzen:

$$\frac{df(x, y)}{dx} = f'(x, y), \quad \frac{df(x, y)}{dy} = f_1(x, y).$$

Wenn der erſte Theil der Gleichung (c) für $x = x_0$ verſchwindet, was y auch für einen Werth haben mag, ſo kann man aus dieſer Gleichung nicht unmittelbar den entſprechenden Werth von y_0, welcher anſcheinend unbeſtimmt iſt, ableiten. In dieſem Falle verſchwindet die Function:

$$f(x_0, y + \Delta y) - f(x_0, y)$$

für jeden Werth von y und Δy, und folglich verſchwindet die Function $f'(x_0, y)$ ebenfalls unabhängig von y. Mithin reducirt ſich die Ableitung der Gleichung (c), welche im Allgemeinen die Form:

$$f'(x, y) + y'f'(x, y) = 0$$

hat, für $x = x_0$ auf:

$$f'(x_0, y_0) = 0,$$

und aus dieſer letzten Gleichung zieht man den Werth von y_0. Wenn derſelben ebenfalls genügt würde, ſo müßte man zu der Gleichung:

$$f''(x_0, y_0) = 0$$

übergehen, u. ſ. f.

Es ſei z. B.:

$$f(x, y) = mx^2 - x + \log.(1 + xy) = 0, \quad x_0 = 0,$$

ſo iſt die abgeleitete Gleichung:

$$2mx - 1 + \frac{y + xy'}{1 + xy} = 0,$$

und ſie reducirt ſich für $x = 0$ auf:

$$-1 + y_0 = 0, \text{ oder } y_0 = 1.$$

Wir wollen ferner

$$f(x, y) = (y^2 - 1)x^2 - y[\log.(1 + x)]^2 = 0, \quad x_0 = 0$$

ſetzen, ſo iſt die erſte abgeleitete Gleichung:

$$\{2yx^2 - [\log.(1 + x)]^2\}y' + 2x(y^2 - 1) - 2y\frac{\log.(1 + x)}{1 + x} = 0,$$

und wenn wir das Glied mit y', welches für $x = 0$ verſchwinden muß, hinweglaſſen, ſo bleibt uns die Gleichung:

$$x(1 + x)(y^2 - 1) - y\log.(1 + x) = 0,$$

welcher noch unabhängig von y durch den Werth $x = 0$ Genüge geschieht. Aber wenn man die zweite Ableitung:

$$[2yx(1+x) - \log.(1+x)]\,y' + (y^2-1)(1-2x) - \frac{y}{1+x} = 0$$

nimmt und darin $x = 0$ setzt, so sind die zugehörigen Werthe von y die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$y^2 - y - 1 = 0.$$

§. 142. Wir wollen nun eine Differenzialgleichung:

$$f(x, y, y') = 0, \qquad (c')$$

betrachten und dieselbe zunächst auf die Form:

$$y' = \frac{f(x, y)}{F(x, y)}$$

gebracht annehmen. Durch x_0, y_0 wollen wir die Werthe von x, y bezeichnen, welche die Functionen f, F zugleich verschwinden machen, und mit y'_0 den zugehörigen Werth von y'; so wird der Werth von y'_0 vermöge der Formel (a) durch die Gleichung des zweiten Grades:

$$y'_0 = \frac{P_0 + q_0 y'_0}{P_0 + Q_0 y'_0}, \text{ oder } Q_0 y_0'^2 + (P_0 - q_0)\,y'_0 - p_0 = 0$$

gegeben. Wenn außerdem die Gleichungen (p) und (q) erfüllt würden, so wäre der Werth von y'_0 nach der Formel (b) eine Wurzel der Gleichung des dritten Grades:

$$y'_0 = \frac{r_0 + 2s_0 y'_0 + t_0 y'^2_0}{R_0 + 2S_0 y'_0 + T_0 y'^2_0},$$

oder:

$$T_0 y'^3_0 - (2S_0 - t_0)\,y'^2_0 + (R_0 - 2s_0)\,y'_0 - r_0 = 0,$$

u. s. f.

Es kann jedoch geschehen, daß der Werth von y'_0 wirklich unbestimmt ist, was z. B. der Fall sein würde, wenn die Gleichung:

$$Qy'^2 + (P - q)\,y' - p = 0$$

für alle Werthe von y' unabhängig von den x und y beigelegten Werthen erfüllt würde. Alsdann würde die Gleichung:

$$Ty'^3 + (2S - t)\,y'^2 + (R - 2s)\,y' - r = 0$$

und alle durch wiederholte Differenzirung davon abgeleiteten Gleichungen ebenfalls identisch gemacht. Man fände z. B., daß der durch die Gleichung:

$$y' = \frac{y}{x}$$

gegebene Werth von y' für die Werthe $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ wirklich unbestimmt ist.

Allgemein, wenn die besonderen Werthe x_0, y_0 der Gleichung (c') unabhängig von y' genügen, so reducirt sich die abgeleitete Gleichung:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\,y' + \frac{df}{dy'}\,y'' = 0$$

für dieselben Werthe auf:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0 + \left(\frac{df}{dy}\right)y'_0 = 0 \qquad (c''_0)$$

eil der Ausdruck $\left(\frac{df}{dy'}\right)_0$, welcher den Werth von $\frac{df}{dy'}$ für $y' = 0$ aus-

ückt, nach dem weiter oben Gesagten (§. 141) verschwinden muß. Die nctionen:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0, \quad \left(\frac{df}{dy}\right)_0$$

üssen im Allgemeinen die drei Größen x_0, y_0, y'_0 enthalten, und folglich nn die Gleichung (c''_0) in Beziehung auf die Unbekannte y'_0 nicht linear sein.

Wir wollen annehmen, daß die Gleichung (c') in Beziehung auf y' algebraisch oder von der Form:

$$f_0(x, y) + f_1(x, y) \cdot y' + f_2(x, y) \cdot y'^2 + \text{etc.} = 0$$

ei, so verwandelt sich die Gleichung (c''_0) in folgende:

$$\left(\frac{df_0}{dx}\right) + \left(\frac{df_0}{dy} + \frac{df_1}{dx}\right)_0 y'_0 + \left(\frac{df_1}{dy} + \frac{df_2}{dx}\right)_0 y'^2_0 + \left(\frac{df_2}{dy}\right)_0 y_0'^3 + \text{etc.}$$

nd ist folglich im Allgemeinen in Beziehung auf y'_0 von einem um eine Einheit höhern Grade, als die Gleichung (c') in Beziehung auf y'.

II. Bestimmung der Maxima und Minima der entwickelten Functionen von mehreren Veränderlichen.

§. 143. Wenn die Function zweier Veränderlichen:

$$z = f(x, y)$$

egeben ist und man nimmt zwischen y und x eine willkührliche Relation an, so wird z eine Function der einzigen unabhängigen Veränderlichen x und man hat:

$$\frac{dz}{dx} = p + qy',$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = r + 2sy' + ty'^2 + qy''$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = u + 3uy' + 3wy'^2 + vy'^3 + 3(s + ty')y'' + qy'''$$

ete.

Die Querstriche über den Differenzialen dz, d^2z, etc. sollen Totaldifferenziale andeuten; die Buchstaben p, q, r, etc. haben die in §. 124 angegebene Bedeutung und y', y'', y''', etc. bezeichnen, wie gewöhnlich, die Differenzialcoefficienten der Größe y, welche vermöge der zwischen y und x angenommenen willkührlichen Relation, als eine Function von x betrachtet wird. Hiernach hat man für die gemeinschaftliche Bedingungsgleichung des Maximums und Minimums (§. 91):

$$p + qy' = 0, \qquad (d)$$

und außerdem muß in dem Falle des Maximums die Ungleichheit:

$$r + 2sy' + ty'^2 + qy'' < 0 \qquad (d_1)$$

und in dem Falle des Minimums die entgegengesetzte Ungleichheit:

$$r + 2sy' + ty'^2 + qy'' > 0 \qquad (d_2)$$

erfüllt werden. Wenn man nun ausdrückt, daß diese Bedingungen unabhängig von der zwischen y und x willkührlich angenommenen Relation erfüllt werden;

ſo werden eben dadurch die Bedingungen des Maximums und Minimums der Function z in der Vorausſetzung der Unabhängigkeit der Veränderlichen x, y beſtimmt.

Soll aber die Gleichung (d) unabhängig von jeder Relation zwiſchen y und x erfüllt werden, ſo muß einzeln:

$$p = 0, \quad q = 0 \qquad (e)$$

ſein, wodurch die Ungleichheiten (d_1) und (d_2) auf folgende reducirt werden:

$$r + 2sy' + ty'^2 < 0,$$
$$r + 2sy' + ty'^2 > 0.$$

Soll der gemeinſchaftliche erſte Theil dieſer beiden Ungleichheiten für jeden Werth von y' daſſelbe Zeichen behalten, ſo müſſen die Wurzeln der in Beziehung auf y' aufgelößten Gleichung:

$$r + 2sy' + ty'^2 = 0 \qquad (f)$$

imaginär ſein, wozu erfordert wird, daß die Bedingung:

$$s^2 - rt < 0 \qquad (g)$$

erfüllt wird, welches wieder erfordert, daß die Functionen r, t daſſelbe Zeichen haben, nachdem man die aus den Gleichungen (e) gezogenen Werthe von x, y ſubſtituirt hat. Wenn die Ungleichheit (g) durch dieſe Werthe erfüllt wird, ſo findet ein Maximum, oder Minimum ſtatt, je nachdem die Functionen r, t beide negativ oder poſitiv ſind.

§. 144. Die Theorie der Maxima und Minima der Functionen mit zwei unabhängigen Veränderlichen ergibt ſich ſehr einfach aus der Betrachtung der Niveaulinien (§. 127), deren Differenzialgleichung die Gleichung (d) iſt. Denn es iſt einleuchtend, daß die Niveaulinie in dem Punkte (x, y), für welchen die Function z ein Maximum oder Minimum iſt, verſchwinden oder vielmehr ſich auf einen iſolirten Punkt reduciren muß. Es wird alſo erfordert (wie wir ſpäter bei der Betrachtung der ſingulären Punkte ebener Curven näher zeigen werden), daß man aus der Gleichung:

$$y' = -\frac{p}{q} \qquad (d')$$

keinen reellen Werth von y' ableiten kann, obgleich die Werthe von p, q weder imaginär, noch unendlich ſind, weil ſonſt die Function z aufhörte, reell zu ſein, oder wenigſtens eine Stetigkeitsunterbrechung der zweiten Ordnung erführe. Der vorhergehende Werth von y' muß folglich unter der unbeſtimmten Form $\frac{0}{0}$ erſcheinen, und man hat folglich für das Maximum, wie für das Minimum:

$$p = 0, \quad q = 0.$$

Der wahre Werth von y' wird folglich nach dem weiter oben Geſagten (§. 142) durch die Gleichung:

$$y' = -\frac{r + sy'}{s + ty'},$$

welche von der Gleichung (f) nicht verſchieden iſt, gegeben, und damit man endlich aus dieſer Gleichung keine reellen Werthe für y' ableiten kann, muß die Ungleichheit (g) erfüllt werden.

Wenn man dagegen die Ungleichheit:

$$s^2 - rt > 0$$

hat, ſo ergeben ſich aus der Gleichung (f) zwei reelle Werthe von y', und der Punkt (x, y) iſt der Durchſchnittspunkt zweier Zweige mn, $n'mn'$ (Fig. 40) einer Niveaulinie, welche die Ebene der xy um den Punkt m herum in vier Regionen theilt, wovon in zwei derſelben der Werth von z von dem Punkte m aus zunimmt, während er in den beiden andern von demſelben Punkte aus abnimmt.

§. 145. Die Bedingungen (e) und (g) ſind die des abſoluten Maximums und Minimums. Wenn man zwiſchen y und x die Relation $y = \varphi x$ annimmt und in dieſer Vorausſetzung den Werth von x beſtimmt, welcher die Function z zu einem relativen Maximum oder Minimum macht, ſo iſt dieſer Werth die Abſciſſe des Punktes, wo die Linie $y = \varphi x$ von einer Niveaulinie berührt wird.

Im Allgemeinen verſteht man unter relativen Maximis und Minimis diejenigen, welche ſtattfinden, nachdem man zwiſchen den unabhängigen Veränderlichen willkührliche Beziehungen angenommen hat, wodurch die Anzahl derſelben vermindert wird.

§. 146. Gewöhnlich ſind die Coefficienten r, s, t der Gleichung (f) nur von den Veränderlichen x, y und nicht von y' abhängig; aber wenn es geſchieht, daß dieſe Coefficienten zufällig unter der Form $\frac{0}{0}$ erſcheinen, ſo kann es auch geſchehen, daß ſich ihre nach den im Anfange dieſes Kapitels angegebenen Verfahrungsarten gefundenen wahren Werthe mit y' ändern, und da alsdann die Gleichung (f) in Beziehung auf y' nicht mehr vom zweiten Grade iſt, ſo werden die vorhergehenden Schlüſſe unzuläſſig. Es ſei z. B.:

$$z = y\sqrt{x^2 + y^2},$$

ſo geſchieht nach §. 140 den Gleichungen (e) durch das Werthſyſtem $x = 0$, $y = 0$ Genüge, und die Gleichung (f) verwandelt ſich in folgende:

$$y'^5 + 2y'^3 + y' = 0.$$

Da dieſe Gleichung die reelle Wurzel $y' = 0$ hat, ſo entſpricht das Syſtem der eben angeführten Werthe keinem Maximum oder Minimum der Function z und in allen ſolchen Fällen hat man die Ungleichheit (g) nicht mehr zu betrachten.

§. 147. Wenn die Werthe von x, y, welche den Gleichungen (e) genügen, auch den Gleichungen:

$$r = 0,\ s = 0,\ t = 0, \qquad (e_1)$$

Genüge leiſten, ſo kann die Gleichung (f) nicht mehr den Werth von y' geben, welcher ſich alsdann aus der Formel:

$$y' = -\frac{u + 2uy' + wy'^2}{u + 2wy' + vy'^2}$$

oder:

$$u + 3uy' + 3wy'^2 + vy'^3 = 0 \qquad (f_1)$$

ergibt. Da dieſe Gleichung von einem ungeraden Grade in Beziehung auf y' iſt, ſo lange die partiellen Ableitungen der dritten Ordnung u, v, u, w nicht von y' abhängen; ſo hat ſie nothwendig eine reelle Wurzel, und folglich können die Werthe x, y, welche Wurzeln der Gleichungen (e) und (e_1) ſind, die Function z nicht zu einem Maximum, oder Minimum machen, wofern nicht einzeln:

$$u = 0,\ u = 0,\ w = 0,\ v = 0, \qquad (e_2)$$

iſt, d. h. wofern nicht alle Glieder des Totaldifferenziales der dritten Ordnung:

$$\frac{d^3z}{dx^3},$$

wie die der Totaldifferenziale der erſten und zweiten Ordnung einzeln verſchwinden.

Außerdem iſt erforderlich, daß das Polynom des vierten Grades in Beziehung auf y':

$$\frac{d^4z}{dx^4},$$

wenn es gleich Null geſetzt wird, nur imaginäre Werthe für y' gibt, und wenn dieſe neue Bedingung erfüllt wird, ſo findet ein Maximum, oder Minimum ſtatt, je nachdem das Polynom für alle Werthe von y' beſtändig negativ oder beſtändig poſitiv bleibt.

Wenn man dieſe Analyſe weiter fortſetzt, ſo erhält man als allgemeine Regel für die Exiſtenz des Maximums oder Minimums folgende:

1) Es muß das erſte Totaldifferenzialverhältniß oder die erſte Totalableitung, deren Glieder nicht ſämmtlich einzeln verſchwinden, von einer geraden Ordnung ſein, und

2) muß dieſe Totalableitung daſſelbe Zeichen behalten (nämlich das negative in dem Falle des Maximums und das poſitive in dem Falle des Minimums), von welcher Beſchaffenheit das zwiſchen den unendlich kleinen Veränderungen der unabhängigen Veränderlichen willkührlich angenommene Verhältniß auch ſein mag.

Dieſes iſt in der That die Regel, welche die Schriftſteller ohne alle Einſchränkung für die Beſtimmung der Maxima und Minima zu geben pflegen; aber wobei eine ſehr wichtige Beſchränkung nothwendig iſt. Denn wenn z. B. einige der partiellen Ableitungen u, m, w, v unter den unbeſtimmten Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ erſchienen und ihre wahren Werthe ſich mit y' ändern könnten, ſo könnte die Gleichung (f_1) keine algebraiſche oder in Beziehung auf y' von keinem ungeraden Grade mehr ſein und nur imaginäre Wurzeln haben, ſo daß ein Maximum oder Minimum ſtattfinden könnte, ohne daß die Gleichungen (e_2) erfüllt würden.

§. 148. Wenn die Function z eine Stetigkeitsunterbrechung der zweiten Ordnung erfährt und die Ableitungen p, q beide unendlich werden, ſo wird der Werth von y' durch die Gleichung (d') wieder unter einer unbeſtimmten Form gegeben, und man muß für jeden Fall eine ſpecielle Unterſuchung anſtellen, um zu erfahren, ob dieſer Umſtand einem Maximum oder Minimum von z entſpricht, oder nicht.

Es ſei z. B.:

$$z = \sqrt[3]{x^2 + y^2},$$

ſo iſt:

$$p = \frac{2x}{3(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad q = \frac{2y}{3(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}$$

und die Werthe $x = 0$, $y = 0$, welche z verſchwinden machen, machen p und q unendlich. Denn wenn man $y = \alpha x$ ſetzt, ſo erhält man die Werthe:

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x} \cdot (1+\alpha^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad q = \frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt[3]{x} \cdot (1+\alpha^2)^{\frac{2}{3}}},$$

lche für $x = 0$ unendlich werden. Aber an dieſer Grenze verwandelt ſich s Verhältniß α in y', und die Gleichung (d') gibt:

$$y' = -\frac{P}{q} = -\frac{1}{y'}, \text{ folglich } y' = \pm\sqrt{-1}.$$

Die Imaginarität dieſer Werthe von y' zeigt, daß es keine durch den fangspunkt der Coordinaten gehende Niveaulinie gibt, und daß folglich die- Punkt einem Maximum oder Minimum von z entſpricht. Uebrigens erhellet s der Form der Function, daß ſie nur ein Minimum geſtatten kann.

§. 149. Wir wollen nun die Function:

$$u = f(x, y, z)$$

n drei Veränderlichen betrachten und der Kürze wegen folgende Bezeichnun- n anwenden:

$$\frac{du}{dx} = p_1, \frac{du}{dy} = p_2, \frac{du}{dz} = p_3;$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = r_1, \frac{d^2u}{dy^2} = r_2, \frac{d^2u}{dz} = r_3;$$

$$\frac{d^2u}{dxdy} = s_{1,2}, \frac{d^2u}{dxdz} = s_{1,3}, \frac{d^2u}{dydz} = s_{2,3}.$$

enn man ſich zwiſchen x und jeder der beiden andern Veränderlichen y und eine willkührliche Relation aufgeſtellt denkt, ſo wird u eine Function der zigen Veränderlichen x, und die gemeinſchaftliche Bedingungsgleichung für s Maximum und Minimum iſt:

$$\frac{\overline{du}}{dx} = p_1 + p_2y' + p_3z' = 0.$$

oll alſo ein abſolutes Maximum oder Minimum (§. 145) ſtattfinden, oder ll die vorhergehende Gleichung unabhängig von den willkührlichen Verhält- ſſen y', z' erfüllt werden, ſo muß einzeln:

$$p_1 = 0, \; p_2 = 0, \; p_3 = 0 \qquad (E)$$

in, wodurch ſich der allgemeine Ausdruck von

$$\frac{\overline{d^2u}}{dx^2}$$

f das Polynom:

$$r_1 + r_2y'^2 + r_3z'^2 + 2(s_{1,2}y' + s_{1,3}z' + s_{2,3}y'z')$$

ducirt. Außerdem iſt erforderlich, daß dieſes Polynom daſſelbe Zeichen be- lt, ohne zu verſchwinden, was für relle Werthe man y', z' auch beilegen ag, und daß folglich die Gleichung mit y', z', welche gebildet wird, wenn an dieſes Polynom gleich Null ſetzt, niemals für die eine dieſer Veränderli- en einen reellen Werth gibt, was für einen reellen Werth man der andern eränderlichen auch beilegen mag.

Wenn man dieſe Gleichung in Beziehung auf y' auflöſt, ſo findet man, ß y' beſtändig imaginär bleibt, wenn für jeden Werth von z' die Bedingung:

$$(s_{1,2} + s_{2,3}z')^2 - r_2(r_3z'^2 + 2s_{1,3}z' + r_1) < 0,$$

der:

$$(s^2_{2,3} - r_2r_3)z'^2 + 2(s_{1,2}s_{2,3} - r_2s_{1,3})z' + s^2_{1,2} - r_1r_2 < 0$$

erfüllt wird, welche letzte Bedingung ihrerseits erfüllt wird, wenn zunächst:

$$s_{1,2}^2 - r_1 r_2 < 0,\ s_{2,3}^2 - r_2 r_3 < 0, \qquad (G)$$

und dann:

$$(s_{1,2}s_{2,3} - r_2 s_{1,3})^2 - (s_{1,2}^2 r_1 r_2)(s_{2,3}^2 - r_1 r_3) < 0. \qquad (G_1)$$

ist. Die Ungleichheiten (G) erfordern, daß die drei partiellen Ableitungen r_1, r_2, r_3 dasselbe Zeichen haben, und wenn die eine dieser Ungleichheiten stattfindet, so ist die andere eine Folge aus der Ungleichheit (G_1), so daß diese letzte Ungleichheit in Verbindung mit der einen der Ungleichheiten (G) und mit den Gleichungen (E) das System der Bedingungen für die Existenz des Maximums oder Minimums bildet. Aus der Symmetrie folgt ferner, daß in diesem Systeme auch:

$$s_{1,3}^2 - r_1 r_3 < 0$$

sein muß, und es findet ein Maximum statt, wenn die drei Ableitungen r_1, r_2, r_3 negativ sind, und ein Minimum dagegen, wenn sie alle drei positiv sind.

Wenn die Werthe von x, y, z, welche den Gleichungen (E) genügen, auch den folgenden:

$$r_1 = 0,\ r_2 = 0,\ r_3 = 0;\ s_{1,2} = 0,\ s_{1,3} = 0,\ s_{2,3} = 0, \qquad (E_1)$$

genügten, so wäre zu der Existenz des Maximums oder Minimums erforderlich, daß dieselben Werthe alle partiellen Ableitungen der dritten Ordnung verschwinden machten, und daß die Totalableitung der vierten Ordnung beständig dasselbe Zeichen behielte (nämlich das negative Zeichen in dem Falle des Maximums und das positive in dem Falle des Minimums) unabhängig von den willkührlichen Verhältnissen y', z'; u. s. f.

Diese Regel würde jedoch unbrauchbar werden, wenn die nicht verschwindenden partiellen Ableitungen unter einer unbestimmten Form erschienen und Functionen der Verhältnisse y', z' würden, wie wir an den Beispielen von Functionen zweier Veränderlicher gesehen haben.

Die vorhergehende Regel würde ferner unbrauchbar und man müßte für jeden Fall eine specielle Untersuchung anstellen, wenn die partiellen Ableitungen der ersten Ordnung oder der höhern Ordnungen unendlich würden.

§. 150. Als Anwendung dieser Theorie wollen wir unter allen isoperimetrischen Dreiecken das zu bestimmen suchen, dessen Flächeninhalt ein Maximum ist.

Wenn man den Umfang des Dreieckes mit 2c, zwei Seiten desselben mit x, y und seinen Flächeninhalt mit z bezeichnet, so hat man die bekannte Formel:

$$z = \sqrt{c(c-x)(c-y)(x+y-c)},$$

und die Gleichungen des Maximums sind:

$$p = \frac{c(c-y)(2c-2x-y)}{2\sqrt{c(c-x)(c-y)(x+y-c)}} = 0,$$

$$q = \frac{c(c-x)(2c-2y-x)}{2\sqrt{c(c-x)(c-y)(x+y-c)}} = 0,$$

oder wenn man die Auflösungen $x = \pm\infty$, $y = \pm\infty$ hinwegläßt:

$$(c-y)(2c-2x-y) = 0,\ (c-x)(2c-2y-x) = 0.$$

Diese beiden letzten Gleichungen zerfallen in die vier Systeme:

$$x = c,\ y = c;$$

$$\left.\begin{array}{r} y = c,\ 2c - 2y - x = 0; \\ x = c,\ 2c - 2x - y = 0; \\ 2c - 2y - x = 0,\ 2c - 2x - y = 0; \end{array}\right\} \text{oder} \left\{\begin{array}{l} y = c,\ x = 0; \\ x = c,\ y = 0; \\ x = y = \frac{2}{3}c. \end{array}\right.$$

Das letzte System ist das einzige, welches der Aufgabe im geometrischen Sinne genügt und die übrigen entsprechen dem Falle, wo das Dreieck unmöglich ist.

Es ist:

$$r = -\frac{1}{4}\sqrt{c}\cdot\frac{y^2\sqrt{c-y}}{[(c-x)(x+y-c)]^{\frac{3}{2}}},$$

$$s = -\frac{1}{4}\sqrt{c}\cdot\frac{xy-2(x+y-c)^2}{\sqrt{(c-x(c-y)}\cdot(c+y-c)^{\frac{3}{2}}},$$

$$t = -\frac{1}{4}\sqrt{c}\cdot\frac{x^2\sqrt{c-x}}{[(c-y)(x+y-c)]^{\frac{3}{2}}},$$

Die durch die Ungleichheit (g) ausgedrückte Bedingung verwandelt sich also nach verrichteter Reduction in:

$$(x+y-c)^2 > 0$$

und wird für alle reellen Werthe von x, y erfüllt. Uebrigens ist klar, daß r und t negativ sind, und folglich entspricht das System $x = y = \frac{2}{3}c$ einem **Maximum** der Function z. Hieraus folgt, daß das Dreieck, welches der Aufgabe genügt, ein gleichseitiges ist, wie auch in den Elementen der Geometrie bewiesen wird.

§. 151. Wir wollen noch das System der Werthe von x, y suchen, für welches die Function:

$$z = \frac{a+bx+cy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

ein Maximum wird, so haben wir die Gleichungen:

$$p = \frac{b-ax+y(by-cx)}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$q = \frac{c-ay+x(cx-by)}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

oder einfacher:

$$b-ax+y(by-cx) = 0,\quad c-ay+x(cx-by) = 0. \qquad (h)$$

Diesen Gleichungen wird genügt, wenn man

$$b-ax = 0,\ c-ay = 0,\ \text{folglich}\ by-cx = 0 \qquad (i)$$

setzt, und der Werth des gesuchten Maximums ist:

$$z = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Das System (i) enthält überdies alle reellen Auflösungen des Systemes (h); denn wenn man y auf die gewöhnliche Weise zwischen den Gleichungen (h) eliminirt, so erhält man für die resultirende Gleichung mit x:

$$(b-ax)[(b^2+c^2)x^2+2abx+a^2+c^2] = 0;$$

und nachdem man den Factor $b - ax$ in Rechnung gebracht hat, gibt der andere Factor für x nur die imaginären Werthe:

$$-ab \pm \frac{\sqrt{-c^2(a^2+b^2+c^2)}}{b^2+c^2}.$$

Es iſt:

$$r = -\frac{(a+cy)(1+x^2+y^2)+3x[b-ax+y(by-cx)]}{(1+x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$s = -\frac{(2by-cx)(1+x^2+y^2)-3y[b-ax+y(by-cx)]}{(1+x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$t = \frac{(a+bx)(1+x^2+y^2)+3y[c-ay+x(cx-by)]}{(1+x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Für die Werthe von x, y, welche den Gleichungen (i) genügen, reduciren ſich dieſe Ausdrücke auf:

$$r = -\frac{a^2(a^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}},\quad s = \frac{a^2bc}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}},\quad t = -\frac{a^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}};$$

und da ſich die Ungleichheit (g) auf:

$$-\frac{a^6}{(a^2+b^2+c^2)^2} < 0$$

reducirt, ſo wird ſie nothwendig erfüllt. Ferner kann kein Minimum ſtattfinden, weil die Werthe von r, t nothwendig negativ ſind.

Aus dieſer Rechnung folgt, daß die Werthe der veränderlichen Größen y', z', welche die Function:

$$u = \frac{X + Yy' + Zz'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$

zu einem Maximum machen, für u den Werth $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ geben, wie bereits im §. 129 bemerkt worden, und durch die Gleichungen:

$$Y - Xy' = 0,\quad Z - Xz' = 0$$

beſtimmt werden.

Zur Rechtfertigung des in dem angeführten §. Geſagten bliebe nun noch zu zeigen übrig, daß die Gleichungen:

$$Y - X\frac{dy}{dx} = 0,\quad Z - X\frac{dz}{dx} = 0$$

Linien angehören, welche die durch die Differenzialgleichung:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

characteriſirten Flächen in normaler Richtung treffen; allein dieſes ergibt ſich aus der Theorie der krummen Flächen, wovon in dem folgenden Buche die Rede ſein wird.

IV. Maxima und Minima der unentwickelten Functionen.

§. 152. Zur Beſtimmung der Maxima und Minima der Veränderlichen y, welche durch die Gleichung:

$$f(x, y) = 0 \qquad (k)$$

implicite als Function von x gegeben wird, ſetze man:

$$y' = -\frac{df}{dx} : \frac{df}{dy} = 0 \qquad (k')$$

und leite aus den Gleichungen (k) und (k') die Werthſyſteme von x und y ab, welche die Function y zu einem Maximum oder Minimum machen können. Dieſe Werthe ſubſtituire man in die Gleichung:

$$\frac{\overline{d^2f}}{dx^2} = 0,$$

welche ſich wegen $y' = 0$ auf:

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{df}{dy}\, y'' = 0 \qquad (k'')$$

reducirt, um ſich zu überzeugen, daß dieſelben Werthe y'' nicht verſchwinden machen und um zu gleicher Zeit, wenn es nöthig iſt nach dem Zeichen von y'' das Maximum von dem Minimum zu unterſcheiden.

Es ſei z. B. die Gleichung:

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0 \qquad (\alpha)$$

gegeben, welche die unter dem Namen des Descartes'ſchen Foliums bekannte Curve (Fig. 44) ausdrückt, ſo ergibt ſich daraus:

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}, \qquad (\alpha')$$

und die gemeinſchaftliche Gleichung für das Maximum oder Minimum iſt:

$$ay - x^2 = 0. \qquad (\beta)$$

Durch die Elimination von y zwiſchen den Gleichungen (α) und (β) ergibt ſich die Gleichung:

$$x^6 - 2a^3x^3 = 0,$$

deren Wurzeln, welche wir hier allein betrachten wollen, folgende ſind:

$$x = 0, \quad x = a\sqrt[3]{2},$$

welchen die reellen Werthe von y entſprechen:

$$y = 0, \quad y = a\sqrt[3]{4}.$$

Die Gleichung (k'') verwandelt ſich in:

$$(y^2 - ax)y'' + 2x = 0,$$

und wenn man in dieſelbe die Werthe $x = a\sqrt[3]{2}$, $y = a\sqrt[3]{4}$ ſubſtituirt, ſo gibt ſie $y'' = -\frac{2}{a}$, und folglich entſpricht dieſes Syſtem einem Maximum, wenn a poſitiv iſt, oder einem Minimum, wenn dieſer Coefficient negativ iſt.

Für das Syſtem $x = 0$, $y = 0$ erſcheint der Werth von y' vermöge der Gleichung (α') unter der unbeſtimmten Form $\frac{0}{0}$; aber die Ableitung dieſer Gleichung oder die zweite Ableitung der gegebenen Gleichung iſt:

$$(y^2 - ax)y'' + 2yy'^2 - 2ay' + 2x = 0,$$

während die dritte Ableitung folgende iſt:

$$(y^2 - ax)\,y''' + (6yy' - 3a)\,y'' + 2y'^3 + 2 = 0.$$

Wenn man in dieſen beiden Gleichungen $x = 0$, $y = 0$ ſetzt, ſo reduciren ſie ſich auf $y' = 0$, $y'' = \frac{2}{3a}$, und folglich entſpricht dieſes Syſtem von Werthen einem Minimum von y.

Wenn wir nun bemerken, daß die gegebene Gleichung in Beziehung auf die Veränderlichen x, y ſymmetriſch iſt, ſo folgt daraus, daß das Syſtem $x = 0$, $y = 0$ einen der aus dieſer Gleichung abgeleiteten Werthe von $\frac{dy}{dx}$ verſchwinden macht, daß es auch einen der Werthe von $\frac{dx}{dy}$ verſchwinden und folglich einen Werth von $\frac{dy}{dx}$ oder y' unendlich machen muß. Die beiden Coordinatenaxen berühren alſo die durch die gegebene Gleichung ausgedrückte Curve im Anfangspunkte.

§. 153. Wenn es darauf ankommt, die Werthe von x und y zu beſtimmen, welche eine implicite durch die Gleichung:

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (l)$$

gegebene Function z dieſer beiden Veränderlichen zu einem Maximum oder Minimum macht, ſo ſetzt man $p = 0$, $q = 0$ oder:

$$\frac{df}{dx} : \frac{df}{dz} = 0, \quad \frac{df}{dy} : \frac{df}{dz} = 0, \qquad (m)$$

wodurch ſich die Gleichungen, aus welchen die Werthe der partiellen Ableitungen r, s, t (§. 133) abgeleitet werden müſſen, auf folgende reduciren:

$$\frac{df}{dz}\,r + \frac{d^2f}{dx^2} = 0, \quad \frac{df}{dz}\,s + \frac{d^2f}{dxdy} = 0, \quad \frac{df}{dz}\,t + \frac{d^2f}{dy^2} = 0.$$

Hierauf muß man ſich überzeugen, ob die aus den Gleichungen (l) und (m) abgeleiteten und in die Ausdrücke von r, s, t ſubſtituirten Werthe von x, y, z der Ungleichheit (g) genügen. In Beziehung auf die Ausnahmefälle, welche vorkommen können, wollen wir nicht weiter ins Einzelne gehen, weil ſie ſich nach dem bisher Geſagten ohne Schwierigkeit behandeln laſſen.

§. 154. Es ſei:

$$u = f(x, y, z, \ldots\ldots)$$

eine Function von n veränderlichen Größen, welche durch m Bedingungsgleichungen

$$f_1(x, y, z, \ldots.) = 0, \; f_2(x, y, z, \ldots.) = 0, \; \ldots. \; f_m(x, y, z, \ldots.) = 0 \qquad (n)$$

mit einander verbunden ſind, ſo daß $n - m$ Veränderliche unabhängig bleiben. Wenn man die Function u zu einem Maximum oder Minimum machen will, ſo muß man $du = 0$ oder

$$\frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy + \frac{df}{dz}\,dz + \ldots\ldots = 0 \qquad (n')$$

ſetzen.

Die Gleichungen (n) führen auf die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{df_1}{dx}\,dx + \frac{df_1}{dy}\,dy + \frac{df_1}{dz}\,dz + \ldots\ldots = 0,\\
&\frac{df_2}{dx}\,dx + \frac{df_2}{dy}\,dy + \frac{df_2}{dz}\,dz + \ldots\ldots = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{df_m}{dx}\,dx + \frac{df_m}{dy}\,dy + \frac{df_m}{dz}\,dz + \ldots\ldots = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (n'')$$

Nachdem man zwiſchen den Gleichungen (n′) und (n″) eine Anzahl m der ferenziale dx, dy, dz, ... eliminirt hat, ſetzt man die Multiplicatoren der – m willkührlich bleibenden Differenziale einzeln gleich Null, ſo geben e n — m Gleichungen in Verbindungen mit den Gleichungen (n) die Werth-:me von x, y, z, ..., welche die Function u zu einem Maximum oder nimum machen können. Hierauf muß man ſich überzeugen, ob die Function durch die Subſtitution dieſer Werthe in dem einen Falle negativ und in andern poſitiv wird, von welcher Beſchaffenheit die Verhältniſſe der will-lich gebliebenen Differenziale auch ſein mögen, was zu complicirten Rech-gen führen kann.

Was die Elimination zwiſchen den Gleichungen (n′) und (n″) anlangt, läßt ſie ſich durch die Methode der unbeſtimmten Factoren, wovon häufig in der Analyſis Gebrauch macht, am elegenteſten bewerkſtelligen. etzt man hätte die erſten Theile der Gleichungen (n″) durch die Factoren λ_1, ... λ_m multiplicirt, man addirte ſie dann zu dem erſten Theile der Glei-ig (n′) und ſetzte endlich die Multiplicatoren der Differenziale in der reſul-ıden Gleichung gleich Null, ſo erhielte man n Gleichungen:

$$\frac{df}{dx} + \lambda_1\,\frac{df_1}{dx} + \lambda_2\,\frac{df_2}{dx} + \ldots\ldots + \lambda_m\,\frac{df_m}{dx} = 0,$$

$$\frac{df}{dy} + \lambda_1\,\frac{df_1}{dy} + \lambda_2\,\frac{df_2}{dy} + \ldots\ldots + \lambda_m\,\frac{df_m}{dy} = 0,$$

etc. etc.,

ichen welchen man die m unbeſtimmten Factoren λ_1, λ_2, ... λ_m elimini-könnte, ſo daß man die n — m Endgleichungen erhielte.

§. 155. Wir wollen z. B. annehmen, daß man das Minimum der ction:

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots\ldots$$

e, indem die Veränderlichen x, y, z, ... durch die Bedingungsgleichung:

$$ax + by + cz \ldots\ldots = k$$

einander verbunden ſind, worin a, b, c ..... k conſtante Zahlen be-jnen. Wenn man auf die eben angegebene Weiſe verfährt, ſo erhält man:

$$x + a\lambda_1 = 0,\ y + b\lambda_1 = 0,\ z + c\lambda_1 = 0,\ \text{etc.}$$

3 hinausläuft auf:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \text{etc.}, \qquad (o)$$

aus ſich nach den bekannten Eigenſchaften der Proportionen ergibt:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \text{etc.} = \frac{x^2+y^2+z^2+\text{etc.}}{a^2+b^2+c^2+\text{etc.}} = \frac{u}{a^2+b^2+c^2+\text{etc.}},$$

$$\frac{x^2}{ax} = \frac{y^2}{by} = \frac{z^2}{cz} = \text{etc.} = \frac{x^2+y^2+z^2+\text{etc.}}{ax+by+cz+\text{etc.}} = \frac{u}{k},$$

und folglich:

$$\frac{u}{k} = \pm\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+\text{etc.}}},\quad u = \frac{k^2}{a^2+b^2+c^2+\text{etc.}}.$$

Um ſich zu überzeugen, daß dieſer Werth von u wirklich ein Minimum iſt, braucht man nur die identiſche Gleichung:

$$(a^2+b^2+c^2+\text{etc.})(x^2+y^2+z^2+\text{etc.}) = (ax+by+cz+\text{etc.})^2 + (bx-ay)^2 + (cx-az)^2 + \text{etc.},$$

anzuſetzen, welche in dieſem Falle wird:

$$u = \frac{k^2+(bx-ay)^2+(cx-az)^2+\text{etc.}}{a^2+b^2+c^2+\text{etc.}},$$

woraus man ſieht, daß die Ungleichheit:

$$u > \frac{k^2}{a^2+b^2+c^2+\text{etc.}}$$

in der That für alle Werthe der Veränderlichen erfüllt wird, welche den Gleichungen (o) nicht genügen.

Wenn man nur drei Veränderliche x, y, z hat, welche rechtwinklige Coordinaten bezeichnen, ſo drückt der kleinſte Werth von $\sqrt{u}$ den Abſtand des Anfangspunktes von der Ebene:

$$ax + by + cz = k$$

aus.

Viertes Kapitel.

Ausdehnung der Taylor'ſchen und Maclaurin'ſchen Formel auf entwickelte Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen. — Lagrange's Formel zur Entwickelung der unentwickelten Functionen.

I. Ausdehnung der Taylor'ſchen und Maclaurin'ſchen Formel auf entwickelte Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

§. 156. Wir brauchen nur die Function:

$$z = f(x, y)$$

von zwei unabhängigen Veränderlichen zu betrachten, weil ſich die für dieſen Fall erhaltenen Formeln leicht auf eine beliebige Anzahl veränderlicher Größen erſtrecken laſſen.

Um die Function:

$$f(x+h, y+k)$$

ich den ſteigenden Potenzen der Incremente h und k zu entwickeln, ſetze man:

$$h = \alpha h', \quad k = \alpha k',$$

iſt:

$$f(x + h, y + k) = f(x + \alpha h', y + \alpha k') = f\alpha,$$

id wenn man die Function $f\alpha$ wie eine Function von einer einzigen Verän-rlichen durch die Maclaurin'ſche Reihe entwickelt, ſo erhält man:

$$= f(o) + \frac{\alpha}{1} \cdot f'(o) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(o) + \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f'''(o) + \text{etc.} \quad (f)$$

Aber nach der Regel für die Differenzirung der mittelbaren Functionen t man:

$$f'\alpha = \frac{d \cdot f(x + \alpha h', y + \alpha k')}{dx} h' + \frac{d \cdot f(x + \alpha h', y + \alpha k')}{dy} k',$$

er kürzer:

$$f\alpha = \frac{df}{dx} h' + \frac{df}{dy} k'$$

id eben ſo hat man

$$f''\alpha = \frac{d^2 f}{dx^2} h'^2 + 2 \frac{d^2 f}{dx dy} h' k' + \frac{d^2 f}{dy^2} k'^2,$$

$$f'''\alpha = \frac{d^3 f}{dx^3} h'^3 + 3 \frac{d^3 f}{dx^2 dy} h'^2 k' + 3 \frac{d^3 f}{dx dy^2} h' k'^2 + \frac{d^3 f}{dy^3} k'^3,$$

etc.

iderſeits iſt:

$$f(o) = f(x, y) = z,$$

d aus den vorhergehenden Gleichungen ergibt ſich:

$$f'(o) = ph' + qk'$$
$$f''(o) = rh'^2 + 2shk' + tk'^2$$
$$f'''(o) = uh'^3 + 3mh'^2 k' + 3wh' k'^2 + vk'^3,$$
etc.

Wenn man dieſe Werthe in die Formel (f) ſubſtituirt und darin für h', ihre Werthe in h, k ſetzt, ſo verſchwindet die Hülfsgröße α, und man ält:

$$z+h, y+k) = z + p\frac{h}{1} + q\frac{k}{1} + r\frac{h^2}{1 \cdot 2} + s\frac{h}{1} \cdot \frac{k}{1} + t\frac{k^2}{1 \cdot 2} + u\frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + m\frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{k}{1} + w\frac{h}{1} \cdot \frac{k^2}{1 \cdot 2} + v\frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.} \quad (F$$

In dieſem Ausdrucke kann man ſtatt der Buchſtaben p, q, r, ifferenzialcoefficienten ſetzen, welche ſie ausdrücken, und wenn man r Kürze wegen die bereits in §. 43 und §. 124 angewandte ſym-ichnung gebraucht, ſo erhält man die Formel:

etc. die außerdem ſymboliſche

$$f(x+h, y+k) = z + \left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)\frac{dz}{1} + \left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)^2 \frac{d^2z}{1 \cdot 2}$$
$$+ \left(\frac{h}{dy} + \frac{k}{dy}\right)^3 \frac{d^3z}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}, \qquad (\Phi)$$

woraus das Geſetz des Fortſchrittes für eine beliebige Anzahl von Veränd lichen erhellet. *)

Die ſo erweiterte Taylor'ſche Reihe wird unbrauchbar, wenn die Fu tion z und ihre partiellen Ableitungen p, q, r, etc., oder einige derſelben, beſondere Werthe der Veränderlichen x, y, unendlich werden, wie bereits der Entwickelung der Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe zeigt iſt (§. 106). Sie wird ferner unbrauchbar, wenn die Function z, o ihre partiellen Ableitungen unbeſtimmte Werthe annehmen und ſich die Un ſtimmtheit nur durch die Annahme einer willkührlichen Relation zwiſchen Veränderlichen x, y und folglich zwiſchen den Incrementen h und k beſeiti läßt, wie dieſes im vorhergehenden Kapitel näher gezeigt iſt.

§. 157. Es ſei r_i der Werth des Reſtes, welcher die Reihe (f) erg zen muß, wenn man ſie bei dem Gliede mit der Potenz α^i ſchließt, ſo man nach §. 109:

$$r_i = \frac{\alpha^{i+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (i+1)} \cdot f^{(i+1)}(\theta\alpha) = \frac{(1-\theta_1)^i \alpha^{i+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots i} \cdot f^{(i+1)}(\theta_1\alpha),$$

wo θ, θ_1 unbekannte, zwiſchen 0 und 1 liegende Zahlen bezeichnen. W man alſo die Reihe (Φ) mit dem Gliede:

---

*) Es ſei: $f(x, y) = x^m y^n$, ſo iſt:

$$\frac{df}{dx} = mx^{m-1}y^n, \quad \frac{df}{dy} = nx^m y^{n-1},$$
$$\frac{d^2f}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}y^n, \quad \frac{d^2f}{dxdy} = mnx^{m-1}y^{n-1},$$
$$\frac{d^2f}{dy^2} = n(n-1)x^m y^{n-2},$$
$$\frac{d^3f}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}y^n,$$
$$\frac{d^3f}{dx^2dy} = mn(m-1)x^{m-2}y^{n-1},$$
$$\frac{d^3f}{dxdy^2} = mn(n-1)x^{m-1}y^{n-2},$$
$$\frac{d^3f}{dy^3} = n(n-1)(n-2)x^m y^{n-3},$$

und folglich:

$$f(x+h, y+k) = (x+h)^m (y+k)^n =$$
$$x^m y^n + mx^{m-1}y^n h + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2}y^n h^2 + \text{etc.}$$
$$+ nx^m y^{n-1}k + \frac{mn}{1 \cdot 1} x^{m-1}y^{n-1}hk + \text{etc.}$$
$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^m y^{n-2}k^2 + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

$$\left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)^i \frac{d^i z}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots . i}$$

ſchließt, ſo wird der Reſt R_i, welcher dieſe Reihe ergänzen muß, ſymboliſch ausgedrückt durch:

$$R_i = \left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)^{i+1} \cdot \frac{d^{i+1} f(x+\theta h, y+\theta k)}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots . (i+1)}$$

der auch durch:

$$R_i = (1-\theta_1)^i \left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)^{i+1} \cdot \frac{d^{i+1} f(x+\theta_1 h, y+\theta_1 k)}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots . i}.$$

Die in dieſen Formeln vorkommenden Zahlen θ, θ_1 ſind unbekannt und können nicht zur Berechnung der Werthe von R_i, ſondern blos zur Beſtimmung von Grenzen dienen, zwiſchen welchen dieſe Werthe liegen müſſen.

Da der Werth von r_i durch das beſtimmte Integral:

$$r_i = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots i} \int_0^\alpha f^{(i+1)} (\alpha - \beta) \cdot \beta^i \, d\beta$$

ausgedrückt wird, ſo hat man für den Werth von R_i auch die beiden andern ſymboliſchen Ausdrücke:

$$R_i = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots . i \cdot h^{i+1}} \int_0^h \left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)^{i+1} d^{i+1} f\left(x+h-\beta, \; y+k-\frac{k}{h}\right) \beta^i d\beta,$$

$$R_i = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots . i \cdot k^{i+1}} \int_0^k \left(\frac{h}{dx} + \frac{k}{dy}\right)^{i+1} d^{i+1} f\left(x+h-\frac{h}{k}\beta, \; y+k-\beta\right) \cdot \beta^i d\beta.$$

Um von dieſen letzten Formeln eine Anwendung und zugleich den Beweis derſelben zu geben, wollen wir $i = 1$ ſetzen, ſo daß man hat:

$$f\alpha = f(0) + \frac{\alpha}{1} \cdot f'(0) + r_1, \; r_1 = \int_0^\alpha f''(\alpha-\beta) \cdot \beta d\beta.$$

Es ſei:

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dx^2} = f''(x,y), \; \frac{d^2 f(x,y)}{dxdy} = f'_1(x,y), \; \frac{d^2 f(x,y)}{dy^2} = f_{11}(x,y),$$

folglich:

$$f''(\alpha-\beta) = h'^2 f''[x+(\alpha-\beta)h', \; y+(\alpha-\beta)k']$$
$$+ 2h'k' f'_1[x+(\alpha-\beta)h', \; y+(\alpha-\beta)k'] + k'^2 f_{11}[x+(\alpha-\beta)k', \; y+(\alpha-\beta)k']$$
$$= h'^2 f''(x+h-h'\beta, \; y+k-k'\beta) + 2h'k' f'_1(x+h-h'\beta, \; y+k-k'\beta)$$
$$+ k'^2 f_{11}(x+h-h'\beta, \; y+k-k'\beta);$$

ſo hat man:

$$R_1 = h'^2 \int_0^\alpha f''(x-h-h'\beta, \; y+k-k'\beta) \cdot \beta d\beta$$
$$+ 2h'k' \int_0^\alpha f'_1(x+h-h'\beta, \; y+k-k'\beta) \cdot \beta d\beta$$
$$+ k'^2 \int_0^\alpha f_{11}(x+h-h'\beta, \; y+k-k'\beta) \cdot \beta d\beta.$$

In dem ersten Gliede des Werthes von R_1 kann man $\frac{\beta}{k'}$ für die Veränderliche β setzen, wenn man $\alpha h' = h$ statt α für die obere Grenze des Integrales nimmt, und alsdann verwandelt sich dieses erste Glied in:

$$\int_0^h f''(x+h-\beta,\ y+k-\frac{k'}{h'}\beta)\cdot\beta d\beta = \int_0^h f''(x+h-\beta,\ y+k-\frac{k}{h}\beta)\cdot\beta d\beta,$$

so daß in seinem Ausdrucke die Hülfsgrößen α, h', k' nicht mehr vorkommen. Man könnte demselben Gliede, wenn man $\frac{\beta}{k'}$ für die Veränderliche β setzt, auch die Form:

$$\frac{h^2}{k^2}\int_0^k f''(x+h-\frac{h}{k}\beta,\ y+k-\beta)\cdot\beta d\beta$$

geben, und wenn man die beiden andern Glieder des Werthes von R_i derselben Transformation unterwirft; so erhält man für R_i die beiden Ausdrücke:

$$R_1 = \frac{1}{h'}\int_0^h \Big\{h^2 f''(x+h-\beta,\ y+k-\frac{k}{h}\beta) + 2hk f_1'(x+h-\beta,\ y+k-\frac{k}{h}-\beta) + k^2 f_{11}(x+h-\beta,\ y+k-\frac{k}{h}\beta)\Big\}\cdot\beta d\beta,$$

$$R_1 = \frac{1}{k^2}\int_0^k \Big\{h^2 f''(x+h-\frac{h}{k}\beta,\ y+k-\beta) + 2hk f_1'(x+h-\frac{h}{k}\beta,\ y+k-\beta) + k^2 f_{11}(x+h-\frac{h}{k}\beta,\ y+k-\beta)\Big\}\cdot\beta d\beta.$$

Durch eine ähnliche Rechnung erhielte man die allgemeinen Werthe von R_i, deren symbolischer Ausdruck weiter oben angegeben ist.

§. 158. Wir wollen mit z_0, p_0, q_0, r_0, etc. die Werthe bezeichnen, welche die Functionen z, p, q, r, etc. annehmen, wenn man $x = 0$, $y = 0$ setzt, so gibt die Gleichung (F):

$$f(x,\ y) = z_0 + p_0\frac{x}{1} + q_0\frac{y}{1} + r_0\frac{x^2}{1\cdot 2} + s_0\frac{x}{1}\cdot\frac{y}{1} + t_0\frac{y^2}{1\cdot 2} + u_0\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + w_0\frac{x^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{y}{1} + w_0\frac{x}{1}\cdot\frac{y^2}{1\cdot 2} + v_0\frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}$$

und auf diese Weise ist die Maclaurin'sche Formel auf die Entwickelung der Functionen von zwei Veränderlichen erstreckt. Man kann auch schreiben:

$$f(x,\ y) = z_0 + \Big(\frac{x}{dx_0} + \frac{y}{dy_0}\Big)\frac{dz_0}{1} + \Big(\frac{x}{dx_0} + \frac{y}{dy_0}\Big)\frac{d^2z_0}{1\cdot 2} + \Big(\frac{x}{dx_0} + \frac{y}{dy_0}\Big)\frac{d^3z_0}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}$$

Statt die Functionen mit mehreren Veränderlichen durch die Maclaurin'sche Formel nach den Potenzen jeder unabhängigen Veränderlichen zu entwickeln, was auf sehr complicirte Entwickelungen führt, entwickelt man gewöhnlich diese Functionen nur nach den Potenzen einer der Veränderlichen; aber alsdann fin-

Coefficienten der Glieder der Reihe nicht mehr Conſtanten, ſondern Funcen aller übrigen unabhängigen Veränderlichen. Man kann daher ſetzen:

$$f(x, y, z, \ldots) = f(o, y, z, \ldots) + f'(o, y, z, \ldots) \cdot \frac{x}{1}$$

$$+ f''(o, y, z \ldots) \frac{x^2}{1 \cdot 2} + f'''(o, y, z, \ldots) \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.},$$

f', f'', f''', etc. die Ableitungen von f in Beziehung auf die Veränderliche bezeichnen. Die Anwendbarkeit dieſer Formel ſetzt voraus, daß die Werthe y, z, ... die Functionen:

$$f(o, y, z, \ldots), f'(o, y, z, \ldots), f''(o, y, z, \ldots), \text{etc.}$$

ſt unendlich machen und außerdem, daß man die Grenzen des Fehlers anen kann, welchen man begeht, wenn man die Reihe mit einem gewiſſen lede ſchließt. Hieraus folgt, daß eine Formel, wie:

$$= f(o, y) + f'(o, y) \frac{x}{1} + f''(o, y) \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + f'''(o, y) \cdot \frac{x}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

e Fläche nur in einem Theile ihrer Ausdehnung darſtellen kann, nämlich in dem Theile, worin die Werthe von y die Functionen $f(o, y)$, $f'(o, y)$, $'(o, y)$, etc. nicht unendlich machen.

II. Lagrange's Formel zur Entwickelung der unentwickelten Functionen.

§. 159. Es iſt eine Gleichung von der Form:

$$z = x + yfz \qquad (a)$$

eben, und man ſoll z in eine nach den ſteigenden Potenzen von y fortſchreitende Reihe entwickeln. Wenn y eine ſehr kleine Größe bezeichnet, ſo x der Näherungswerth von z für $y = 0$. Eine zweite Annäherung gibt n Werth:

$$z = x + yfx, \qquad (a_1)$$

elchen man für z in die Function f ſubſtituiren könnte, ſo daß man einen ten mehr genäherten Werth von z erhielte, welchen man ſeinerſeits in die nction f ſubſtituirte u. ſ. f. Es iſt der Zweck der geſuchten Entwickelung, dieſer ſucceſſiven Subſtitutionen zu überheben, und von welcher Größenung der Coefficient y auch ſein mag, ſo iſt doch einleuchtend, daß der te Theil der Gleichung (a_1) aus den beiden erſten Gliedern der geſuchten wickelung beſteht. Die Coefficienten der höhern Potenzen von y fände man dem Maclaurin'ſchen Lehrſatze, wenn man die ſucceſſiven Differenziale Gleichung (a) in Beziehung auf die Veränderlichen z, y nähme und dann den Werthen der aus den Differenzialgleichungen gezogenen Ableitungen:

$$\frac{d^2z}{dy^2}, \quad \frac{d^3z}{dy^3}, \quad \frac{d^4z}{dy^4}, \quad \text{etc.}$$

=0, z=x ſetzte. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß die auf dieſe Weiſe erhalReihe convergent ſein muß, weil ſonſt das ganze Reſultat der Rechnung iſoriſch ſein würde. Die Bedingungen der Convergenz ſind von Cauchy egeben, auf deſſen Abhandlungen wir die ſich für ſolche feine Unterſuchunintereſſirenden Leſer verweiſen.

Das vorhin zur Beſtimmung der Coefficienten der ſucceſſiven Glieder der ſuchten Entwickelung angedeutete allgemeine Verfahren würde das Bildungsſ dieſer Coefficienten gar nicht oder nur ſehr ſchwerfällig zu erkennen ge-

ben, während es sich ganz leicht herausstellt, wenn man nach Laplac eine Function der beiden Veränderlichen x, y vermöge der Gleichung trachtet.

Wenn man unter diesem Gesichtspunkte differenzirt, so erhält ma

$$\frac{dz}{dx} = 1 + f'z \cdot \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dy} = fz + yf'z \cdot \frac{dz}{dy},$$

und folglich:

$$\frac{dz}{dy} = fz \cdot \frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = fz \cdot \frac{d^2z}{dx^2} + f'z \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right)^2.$$

Nun sei ψz eine Function von z, so hat man:

$$\frac{d\left(\psi z \cdot \frac{dz}{dx}\right)}{dy} = \psi z \cdot \frac{d^2z}{dxdy} + \psi' z \cdot \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy},$$

und wenn man $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$ vermittelst der Gleichungen (b) fortschafft

$$\frac{d\left(\psi z \cdot \frac{dz}{dx}\right)}{dy} = \psi z \cdot fz \cdot \frac{d^2z}{dx^2} + (\psi z \cdot f'z + fz \cdot \psi' z \left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

oder:

$$\frac{d\left(\psi z \cdot \frac{dz}{dx}\right)}{dy} = \frac{d\left(\psi z \cdot fz \cdot \frac{dz}{dx}\right)}{dx}.$$

Wir wollen $\psi z = fz$ setzen, so gibt die erste der Gleichungen Verbindung mit der vorhergehenden:

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{d\left(fz\,\frac{dz}{dx}\right)}{dy} = \frac{d\left[(fz)^2 \cdot \frac{dz}{dx}\right]}{dx}.$$

Wenn man hierauf $\psi z = (fz)^2$ setzt, so ergibt sich aus der Ver der Gleichung (c) mit der letzten Gleichung:

$$\frac{d^3z}{dy^3} = \frac{d^2\left[(fz)^2 \cdot \frac{dz}{dx}\right]}{dxdy} = \frac{d^2\left[(fz)^3 \cdot \frac{dz}{dx}\right]}{dx^2},$$

und da man auf diese Weise beliebig weit fortfahren kann, so ist einl daß man für einen beliebigen Index n hat:

$$\frac{d^nz}{dy^n} = \frac{d^{n-1}\left[(fz)^n \cdot \frac{dz}{dx}\right]}{dx^{n-1}}.$$

Wenn man $y = 0$ folglich $z = x$, $\frac{dz}{dx} = 1$ setzt, so reducirt si Ausdruck auf:

$$\left(\frac{d^nz}{dy^n}\right)_0 = \frac{d^n \overset{\text{Veränd}}{\text{wickel}}(fx)^n}{dx^{n-1}},$$

der Maclaurin'sche Lehrsatz gibt folglich:

$$= x + \frac{y}{1} \cdot fx + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d \cdot (fx)^2}{dx} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2 \cdot (fx)^3}{dx^2} + \text{etc.} \quad (d)$$

§. 160. Es sei nun φz eine neue Function von z, welche nach den tenzen von y entwickelt werden soll, so hat man vermöge der ersten der ichungen (b):

$$\frac{d \cdot \varphi z}{dy} = \varphi' z \cdot \frac{dz}{dy} = \varphi' z \cdot fz \cdot \frac{dz}{dx},$$

d wenn man $\varphi' z \cdot fz = \psi z$ setzt, so gibt die Formel (c):

$$\frac{d^2 \cdot \varphi z}{dy^2} = \frac{d\left(\varphi' z \cdot fz \frac{dz}{dx}\right)}{dy} = \frac{\left[d \cdot \varphi' z \cdot (fz)^2 \cdot \frac{dz}{dx}\right]}{dx}.$$

a man ebensowohl für ψz successive die Functionen:

$$\varphi' z \cdot (fz)^2, \ \varphi' z \cdot (fz)^3, \ \text{etc.}$$

hmen kann, so ist einleuchtend, daß man allgemein hat:

$$\frac{d^n \cdot \varphi z}{dy^n} = \frac{\left[d^{n-1} \varphi' z \cdot (fz)^n \cdot \frac{dz}{dx}\right]}{dx^{n-1}},$$

nd für die besonderen Werthe $y = 0$, $z = x$:

$$\left(\frac{d^n \cdot \varphi z}{dy^n}\right)_0 = \frac{d^{n-1}[\varphi' x \cdot (fx)^n]}{dx^{n-1}};$$

lglich:

$$\varphi z = \varphi x + \frac{y}{1} \cdot \varphi' x \cdot fx + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d \cdot [\varphi' x \cdot (fx)^2]}{dx}$$
$$+ \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2 \cdot \varphi' x \cdot (fx)^3}{dx^2} + \text{etc.} \quad (e)$$

Die Formeln (d) und (e) lassen sich offenbar auf unentwickelte Functionen n zwei oder mehreren unabhängigen Veränderlichen ausdehnen.

§. 161. Die Formel (d) kann zur Auflösung algebraischer und transcen-nter Gleichungen angewandt werden, vorausgesetzt, daß sie auf eine conver-nte Reihe führt. Es sei z. B.:

$$z = x + kz^m$$

ne Gleichung, woraus man den Werth von z als eine nach den Potenzen n k fortschreitende Reihe mit x ableiten will, so gibt die Formel (d):

$$= x + \frac{k}{1} \cdot x^m + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \cdot zmx^{2m-1} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3m(3m-1)x^{3m-2} + \text{etc.}$$

d wenn man $\varphi z = z^n$ setzte, so ergäbe sich aus der Formel (e):

$$z^n = x^n + \frac{k}{1} \cdot n x^{m+n-1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \cdot n(2m+n-1)x^{2m+n-2}$$
$$+ \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot n(3m+n-1)(3m+n-2)x^{3m+n-3} + \text{etc.}$$

Ausführlicheres über die Anwendungen dieſer Formeln auf die Auflö der algebraiſchen Gleichungen findet man in Lagrange's Werke „über Auflöſung der Gleichungen."

Wir wollen noch die transcendente Gleichung:

$$z = x + e \sin. z$$

betrachten, welche der unter dem Namen des Kepler'ſchen Problems der Aſtronomie bekannten Aufgabe entſpricht, und wo die Veränderliche x Zeit, oder eine Größe bezeichnet, welche der Zeit proportional zunimmt, Coefficient e die Excentricität der elliptiſchen Bahn eines Planeten und Veränderliche z den Winkel, welcher die excentriſche Anomalie des Pla genannt wird; ſo haben wir:

$$z = x + \frac{e}{1} \cdot \sin. x + \frac{e^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d \cdot \sin.^2 x}{dx} + \frac{e^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2 \cdot \sin.^3 x}{dx^2} +$$

$$= x + e \sin. x + \frac{e^2}{2} \sin. 2x + \frac{e^3}{8} (3 \sin. 3x - \sin. x) + \text{etc.},$$

und da die Excentricität e ein ſehr kleiner Bruch iſt, wenigſtens für die H planeten, ſo convergirt die Reihe ſehr ſchnell.

Bei den Anwendungen der Analyſis auf die Aſtronomie und auf die thematiſche Phyſik, hat man oft den Bruch:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xy + y^2}}$$

nach den ſteigenden Potenzen von y zu entwickeln, und dieſe Entwick nimmt eine ſehr elegante Form an, wenn man ſich der Lagrange'ſchen S bedient. Denn wir wollen

$$\sqrt{1 - 2xy + y^2} = 1 - yz$$

ſetzen, ſo iſt:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xy + y^2}},$$

$$z = x + \frac{1}{2} y (z^2 - 1),$$

und um dieſe letzte Gleichung auf die Form (a) zurückzuführen, br man nur:

$$fz = \frac{1}{2} (z^2 - 1)$$

zu ſetzen. Andererſeits gibt die Reihe (d) durch Differenzirung:

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{y}{1} \cdot \frac{dfx}{dx} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 \cdot (fx)^2}{dx^2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3 \cdot (fx)^3}{dx^3} +$$

und folglich hat man:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xy + y^2}} = 1 + \frac{y}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d \cdot (x^2 - 1)}{dx} + \frac{y^2}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} \cdot \frac{d^2 \cdot (x^2 -}{dx^2}$$

$$+ \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3} \cdot \frac{d^3 \cdot (x^2 - 1)^3}{dx^3} + \ldots + \frac{y^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot 2^n} \cdot \frac{d^n \cdot (x^2 - 1)^n}{dx^n} +$$

Fünftes Kapitel.

Ueber die Bildung der Differenzialgleichungen mit einer oder mehreren unabhängigen Veränderlichen.

I. Von den Differenzialgleichungen zwiſchen zwei Veränderlichen.

§. 162. Wenn man die Gleichung:

$$f(x, y) = a, \qquad (a)$$

worin a eine Conſtante bezeichnet, differenzirt, ſo drückt die Differenzialgleichung der erſten Ordnung:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} y' = 0, \qquad (a')$$

woraus die Conſtante a verſchwunden iſt, eine Relation zwiſchen x, y, y' aus, welche ſtattfindet, was für einen beſondern Werth man dieſer Conſtanten in der Gleichung (a) auch beilegen mag. Wenn man dieſe Gleichung (a) als einer Reihe von Curven, welche ſich nur durch die verſchiedenen Werthe des Parameters a von einander unterſcheiden, angehörig betrachtet; ſo drückt die Gleichung (a') eine gemeinſchaftliche Eigenſchaft aller dieſer Curven aus, vermöge welcher die Richtung der Tangente beſtimmt iſt, wenn die Coordinaten x, y des Berührungspunktes gegeben ſind.

Wenn man z. B. die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = a,$$

differenzirt, ſo erhält man:

$$x + yy' = 0, \text{ oder } y' = -\frac{x}{y},$$

und ſo lange der Parameter a unbeſtimmt bleibt, gehört die erſte Gleichung einem Kreiſe von einem beliebigen Halbmeſſer, deſſen Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, und die zweite Gleichung drückt eine allen dieſen concentriſchen Kreiſen gemeinſchaftliche Eigenſchaft aus, nämlich die, daß die Tangente auf der vom Anfangspunkte der Coordinaten nach dem Berührungspunkte gezogenen geraden Linie ſenkrecht iſt.

Wenn der Parameter a auf irgend eine Weiſe mit den Veränderlichen x, y in der Gleichung:

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (b)$$

verbunden vorkommt, ſo kommt derſelbe im Allgemeinen in der Differenzialgleichung:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' = 0 \qquad (b')$$

auch noch vor; aber wenn man a zwiſchen den Gleichungen (b) und (b') eliminirt, ſo gilt von der reſultirenden Gleichung:

$$f(x, y, y') = 0 \qquad (c)$$

alles eben in Beziehung auf die Gleichung (a') Geſagte ebenfalls, und ſie drückt eine gemeinſame Eigenſchaft aller der Curven aus, welche durch die

Gleichung (b) ausgedrückt werden, wenn man der Conſtanten a ſucceſſive e
Reihe verſchiedener Werthe beilegt.

Wenn man den Werth von y, welcher einem beliebigen Werthe von
entſpricht, willkührlich annimmt, ſo iſt der Werth der Conſtante a implicite
ſtimmt. Denn es ſeien x_0, y_0 dieſe beiden zuſammengehörigen Werthe von x,
ſo hat man zwiſchen x_0, y_0 und a die Gleichung:

$$F(x_0, y_0, a) = 0,$$

und wenn der ſich aus dieſer Gleichung ergebende Werth von a in die Gl
chung (b) ſubſtituirt wird, ſo drückt dieſe eine beſtimmte, durch den Pu
(x_0, y_0) gehende Curve aus.

Nachdem man den Werth von a beſtimmt hat, kann man aus der Gl
chung (b) die Werthe der Function y ableiten, welche zwei verſchiedenen W
then der unabhängigen Veränderlichen x entſprechen, und der Unterſchied di
Werthe iſt die Summe der unendlich kleinen Zuwächſe, welche die Funct
in dem Intervalle erhalten hat, wofern ſie in dieſem Intervalle keine Un
brechungen der Stetigkeit erfahren hat (§. 51). Man ſagt daher, daß
Gleichung (b) das Integral der Gleichung (c) ſei, weil dieſe letzte d
Werth des Zuwachſes dy ausdrückt, welcher für jedes Syſtem der Werthe v
x und y einem Zuwachſe dx entſpricht, und weil die erſte Gleichung den We
des Integrales oder der Summe dieſer unendlich kleinen Zuwächſe in ei
gegebenen Intervalle ausdrückt oder beſtimmt.

Da die Gleichungen (b) und (c) inſofern gleichbedeutend ſind, als
derſelben Reihe von Curven angehören, ſo kann man aus dem Vorhergeh
ſchon ſchließen: 1) daß die Function y und die Curve, deren Ordinate ſie
durch die Gleichung (c) vollſtändig beſtimmt iſt, wenn man die einer Abſ
x_0 entſprechende Ordinate y_0 willkührlich annimmt, und 2) daß, wenn d
Differenzialgleichung direct gegeben iſt und es darauf ankommt, ſie zu *inte
riren* oder eine Gleichung zwiſchen x und y zu finden, welche derſelben
nügt, die *Integralgleichung* nothwendig eine willkührliche Conſtante en
halten muß, wenn ſie dieſelbe Allgemeinheit haben ſoll, wie die gegebene Di
ferenzialgleichung. Wir werden auf dieſe wichtigen Eigenſchaften wieder zurü
kommen, wenn wir von der Theorie der Integration der Differenzialgleichu
gen reden werden, und unſer gegenwärtiger Zweck war blos, ſchon hier ein
allgemeine Begriffe über die Natur der Differenzialgleichungen mitzutheilen.

§. 163. Es ſei:

$$F(x, y, a, b) = 0 \qquad (d)$$

eine Gleichung zwiſchen den Veränderlichen x, y, welche zwei Parameter a
b enthält. Wenn man dieſe Gleichung zweimal hintereinander differenzirt,
erhält man die Differenzialgleichungen der erſten und zweiten Ordnung:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\,y' = 0 \qquad (d')$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dxdy}\,y' + \frac{d^2F}{dy^2}\,y'^2 + \frac{dF}{dy}\,y'' = 0, \qquad (d'')$$

welche im Allgemeinen die Parameter a, b gleichfalls enthalten. Man kan
a, b zwiſchen den drei Gleichungen (d), (d'), (d'') eliminiren und die reſul
tirende Differenzialgleichung:

$$f(x, y, y', y'') = 0, \qquad (e)$$

welche von der zweiten Ordnung iſt, drückt eine gemeinſame Eigenſchaft alle
Curven aus, welchen die Gleichung (d) vermöge einer ſchicklichen Beſtimmun
der Parameter a, b angehören kann.

die Conſtanten a, b näher zu beſtimmen, könnte man ſich geben:
Punkt der Curve oder die einer Abſciſſe x_0 entſprechende Ordinate y_0,
die Richtung der Tangente in dieſem Punkte oder den Werth y'_0 der
y' für dieſelbe Abſciſſe.
nn alsdann hat man die beiden Gleichungen:

$$F(x_0, y_0, a, b) = 0, \left(\frac{dF}{dx}\right)_0 + \left(\frac{dF}{dy}\right)_0 y'_0 = 0,$$

$\left(\frac{F}{x}\right)_0$, $\left(\frac{dF}{dy}\right)_0$ die Werthe von $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ bezeichnen, wenn man darin
, $y = y_0$ ſetzt, und aus dieſen beiden Gleichungen kann man die
von a, b ableiten, um ſie in die Gleichung (d) zu ſubſtituiren.
att die Conſtanten a, b unmittelbar zwiſchen den drei Gleichungen
') (d'') zu eliminiren, kann man b und a ſucceſſive zwiſchen den beiden
Gleichungen eliminiren, wodurch man zwei Differenzialgleichungen der
Ordnung:

$$f_1(x, y, y', a) = 0, \qquad (f_1)$$

$$f_2(x, y, y', b) = 0, \qquad (f_2)$$

wovon die eine blos den Curven angehört, für welche a einen beſtimm-
th hat, indem b willkührlich bleibt, während die andere aus demſelben
den Curven angehört, für welche b einen beſtimmten Werth hat, und
ihrlich bleibt.
lange die Conſtanten a und b unbeſtimmt bleiben, hat jede der Glei-
(f_1) und (f_2) dieſelbe Allgemeinheit, als die Gleichung (d) oder wie
chung (e). Man kann alſo aus der Gleichung (f_1) durch Differenzi-
nen durch x, y, y', a ausgedrückten Werth ableiten, welcher der Glei-
e) Genüge leiſtet, was für einen Werth a auch haben mag. Wenn
glich zwiſchen der Gleichung (f_1) und ihrem Differenziale:

$$\frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy} y' + \frac{df_1}{dy'} y'' = 0$$

ſtante a eliminirt, ſo findet man die Gleichung (e) und man würde
rfalls wieder erhalten, wenn man die Conſtante b zwiſchen der Glei-
$f_2)$ und ihrem unmittelbaren Differenziale:

$$\frac{df_2}{dx} + \frac{df_2}{dy} y' + \frac{df_2}{dy'} y'' = 0$$

te. Wenn man endlich y' zwiſchen den Gleichungen (f_1) und (f_2) eli-
ſo erhält man die Gleichung (d).
ſei z. B. die Gleichung:

$$x^2 - ax - by = 0 \qquad (1)$$

, ſo erhält man durch zwei unmittelbare Differenzirungen:

$$2x - a - by' = 0, \qquad (2)$$

$$2 - by'' = 0, \qquad (3)$$

nn durch Elimination der Conſtanten a, b die Differenzialgleichung der
Ordnung:

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0. \qquad (4)$$

enn man abwechſelnd die Conſtanten b, a zwiſchen den Gleichungen (1)
) eliminirt, ſo erhält man die beiden Differenzialgleichungen der erſten
ng:

$$x^2y' - 2xy - a(xy' - y) = 0, \quad (5)$$
$$x^2 + by - bxy' = 0, \quad (6)$$

deren unmittelbare Differenziale sind:

$$2xy' + x^2y'' - 2y - 2xy' - a(y' + xy'' - y') = 0, \quad (7)$$
$$x(2 - by'') = 0, \quad (8)$$

und man erhält die Gleichung (4) wieder, wenn man a zwischen den G
chungen (5) und (7), oder b zwischen den Gleichungen (6) und (8) elimi
Endlich gibt die Elimination von y' zwischen den Gleichungen (5) und (6)
Gleichung (1) wieder.

Aus dieser Analyse muß man schließen: 1) daß einer Differenzialgleic
der zweiten Ordnung zwischen x, y, y', y'' zwei Gleichungen von versch
nen Formen zwischen x, y, y' entsprechen, welche derselben genügen,
zwei erste Integrale der Gleichung der zweiten Ordnung; 2) daß
Integrale, wenn sie dieselbe Allgemeinheit haben sollen, wie die Differe
gleichung der zweiten Ordnung, welcher sie genügen, jedes eine willkühr
Constante enthalten müssen; 3) daß die Gleichung zwischen x, y, welche
beliebigen dieser Differenzialgleichungen der ersten Ordnung in aller erfor
chen Allgemeinheit und folglich auch der Differenzialgleichung der zweiten O
nung, wovon sie das zweite Integral ist, Genüge leistet, zwei willk
liche Constanten, nämlich die in den beiden ersten Integralen vorkommen
Constanten, enthält; 4) daß diese beiden willkührlichen Constanten implicite
stimmt sind, wenn man die der Abscisse x_0 entsprechenden anfänglichen We
y_0, y'_0 angibt, oder wenn ein Punkt gegeben wird, durch welchen die C
gehen muß, deren rechtwinklige Coordinaten x, y sind, so wie der Richt
der Tangente in diesem Punkte.

§. 164. Diese Untersuchung läßt sich leicht weiter verfolgen, indem
sie auf Differenzialgleichungen von einer beliebigen Ordnung anwendet;
da man allgemein bei dem Uebergange von einer Gleichung mit zwei Ve
derlichen zu ihrer Differenziale der n^{ten} Ordnung immer n Constanten elimin
kann, so folgt, daß das n^{te} Integral einer Differenzialgleichung von di
Ordnung oder die Gleichung x und y, welche dieser Differenzialgleichung mit
erforderlichen Allgemeinheit genügt, n willkührliche Constanten enthalten m
Die Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung hat n Differenzialgleichungen
$n-1^{ten}$ Ordnung, wovon jede eine willkührliche Constante enthält, zu ih
ersten Integralen, $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ Differenzialgleichungen der $(n-2)^{ten}$ O
nung, jede mit einer binären Combination dieser n Constanten, zu ihren zw
ten Integralen; $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ Differenzialgleichungen der $(n-3)^{ten}$ O
nung, wovon jede eine ternäre Combination derselben Constanten enthält,
ihren dritten Integralen, u. s. f. Wenn man y', y'', y''', ... y^n
zwischen den n ersten Integralen eliminirt, so erhält man das n^{te} Integral
gegebenen Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung oder die Gleichung zwisch
x, y, welche derselben mit den n willkührlichen Constanten Genüge leistet.

Diese n Constanten werden implicite bestimmt, wenn die Werthe:

$$y_0,\ y'_0,\ y''_0,\ y'''_0,\ \ldots\ y_0^{(n-1)}$$

für die Abscisse x_0 gegeben sind.

Man sagt, ein Integral sei allgemein oder vollständig, wenn d
selbe so viele willkührliche Constanten enthält, daß es denselben Grad
Allgemeinheit behält, wie die Differenzialgleichung, welcher es genügt.

dieſem allgemeinen Integrale ergeben ſich die particulären oder beſondern Integrale, wenn man den willkührlichen Conſtanten beſtimmte Werthe beilegt.

So iſt z. B. die Gleichung:

$$(y + b)x + a(y - mx^2) = 0,$$

worin a, b willkührliche Conſtanten bezeichnen, das allgemeine Integral der Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$(y + mx^2)xy'' + 2y'(y - xy') = 0. \qquad (9)$$

Wenn man ſucceſſive $a = 0$, $a = \infty$ ſetzt, ſo erhält man die beiden Gleichungen:

$$y + b = 0, \quad y - mx^2 = 0,$$

welche beide der Gleichung (q) genügen; aber welche nur particuläre Integrale derſelben ſind, weil die erſte nur die willkührliche Conſtante b und die zweite gar keine willkührliche Conſtante mehr enthält.

Die in einem n^{ten} Integrale vorkommenden n willkührlichen Conſtanten müſſen von einander verſchieden ſein, wenn das Integral vollſtändig ſein ſoll. Offenbar könnte man ſtatt einer willkührlichen Conſtanten C die zweitheilige Conſtante $C_1 + C_2$ ſetzen, allein dieſe letzte Conſtante würde, obgleich ſie anſcheinend zwei willkührliche Conſtanten C_1, C_2 enthält, ſich doch bei allen vorkommenden Operationen wie die eingliedrige Conſtante C, deren Stelle ſie vertritt, verhalten; die beiden Conſtanten C_1 und C_2 würden nicht wirklich von einander verſchieden ſein und in eine einzige zuſammenfallen. Ebenſo enthält der Ausdruck:

$$C_1 e^{m_1 + nx} + C_2 e^{m_2 + nx}$$

nur ſcheinbar zwei verſchiedene willkührliche Conſtanten C_1, C_2; denn man kann denſelben auf die Form $(C_1 e^{m_1} + C_2 e^{m_2}) e^{nx}$ bringen, und ſo lange die Conſtanten C_1, C_2 willkührlich bleiben, kann man für den Factor $C_1 e^{m_1} + C_2 e^{m_2}$ eine einzige willkührliche Conſtante C ſetzen, ohne daß der Ausdruck ſeine Allgemeinheit verliert. Wenn wir ſagen, daß das vollſtändige Integral dieſelbe Allgemeinheit hat, wie die entſprechende Differenzialgleichung, ſo ſoll dieſes ſo viel heißen, daß beide dieſelbe Reihe, oder dieſelben Reihen von Curven ausdrücken; allein es kann außerdem Gleichungen geben, welche der Differenzialgleichung Genüge leiſten, ohne in dem vollſtändigen Integrale begriffen zu ſein, oder zu der Reihe der particulären Integrale zu gehören, und man nennt daher ſolche Gleichungen ſinguläre Integrale oder ſinguläre Auflöſungen. Wir werden die geometriſche Bedeutung der ſingulären Integrale der Differenzialgleichungen der erſten Ordnung bald kennen lernen und in der Theorie der Integration der Differenzialgleichungen auf dieſen wichtigen Punkt wieder zurückkommen.

II. Gleichzeitige Differenzialgleichungen.

§. 165. Wenn man ein Syſtem von eben ſo vielen Differenzialgleichungen als Functionen x, y, z, ... der unabhängigen Veränderlichen t hat, ſo kann man daraus immer eine Enddifferenzialgleichung ableiten, worin blos zwei Veränderliche, z. B. t und x vorkommen; wenigſtens unterliegt die Bildung dieſer Endgleichung keinen andern Schwierigkeiten, als denen, welche die Elimination zwiſchen gewöhnlichen Gleichungen, worin keine Differenzialcoefficienten vorkommen, darbieten kann.

Denn wir wollen zunächſt annehmen, daß man zwei von t abhängige Functionen x, y und zwei Differenzialgleichungen habe, welche wir durch:

$$f(t; x, x', x'', \ldots x^{(m)}; y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0,$$
$$f_1(t; x, x', x'', \ldots x^{(m_1)}; y, y', y'', \ldots y^{(n_1)}) = 0,$$

ausdrücken können, wo $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ nach der Lagrange'ſchen Bezeichnungsart die Differenzialcoefficienten $\frac{d^i x}{dt^i}$, $\frac{d^i y}{dt^i}$ bezeichnen. Wenn man die erſte Gleichung n_1 mal und die zweite n mal hinter einander differenzirt, ſo erhält man außer den beiden gegebenen Gleichungen noch $n + n_1$ Gleichungen, worin der höchſte Differenzialcoefficient von y gleich $y^{(n+n_1)}$ iſt, und wenn man zwiſchen dieſen $n + n_1 + 2$ Gleichungen die Größen:

$$y, y', y'', \ldots\ldots y^{(n+n_1)},$$

deren Anzahl nicht größer als $n + n_1 + 1$ ſein kann, eliminirt; ſo enthält die reſultirende Gleichung nur die Größen t, x, x', x'', etc.; und die Ordnung dieſer reſultirenden Gleichung kann offenbar nicht größer ſein, als die größte der beiden Zahlen $m + n_1$, $m_1 + n$.

Wir wollen nun annehmen, daß man zwiſchen der unabhängigen Veränderlichen t, den ν Functionen x, y, z, ... und ihren Ableitungen der verſchiedenen Ordnungen ν Gleichungen habe; ſo wird ein ſolches Syſtem, ein Syſtem gleichzeitiger Differenzialgleichungen genannt. Es kann hierbei geſchehen, daß nicht alle in dem Syſteme der gleichzeitigen Differenzialgleichungen vorkommenden Ableitungen in Beziehung auf dieſelbe unabhängige Veränderliche t genommen ſind; allein vermittelſt der Formeln für die Vertauſchung der unabhängigen Veränderlichen kann man das gegebene Syſtem gleichzeitiger Differenzialgleichungen immer auf ein ſolches zurückführen, worin die Ableitungen alle in Beziehung auf dieſelbe unabhängige Veränderliche genommen ſind.

Es ſeien:

$$x^{(m)}, y^{(n)}, z^{(p)}, \ldots\ldots$$

die höchſten Ableitungen der Functionen x, y, z, ..., welche in dem gegebenen Syſteme vorkommen, ſo wollen wir, wenn die Veränderlichen y, z, ... und ihre Ableitungen eliminirt werden ſollen, um eine Endgleichung mit t, x, x', x'', ... zu erhalten,

$$s = n + p + \text{etc.}$$

ſetzen.

Wenn man jede der Gleichungen des Syſtemes s mal differenzirt, ſo erhält man, mit Einſchluß der gegebenen Gleichungen, im Ganzen $\nu(s + 1)$ Gleichungen, und die Anzahl der zu eliminirenden Größen:

$$y, y', y'', \ldots\ldots y^{(n+s)},$$
$$z, z', z'', \ldots\ldots z^{(p+s)}, \text{ etc.}$$

iſt gleich:

$$(n + s + 1) + (p + s + 1) + \text{etc.} = s + (s + 1)(\nu - 1) = \nu(s+1) - 1,$$

ſo daß folglich die durch die Elimination erhaltene Endgleichung von keiner höhern Ordnung, als von der $(m + s) = (m + n + p + \text{etc.})^{\text{ten}}$ Ordnung ſein kann; aber wohl von einer niedrigern Ordnung, was z. B. nach dem Vorhergehenden der Fall ſein würde, wenn man zwiſchen den Veränderlichen t, x, y und ihren Ableitungen nur zwei Gleichungen hätte, und wenn die höchſten Ableitungen von x und y in derſelben Gleichung vorkämen.

Betrachten wir insbeſondere den Fall, wo die gegebenen Gleichungen alle von der erſten Ordnung ſind und auf die Form:

$$x' = f(t, x, y, z, \ldots.), \quad y' = f_1(t, x, y, z, \ldots.), \quad z' = f_2(t, x, y, z, \ldots.), \text{ etc.}$$

gebracht werden können; ſo iſt es, ſtatt alle dieſe Gleichungen zu gleicher Zeit zu differenziren, einfacher, immer dieſelbe, z. B. die erſte, Gleichung zu differenziren, indem man nach jeder Differenzirung für die durch dieſe Operation in den zweiten Theil eingeführten Ableitungen x', y', z', etc. ihre unmittelbar durch die gegebenen Gleichungen gegebenen Werthe ſubſtituirt, und man erhält alsdann nach $\nu - 1$ ſucceſſiven Differenzirungen mit Einſchluß der erſten der gegebenen Gleichungen ν Gleichungen zwiſchen den Ableitungen x', x'', ... $x^{(\nu)}$ und den Veränderlichen t, x, y, z, etc., ſo daß es blos noch darauf ankommt, zwiſchen dieſen ν Gleichungen die $\nu - 1$ Veränderlichen y, z, etc. zu eliminiren, um die geſuchte Endgleichung zu erhalten.

III. Von den Gleichungen mit partiellen Differenzen.

§. 166. Es ſeien zwei Gleichungen von der Form:

$$\alpha = f(x, y, z),$$
$$F(x, y, z, \varphi\alpha) = 0 \qquad (g)$$

gegeben, wovon die zweite blos eine Function der Veränderlichen x, y, z würde, wenn man für α ſeinen aus der erſten gezogenen Werth ſubſtituirte; ſo kann man z als eine Function der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y betrachten, und wenn man die Gleichung (g) ſucceſſive in Beziehung auf dieſe beiden Veränderlichen differenzirt; ſo erhält man, wenn die Buchſtaben p, q ihre gewöhnliche Bedeutung behalten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}p + \frac{dF}{d\varphi}\left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}p\right)\varphi'\alpha = 0, \\ \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}q + \frac{dF}{d\varphi}\left(\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}q\right)\varphi'\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (g')$$

Zwiſchen den Gleichungen (g) und (g') kann man die Functionen $\varphi\alpha$, $\varphi'\alpha$ eliminiren, und da die ſich durch dieſe Elimination ergebende partielle Differenzialgleichung (§. 124):

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

von der Form der Function φ unabhängig iſt, ſo drückt ſie eine gemeinſame Eigenſchaft aller Werthe von z als Function von x, y aus, welche man aus der Gleichung (g) ableiten kann, wenn man die Form der Function φ verändert, ohne die Functionen F und f zu ändern. Sie drückt folglich auch eine gemeinſame Eigenſchaft aller Flächen aus, deren Gleichung zwiſchen x, y, z, vermittelſt einer entſprechenden Beſtimmung der Function φ auf die Gleichung (g) zurückgeführt werden kann.

Es ſei z. B.:

$$\alpha = ax + by, \quad z - \varphi\alpha = 0$$

oder:

$$z = \varphi(ax + by); \qquad (h)$$

ſo nehmen die abgeleiteten Gleichungen die ſehr einfache Form an:

$$p - a\varphi'\alpha = 0, \quad q - b\varphi'\alpha = 0,$$

woraus folgt:

$$bp - aq = 0. \qquad (i)$$

§. 167. Wenn man zwei Gleichungen hat, wovon die eine partielle Differenziale und die andere blos die urſprünglichen Veränderlichen ohne ihre Ableitungen enthält, aber welche beide denſelben Functionen entſprechen und den-

ſelben Grad von Allgemeinheit haben; ſo wird die zweite Gleichung das allgemeine Integral der erſten genannt. Die Gleichung (h) iſt alſo das allgemeine Integral der Gleichung (i), weil ſie vermöge der Unbeſtimmtheit des Zeichens φ alle Gleichungen enthält, woraus man einen Werth von z als Function von x, y ableiten kann, welcher der Gleichung (i) genügt.

Der Grund dieſer Benennung „Integral" iſt derſelbe, als bei den Gleichungen, welche einer gewöhnlichen Differenzialgleichung zwiſchen zwei Veränderlichen genügen (§. 162). Denn wir wollen annehmen, daß man, nachdem die Function φ particulariſirt iſt, den Veränderlichen x, y zwei Syſteme von Werthen (x_0, y_0), (x_1, y_1) beilege, und es ſeien z_0, z_1 die entſprechenden Werthe von z; ſo ergibt ſich aus der Gleichung (h) der Werth der endlichen Differenz $z_1 - z_0$; aber dieſe endliche Differenz iſt die Summe oder das Integral der unendlich kleinen Incremente, welche die Function z erhält, wenn x auf irgend eine Weiſe von dem Werthe x_0 zu dem Werthe x_1 und zu gleicher Zeit y ebenfalls auf eine beliebige Weiſe von dem Werthe y_1 übergeht, abgeſehen von dem Ausnahmefalle, wo die Function z Stetigkeitsunterbrechungen der erſten Ordnung erfährt, während man die Größen x, y ſo variiren läßt.

Die Gleichungen, welche aus der Gleichung (h) abgeleitet werden, wenn die willkührliche Function φ particulariſirt wird, ſind particuläre Integrale der Gleichung (i), und in allen Fällen muß man unter particulären Integralen die verſtehen, welche ſich aus dem allgemeinen Integrale ergeben, wenn man eine oder mehrere der willkührlichen Functionen particulariſirt, welche dieſes allgemeine Integral enthalten muß, wenn es dieſelbe Allgemeinheit haben ſoll, wie die Gleichung mit partiellen Differenzen, welcher dieſelbe entſpricht, oder wenn man zwiſchen den willkührlichen Functionen, Relationen aufſtellt, welche dieſe Allgemeinheit beſchränken.

Wenn man z. B. die Gleichung:

$$z = \varphi(x + ay) + \psi(x - ay) \qquad (k)$$

hat, worin φ, ψ willkührliche Functionen bezeichnen, und man berechnet vermittelſt dieſer Gleichung die partiellen Ableitungen der erſten und zweiten Ordnung p, q, r, s, t, ſo erhält man:

$$\begin{aligned} p &= \varphi'(x + ay) + \psi'(x - ay), \\ q &= a\varphi'(x + ay) - a\psi'(x - ay), \\ r &= \varphi''(x + ay) + \psi''(x - ay), \\ s &= a\varphi''(x + ay) - a\psi''(x - ay), \\ t &= a^2\varphi''(x + ay) + a^2\psi''(x - ay). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt ſich die partielle Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$a^2 r = t, \qquad (l)$$

welche die willkührlichen Functionen φ, ψ nicht mehr enthält und, wie man in der Folge ſehen wird, dieſelbe Allgemeinheit hat, als die Gleichung (k), woraus ſie abgeleitet iſt; und umgekehrt iſt die Gleichung (k), welche der Gleichung (l) mit aller möglichen Allgemeinheit genügt, das allgemeine Integral derſelben.

Aber wenn man zwiſchen den Functionen φ, ψ eine gewiſſe Abhängigkeit annimmt, namentlich $\psi t = -\varphi t$ oder $\psi t = \varphi' t$ ſetzt, ſo ſind die Gleichungen:

$$z = \varphi(x + ay) - \varphi(x - ay), \quad z = \varphi(x + ay) + \varphi'(x - ay),$$

worin noch die eine willkührliche Function φ vorkommt, nur particuläre Integrale der Gleichung (l).

Die partiellen Differenzialgleichungen können wie die gewöhnlichen Differenzialgleichungen *singuläre Integrale* oder *singuläre Auflösungen* haben, d. h. man kann denſelben in gewiſſen Fällen durch Gleichungen zwiſchen den urſprünglichen Veränderlichen genügen, welche ſich durchaus nicht aus dem allgemeinen Integrale durch Particulariſirung der darin vorkommenden willkührlichen Functionen würden ableiten laſſen. Wir werden bald Beiſpiele dieſer ſingulären Integrale bei den Anwendungen der Differenzialrechnung auf die Theorie der krummen Flächen kennen lernen, und dieſer Gegenſtand wird auch ſpäter bei der Integration der partiellen Differenzialgleichungen zur Sprache kommen.

§. 168. Eine partielle Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung kann erſte Integrale von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, zweite Integrale der $(n-2)^{ten}$ Ordnung, u. ſ. f. haben. So ergibt ſich z. B. aus der Differenzialgleichung der erſten Ordnung

$$p = \Pi q, \qquad (m)$$

worin Π eine willkührliche Function bezeichnet, wenn man ſucceſſive in Beziehung auf x und y differenzirt:

$$r = s\Pi' q, \quad s = t\Pi' q,$$

und dann wenn man $\Pi' q$ eliminirt:

$$rt - s^2 = 0. \qquad (n)$$

Aus dieſer Gleichung der zweiten Ordnung, welcher die Gleichung (m) vollkommen äquivalent iſt, ſo lange die Function Π unbeſtimmt bleibt, iſt dieſe Function Π verſchwunden.

Die Gleichung (m) iſt folglich ein erſtes Integral der Gleichung (n), und wenn man eine Gleichung mit x, y, z angeben könnte, welche der Gleichung (m) auf die allgemeinſte Weiſe genügte; ſo hätte man das zweite Integral der Gleichung (n).

Nun kann man zwar der Gleichung (m) nicht durch eine einzige Gleichung mit x, y, z, aber durch ein Syſtem zweier Gleichungen zwiſchen x, y, z und einer Hülfsveränderlichen α, nämlich:

$$z = \alpha + x\varphi\alpha + y\psi\alpha, \qquad (o)$$

$$1 + x\varphi'\alpha + y\psi'\alpha = 0 \qquad (o')$$

genügen, wovon die zweite die Ableitung der erſten in Beziehung auf die Hülfsveränderliche α iſt. Denn wenn man die Gleichung (o) ſucceſſive in Beziehung auf x und y differenzirt, ſo erhält man:

$$p = \varphi\alpha + \frac{d\alpha}{dx}(1 + x\varphi'\alpha + y\psi'\alpha),$$

$$q = \psi\alpha + \frac{d\alpha}{dy}(1 + x\varphi'\alpha + y\psi'\alpha),$$

oder wegen der Gleichung (o'):

$$p = \varphi\alpha, \quad q = \psi\alpha,$$

und ſo lange die Functionen φ, ψ, ſo wie Π willkührlich ſind, iſt das Syſtem dieſer letzten Gleichungen gleichbedeutend mit der Gleichung (m).

Da das Syſtem der Gleichungen (o), (o') die willkührlichen Functionen φ, ψ und eine Hülfsveränderliche α enthält, welche man nicht eliminiren kann, ſo lange die Functionen φ, ψ unbeſtimmt bleiben; ſo drückt daſſelbe

folglich das zweite und vollſtändige Integral der Differenzialgleichung (n) d zweiten Ordnung aus. Dieſe Form der partiellen Differenzialgleichung n zwei unabhängigen Veränderlichen ſchließt ſich an ſehr intereſſante geometriſc Unterſuchungen an, welche wir bald kennen lernen werden.

§. 169. In §. 166 haben wir geſehen, daß die Elimination einer wi kührlichen Function in einer Gleichung mit drei Veränderlichen auf eine pa tielle Differenzialgleichung der erſten Ordnung führt, woraus wir umgeke ſchließen, daß das allgemeine Integral einer partiellen Differenzialgleichung d erſten Ordnung mit drei Veränderlichen eine willkührliche Function einer g wiſſen Größe α enthalten muß, welche ſelbſt als Function der drei Veränd lichen beſtimmt iſt. Wenn die Anzahl der zu eliminirenden willkührlichen Fun tionen größer iſt, ſo führt die Elimination im Allgemeinen auf eine Gleichun mit partiellen Differenzen von einer höhern Ordnung; aber es findet alsdan zwiſchen der Anzahl der eliminirten willkührlichen Functionen und der Ordnu der ſich aus der Elimination ergebenden partiellen Differenzialgleichung ke beſtimmtes Verhältniß mehr ſtatt. Umgekehrt kann man nicht unmittelbar v der Ordnung einer partiellen Differenzialgleichung auf die Anzahl der willküh lichen Functionen ſchließen, welche ihr Integral enthalten muß, um allgeme oder vollſtändig zu ſein, ſo wie man von der Ordnung einer Differenzialgle chung mit zwei Veränderlichen auf die Anzahl der willkührlichen Conſtant ſchließt, welche ihr allgemeines Integral enthalten muß.

Es ſeien:

$$\alpha = f(x, y, z), \ \beta = f_1(x, y, z)$$

zwei Functionen, deren Zuſammenſetzung aus x, y, z gegeben iſt, und welc in der Gleichung:

$$F(x, y, z, \varphi\alpha, \psi\beta) = 0 \qquad (p)$$

unter den Zeichen der willkührlichen Functionen φ, ψ vorkommen; ſo werde wenn man die Gleichungen:

$$\frac{dF}{dx} = 0, \ \frac{dF}{dy} = 0 \qquad (q)$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 0, \ \frac{d^2F}{dxdy} = 0, \ \frac{d^2F}{dy^2} = 0, \qquad (r)$$

bildet, die unbeſtimmten Functionen $\varphi'\alpha$, $\psi'\beta$, $\varphi''\alpha$, $\psi''\beta$ eingeführt, un wenn man ſie mit $\varphi\alpha$, $\psi\beta$ verbindet, ſo hat man zwiſchen den ſechs Gle chungen (p), (q), (r) ſechs Größen zu eliminiren, was im Allgemeinen nic auf eine partielle Differenzialgleichung führen kann, welche von der Form d Functionen φ, ψ unabhängig iſt. Wenn man zu den Ableitungen der dritte Ordnung übergeht, ſo erhält man vier neue Gleichungen:

$$\frac{d^3F}{dx^3} = 0, \ \frac{d^3F}{dx^2dy} = 0, \ \frac{d^3F}{dxdy^2} = 0, \ \frac{d^3F}{dy^3} = 0,$$

und es werden nur zwei neue unbeſtimmte Functionen $\varphi'''\alpha$, $\psi'''\beta$ eingeführ Man kann alſo, und zwar im Allgemeinen auf mehrere Arten, eine partiell Differenzialgleichung der dritten Ordnung bilden, welche von der Form d Functionen φ, ψ unabhängig iſt, und von welcher die Gleichung (p) das all gemeine Integral iſt. Aber es kann auch geſchehen, daß ſich die Functione φ, ψ eliminiren laſſen, ohne daß man zu den Ableitungen der dritten Ord nung überzugehen braucht, und daß alſo die Gleichung (p) das vollſtändig Integral einer partiellen Differenzialgleichung der zweiten Ordnung iſt, wovo wir weiter oben ein Beiſpiel an der Gleichung (k) gehabt haben.

Es ſei allgemein ν die Anzahl der in einer Gleichung mit drei Veränderlichen x, y, z vorkommenden willkührlichen Functionen und die Zuſammenſetzung jeder unter dem Zeichen der willkührlichen Function vorkommenden Größe in x, y, z gegeben; ſo hat man, wenn man mit dieſer Gleichung ihre partiellen Ableitungen bis zu der von der n^{ten} Ordnung incluſive verbindet, eine Anzahl von Gleichungen, welche durch:

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ausgedrückt wird, während die Anzahl der in dieſem Syſteme von Gleichungen vorkommenden willkührlichen Functionen und Ableitungen derſelben $= \nu(\nu+1)$ iſt. Die Elimination iſt in allen Fällen nur in ſo fern möglich, als:

$$\nu(\nu+1) < \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \text{ oder } n > 2\nu - 2,$$

d. h. man muß im Allgemeinen die Differenzirung bis zu der $(2\nu-1)^{ten}$ Ordnung fortſetzen, ſo daß die ſich aus der Elimination ergebende partielle Differenzialgleichung von der $(2\nu-1)^{ten}$ Ordnung iſt; allein ſie kann auch von einer höhern Ordnung ſein.

§. 170. Betrachten wir nun eine Gleichung mit vier Veränderlichen:

$$F[u, x, y, z, \varphi(\alpha, \beta)] = 0, \qquad (s)$$

worin φ eine willkührliche Function der beiden Größen α, β bezeichnet, deren Zuſammenſetzung aus u, x, y, z bekannt und durch die Hülfsgleichungen:

$$\alpha = f(u, x, y, z), \quad \beta = f_1(u, x, y, z)$$

gegeben iſt.

Wenn man die Gleichung (s) in Beziehung auf jede der drei Veränderlichen x, y, z differenzirt, ſo erhält man drei Gleichungen:

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0, \qquad (t)$$

worin außer der willkührlichen Function $\varphi(\alpha, \beta)$ ihre beiden partiellen Ableitungen $\frac{d\varphi}{d\alpha}$, $\frac{d\varphi}{d\beta}$ vorkommen. Nun hindert aber nichts, dieſe drei unbeſtimmten Größen zwiſchen den vier Gleichungen (s) und (t) zu eliminiren, wodurch man eine partielle Differenzialgleichung der erſten Ordnung erhält, welche von der Form der willkührlichen Function φ unabhängig iſt. Hieraus folgt umgekehrt, daß das vollſtändige Integral einer partiellen Differenzialgleichung der erſten Ordnung mit drei unabhängigen Veränderlichen eine willkührliche Function von zwei Größen enthalten muß, wovon jede eine beſtimmte Zuſammenſetzung hat.

Wenn man das Vorhergehende verallgemeinert, ſo kann man ſagen, daß das vollſtändige Integral einer partiellen Differenzialgleichung der erſten Ordnung mit n unabhängigen Veränderlichen eine willkührliche Function von $n-1$ Größen enthalten muß, wovon jede auf eine beſtimmte Weiſe aus den $n+1$ Veränderlichen, wovon nur n unabhängig ſind, zuſammengeſetzt iſt.

Wenn man die Gleichung:

$$F[u, x, y, z, \varphi(\alpha, \beta), \psi(\gamma, \delta)] = 0$$

hätte, ſo müßte man mit der Differenzirung bis zu der vierten Ordnung fortgehen, um in allen Fällen die Elimination der willkührlichen Functionen φ, ψ und ihrer Ableitungen zu bewerkſtelligen, wo α, β, γ, δ wieder Größen bezeichnen, deren Zuſammenſetzung aus u, x, y, z bekannt iſt.

§. 171. Der einfachſte Fall iſt der, wo die Größen α, β, ... nur eine unabhängige Veränderliche, z. B. x enthalten, und in dieſem Falle kann man φx, ψx, ... ſtatt $\varphi\alpha$, $\psi\beta$, ... ſetzen, wo φ, ψ, ... wieder willkührliche Functionen bezeichnen.

Es ſei daher:

$$F(x, y, z, \varphi x, \psi x, ...) = 0$$

eine Gleichung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, worin n willkührliche Functionen, φx, ψx, ... vorkommen. Wenn man n mal in Beziehung auf die Veränderliche y differenzirt, ſo werden dadurch die Ableitungen der Functionen φ, ψ, ... nicht eingeführt, und man erhält folglich $n + 1$ Gleichungen, zwiſchen welchen man immer die n unbeſtimmten Functionen φx, ψx, ... eliminiren kann.

Desgleichen, wenn man die Gleichung hätte:

$$F[u, x, y, z, \varphi(x, y), \psi(x, y), ...] = 0,$$

worin wieder n willkührliche Functionen vorkommen; ſo brauchte man nur n mal in Beziehung auf die Veränderliche z zu differenziren, und man erhielte eine hinreichende Anzahl von Gleichungen, um die Elimination aller willkührlichen Functionen vornehmen zu können, welche Elimination alsdann auf dieſelbe Weiſe, wie die der willkührlichen Conſtanten in den Gleichungen mit zwei Veränderlichen bewerkſtelligt wird.

Viertes Buch.

Anwendungen der Differenzialrechnung auf die Theorie der krummen Linien und Flächen.

Erſtes Kapitel.

Von den Tangenten, den Normalen und den Aſymptoten ebener Curven. Anwendung der Polarcoordinaten.

---

1. Von den Tangenten und Normalen ebener Curven. — Differenzial des Curvenbogens.

§. 172. In allem Vorhergehenden haben wir uns der geometriſchen Conſtructionen blos zur Erläuterung der allgemeinen Principien der Theorie der Functionen bedient: aber in dem gegenwärtigen Buche wollen wir im Gegentheil die bereits erworbenen Kenntniſſe und Begriffe der Differenzialrechnung auf die geometriſche Theorie der krummen Linien und Flächen anwenden, wobei wir uns immer nur auf das Weſentlichſte dieſer Anwendungen der Differenzialrechnung auf Geometrie beſchränken müſſen. Denn die höhere Geometrie bildet ſchon an und für ſich eine ſelbſtſtändige Doctrin, welche nur in ſpeciell darüber handelnden Werken vollſtändig erörtert werden kann.

Die Aufgabe: an Curven, deren Gleichung gegeben iſt, Tangenten zu ziehen, wird durch die Differentialrechnung unmittelbar gelöſt, die ſich dieſes aus dem im dritten Kapitel des erſten Buches über die Erzeugung und Bedeutung der abgeleiteten Functionen oder der Differentialquotienten geſagten ergibt. In der That iſt dieſe Aufgabe der Conſtruction der Tangenten die erſte Veranlaſſung zur Erfindung der Differenzialrechnung geweſen, weshalb letztere auch anfangs die „Methode der Tangenten" genannt wurde.

Das eleganteſte Verfahren zur Auflöſung der Aufgabe: an eine Curve in einem gegebenen Punkte (x, y) eine Tangente zu ziehen, beſteht darin, daß man die Gleichung dieſer Tangente ſucht. Es ſeien ξ, η die veränderlichen Coordinaten der geſuchten Tangente, auf dieſelben Axen und denſelben Anfangspunkt, wie die Coordinaten x, y der Curve bezogen; ſo iſt die geſuchte Gleichung der Tangente:

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x),$$

denn ſie erfüllt die doppelte Bedingung: daß die durch ſie ausgedrückte gerade Linie durch den Punkt (x, y) geht und zugleich mit der Axe der x einen Winkel bildet, deſſen trigonometriſche Tangente durch $\frac{dy}{dx}$ ausgedrückt wird.

Die Gleichung der Normale einer Curve, d. h. der geraden Linie, welche im Punkte (x, y) auf der Tangente ſenkrecht iſt, iſt nach einem bekannten Principe der Geometrie:

$$\eta - y = -\frac{dx}{dy}(\xi - x),$$

und läßt ſich auf folgende mehr ſymmetriſche Form bringen:

$$(\eta - y)\,dy + (\xi - x)\,dx = 0.$$

Wenn man in der Gleichung der Tangente $\eta = 0$ ſetzt, ſo erhält man

$$x - \xi = y\frac{dx}{dy} = \frac{y}{y'},$$

und die Entfernung $\pm(x - \xi)$ des Fußpunktes der Ordinate von dem Punkte, worin die Tangente die Axe der Abſciſſen durchſchneidet, wird die Subtangente genannt. Das doppelte Zeichen ſoll blos andeuten, daß nur die abſolute Größe dieſer Entfernung oder Länge in Betracht gezogen werden ſoll, welches für ein Zeichen der aus der vorhergehenden Gleichung erhaltene Werth von $x - \xi$ auch haben mag.

Wenn man ebenſo in der Gleichung der Normale $\eta = 0$ ſetzt, ſo findet man:

$$-x = y\frac{dy}{dx} = yy',$$

und die Entfernung $\pm(\xi - x)$ des Punktes, worin die Normale die Axe der Abſciſſen ſchneidet, von dem Fußpunkte der entſprechenden Ordinate, wird die Subnormale genannt.

Die Ordinate y iſt alſo die mittlere Proportionale zwiſchen der Subtangente und der Subnormale.

Zuweilen verſteht man unter der Tangente und der Normale auch die zwiſchen der Curve und der Axe der Abſciſſen liegenden Stücke der Tangente und Normale, und dieſe Längen werden alsdann reſp. ausgedrückt durch:

$$\pm\frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \pm y\sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}},$$

$$\pm\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = \pm y\sqrt{1 + y'^2}.$$

Für jede gegebene Curve muß man in die vorhergehenden Formeln die aus der Gleichung der Curve als Function von x abgeleiteten Werthe von y und von $y' = \frac{dy}{dx}$ ſubſtituiren.

Wenn dieſe Gleichung unter der Form:

$$f(x, y) = 0 \qquad (a)$$

gegeben iſt, ſo hat man:

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0,$$

und die Gleichung der Tangente wird folglich:

$$(\eta - y)\frac{df}{dy} + (\xi - x)\frac{df}{dx} = 0, \qquad (b)$$

d. h. ſie ergibt ſich aus der Differenzialgleichung der Curve, wenn man darin die Differenzen $\xi - x$, $\eta - y$ für die Differenziale dx, dy ſetzt, was in der

hat ſtattfinden muß, weil man die Tangente als die Verlängerung einer durch bei einander unendlich nahe liegende Punkte gezogenen Sehne betrachten kann.

Die Gleichung der Normale iſt in dieſem Falle:

$$(\eta - y)\frac{df}{dx} - (\xi - x)\frac{df}{dy} = 0. \qquad (c)$$

Wenn man in den Gleichungen (b), (c) die Coordinaten ξ, η als Constanten und x, y als veränderliche Coordinaten betrachtet, ſo gehören dieſe Gleichungen zu zwei Linien, welche durch den Punkt (ξ, η) gehen und deren Durchſchnittspunkte mit der Curve (a) die durch den Punkt (ξ, η) gezogenen Tangenten oder Normalen dieſer Curve beſtimmen.

Die Gleichungen (b) und (c) würden ſich nicht ändern, wenn die Gleichung (a) die Form $f(x, y) = c$ hätte, wo c einen conſtanten Parameter bezeichnet, welcher durch Differenzirung verſchwindet. Man kann alſo die Linien (b) und (c) auch als die geometriſchen Oerter der Punkte betrachten, worin die von dem Punkte (ξ, η) ausgehenden geraden Linien die Curven, welche man erhält, wenn man dem Parameter c eine Reihe beſonderer Werthe beilegt, berühren, oder rechtwinklich durchſchneiden.

§. 173. Wenn man die Winkel, welche die Tangente mit den durch den Punkt (x, y) in dem Sinne der poſitiven Coordinaten zu den Axen der x und der y gezogenen Parallelen bildet, mit α, β bezeichnet, ſo hat man:

$$\cos.\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad \cos.\beta = \pm\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}. \qquad (d)$$

Wenn man die ähnlichen Winkel für die Normale mit λ, μ bezeichnet, ſo erhält man:

$$\cos.\lambda = \pm\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad \cos.\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}. \qquad (\delta)$$

Die Zeichen dieſer vier Werthe müſſen ſo miteinander verbunden werden, daß ſie der Gleichung:

$$\cos.\alpha \cos.\lambda + \cos.\beta \cos.\mu = 0$$

Genüge leiſten, welche bekanntlich ausdrückt, daß die Tangente und Normale auf einander ſenkrecht ſind.

Wenn die Gleichung der Curve unter der Form (a) gegeben iſt, ſo hat man:

$$\frac{\cos.\alpha}{\frac{df}{dy}} = \frac{\cos.\beta}{\frac{df}{dx}} = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2}}.$$

§. 174. Unter der Länge eines zwiſchen zwei gegebenen Punkten liegenden Curvenbogens verſteht man die Grenze, welcher ſich die Länge einer dieſen Curvenbogen beſchriebenen und von denſelben Punkten begrenzten Polygonallinie ohne Ende nähert, wenn die Anzahl ihrer Seiten ohne Ende zunimmt. Wenn alſo die Länge des von dem Punkte (x_0, y_0), als Anfangspunkt, bis zu dem Punkte (x, y) gehenden Curvenbogens mit s bezeichnet wird, ſo iſt s eine Function von x, welche nach der Definition der Differenzialgleichung:

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm\sqrt{1 + y'^2}\cdot dx \qquad (s)$$

Genüge leiſtet, wo das Zeichen + oder − genommen werden muß, je nachdem der Curvenbogen für zunehmende Werthe von x zu- oder abnimmt. Vermöge der Gleichung (s) verwandeln ſich die Formeln (d), (δ) in folgende:

$$\cos.\alpha = \pm\frac{dx}{ds},\ \cos.\beta = \pm\frac{dy}{ds};\ \cos.\lambda = \pm\frac{dy}{ds},\ \cos.\mu = \pm\frac{dx}{ds}.$$

Man ſagt auch wohl: daß die Länge eines Curvenbogens die einer g den Linie iſt, auf welche ſich der Curvenbogen genau legen ließe, wenn ſelbe einen vollkommen biegſamen und unausdehnbaren Faden bildete; a dieſe Definition iſt, abgeſehen davon, daß ſie eigentlich einen logiſchen Z enthält, mehr phyſiſch, als mathematiſch, und daſſelbe ließe ſich von jeder dern Definition der Größe s ſagen, wenn man dabei die Anwendung des griffes der Grenze oder des unendlich Kleinen vermeiden wollte.

Nicht ſo verhält es ſich hinſichtlich der von einer Curve eingeſchloſſ Fläche; denn wenn man die Fläche A eines Polygones beſtimmt hat und beſchreibt innerhalb deſſelben eine geſchloſſene krumme oder gebrochene Linie ſieht man ſofort ein, daß von A ein Theil B dieſer Größe hinweggenom wird, ſo daß der Begriff der Grenze oder des unendlich Kleinen zur Bef mung oder Meſſung der Größe B nur dann erforderlich iſt, wenn der Um von B eine Curve iſt, und nicht vermöge der Definition dieſer Größe ſelb

Wenn man die Gleichung (s) nicht zur Definition der Größe s ſ nimmt, deren Begriff alsdann als a priori gegeben angeſehen wird; ſo die Gleichung (s) auf folgende Weiſe abgeleitet.

Es ſei mm_1 (Fig. 41) ein ſo kleiner Curvenbogen, daß die Curve im halb der Ausdehnung deſſelben ihre Convexität immer nach derſelben Seite k oder ihre Tangente zwiſchen m und t nicht ſchneidet; ſo nimmt man mit chimedes als Grundſatz an, daß die Länge des Bogens mm_1 zwiſchen der Sehne mm_1 und der der umſchließenden gebrochenen Linie mtm_1 li Bezeichnet man alſo das Intervall $pp_1 = mr$ mit Δx, ſo hat man:

$$mt = \sqrt{1 + y'^2}\cdot\Delta x,\quad m_1t = rt - rm_1 = y'\Delta x - \Delta y,$$

$$\text{Sehne } mm_1 = \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}\cdot\Delta x.$$

Das Verhältniß der Länge der gebrochenen umſchließenden Linie zu der Sehne wird folglich ausgedrückt durch:

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2} + y' - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}},$$

und hat offenbar die Einheit zur Grenze. Folglich hat auch das Verhältni

$$\frac{\Delta s}{\Delta x\sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}}$$

die Einheit zur Grenze, woraus ſich die Gleichung (s) ſofort ergibt.

§. 175. Wir wollen nun die vrhergehenden Formeln auf einige Beiſp anwenden. Da die Gleichung der auf ihren Mittelpunkt und auf ihre Ha axen bezogenen Ellipſe von der Form iſt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (e$$

ſo verwandelt ſich die Gleichung (b) in folgende:

$$\frac{(\xi - x)\,x}{a^2} + \frac{(\eta - y)\,y}{b^2} = 0,$$

lmehr in:

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \qquad (b_1)$$

lich in:

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1. \qquad (b_2)$$

Gleichung (b_1) iſt die einer andern Ellipſe, welche durch den Punkt geht und deren Durchſchnittspunkte mit der Ellipſe (e) die Berührungs- ieſer Ellipſe und der von dem Punkte (ξ, η) ausgehenden geraden nd.

nn man für die Halbaxen a, b die Werthe ca, cb ſetzt und die Con- ſich ändern läßt, ſo erhält man eine Reihe *ähnlicher concentri-* lipſen, und die Punkte, worin jede derſelben von der Ellipſe (b_1) n wird, ſind diejenigen Punkte, worin ſie von den vom Punkte (ξ, η) den geraden Linien berührt würde.

Gleichung (b_2) iſt die der Tangente der Ellipſe (e) im Punkte (x, y), n darin ξ, η als veränderliche Coordinaten betrachtet. Aber wenn egen x, y als veränderlich und ξ, η als conſtant betrachtet, ſo wird eichung die einer geraden Linie, welche die Ellipſe in zwei Punkten , worin ſie von den vom Punkte (ξ, η) ausgehenden geraden Linien vird.

nn man in der Gleichung (b_2) $\eta = 0$ ſetzt, ſo erhält man $\xi = \frac{a^2}{x}$

Subtangente iſt von der Axe 2b *unabhängig* und für die gegebene ieſelbe, als für den über der Axe 2a als Durchmeſſer beſchriebenen Hieraus ergibt ſich eine in allen Elementarlehrbüchern der analytiſchen ie angegebene, ſehr einfache Conſtruction der Tangente der Ellipſe.

Gleichung der Normale der gegebenen Ellipſe iſt:

$$\frac{(\eta - y)\,x}{a^2} - \frac{(\xi - x)\,y}{b^2} = 0,$$

n man darin $\eta = 0$ ſetzt, ſo ergibt ſich daraus für den Ausdruck der nale:

$$\xi - x = -\frac{b^2}{a^2}\,x,$$

r Zahlenwerth iſt der Abſciſſe proportional.

die Gleichung der auf ihre Axe und ihren Scheitel bezogenen Para- ende iſt:

$$y^2 = 2px,$$

e Gleichung ihrer Tangente und Normale, reſp.:

$$\eta y - p(\xi + x) = 0, \quad p(\eta - y) + y(\xi - x) = 0.$$

e Subtangente der Parabel iſt der doppelten Abſciſſe und die Subnor- m Parameter oder der doppelten Entfernung des Scheitels vom Brenn- er Parabel gleich.

e Gleichungen der Tangente und Normale der logarithmiſchen Curve:

$$y = \log. x$$

ſind reſp.:

$$\eta - y = \frac{1}{x}(\xi - x),\quad y - y = x(x - \xi).$$

Durch die Vertauſchung der Axen verwandelt ſich die erſte Gleichung i folgende:

$$\xi - x = \frac{1}{y}(\eta - y),$$

und wenn man darin $\eta = 0$ ſetzt, ſo erhält man $x - \xi = 1$, d. h. die Su tangente hat einen conſtanten Werth. Dieſe Eigenſchaft gibt die wah geometriſche Definition der Curve an die Hand, wovon nur eine arithmetiſc Definition gegeben wird, ſo lange man blos ſagt, daß die Abſciſſen die Log rithmen der zugehörigen Ordinaten ſind.

§. 176. Unter den Curven, welche man transcendente genannt hat, w ihre Orthogonalgleichungen Exponential-logarithmiſche, oder Kreisfunctio enthalten, iſt die Cycloide in der Geſchichte der Mathematik die berühmte und zugleich wegen ihrer vielen intereſſanten Eigenſchaften die merkwürdig So nennt man nämlich die Curve, welche ein beliebiger Punkt M (Fig. 4 eines Kreiſes NMN′ beſchreibt, welcher ohne Gleiten auf einer unbegre ten geraden Linie X′X, der Baſis der Cycloide fortrollt, d. h. ſo fortro daß die Länge eines beliebigen Bogens MN der Länge des Stückes ON d geraden Linie, womit alle Punkte des Bogens MN ſucceſſive zuſammenfalle gleich iſt. Wir wollen den Halbmeſſer CM = R, den veränderlichen Win MCN = φ, die Abſciſſe des Punktes M, nämlich OP = x und die rechtwi lige Ordinate PM = y ſetzen, indem der Anfangspunkt O der Punkt iſt, w der Punkt M die Baſis X′X berührt, ſo haben wir nach der Definition d Cycloide:

$$ON = R\varphi,\quad PN = MI = R\sin.\varphi,\quad PM = IN = R(1 - \cos.\varphi),$$

woraus folgt:

$$x = R(\varphi - \sin.\varphi), \qquad (f)$$

$$y = R(1 - \cos.\varphi). \qquad (g)$$

Jede der Gleichungen (f) und (g) kann für die Gleichung der Cycloide genom men werden, indem die eine die Coordinaten x, φ und die andere die C ordinaten y, φ enthält. Nach der Beſchreibungsart der Curve kann der erze gende Kreis auf der Baſis X′X zur Rechten und Linken des Punktes O ei unbegränzte Anzahl von Umwälzungen machen, und die geometriſche Continuit fordert folglich, daß man die Cycloide als aus unendlich vielen, einander gl chen Bogen, wie OMQR, beſtehend betrachte. Die gegenſeitige Entfern OR der End- oder Fußpunkte eines ganzen Cycloidenbogens iſt der Lä des Umfanges des erzeugenden Kreiſes gleich und die der Mitte von OR e ſprechende Ordinate SQ iſt dem Durchmeſſer des erzeugenden Kreiſes glei und theilt den Cycloidenbogen OQR in zwei ſymmetriſche Theile.

Um dieſe unbegrenzte Bewegung des Erzeugungskreiſes ausdrücken zu kö nen, muß man annehmen, daß die Veränderliche φ ſowohl poſitiv, als nega genommen werden, und ihre abſolute Größe eine beliebige Anzahl ganzer Um drehungen erreichen und auch überſchreiten kann. Dieſes vorausgeſetzt, drü jede der Gleichungen (f) und (g) die Cycloide wegen der Periodicität der Fun tionen sin. φ, cos. φ in der ganzen Ausdehnung ihres Laufes oder Zuges a Es findet daher zwiſchen der geometriſchen Erzeugung der Curve und der an lytiſchen Unterſuchung ihrer Gleichung eine genaue Correlation ſtatt, was v

ter durch die Beſchreibung der Curve gegebenen oder beſtimmten Wahl der abhängigen Veränderlichen φ herrührt (§. 11).

Geſetzt nun, man wollte die Gleichung der Cycloide zwiſchen den rechtwinkligen Coordinaten x, y haben, ſo ergibt ſich aus der Gleichung (g):

$$\cos.\varphi = \frac{R-y}{R}, \text{ folglich } \sin.\varphi = \pm\frac{\sqrt{2Ry-y^2}}{R},$$

wo die Wurzelgröße poſitiv, oder negativ genommen werden muß, jenachdem $\sin.\varphi$ einen poſitiven oder negativen Werth hat. Die Gleichung zwiſchen x und y iſt:

$$x = R \text{ arc. cos. } \left(\frac{R-y}{R}\right) \pm \sqrt{2Ry-y^2}; \qquad (h)$$

aber jedem Werthe von x entſpricht nur einer der unendlich vielen Werthe des Ausdruckes:

$$R \text{ arc. cos. } \left(\frac{R-y}{R}\right)$$

und außerdem dürfen die beiden Zeichen der Wurzelgröße nicht zugleich angewandt werden. Man muß das obere Zeichen nehmen, wenn der Punkt (x, y) im Bogen OQ angehört, und das untere Zeichen, wenn dieſer Punkt zu dem Bogen QR gehört, indem man dieſelbe Vertauſchung der Zeichen vornimmt, ob man durch den Scheitel, oder durch den Fußpunkt des Cycloidenbogens geht. Wenn man die beiden Zeichen zu gleicher Zeit anwendete, ſo würde die Gleichung (h) zwei Cycloiden von entgegengeſetzter Lage ausdrücken (Fig. 43), welche hinſichtlich ihrer geometriſchen Erzeugung in keiner Verbindung miteinander ſtehen, und die gewöhnliche Correlation zwiſchen der Geometrie und Analyſis, wie man ſie z. B. bei den Kegelſchnitten findet, würde hier nicht ſtattfinden. Später werden wir auf das Princip und auf die Einſchränkungen dieſes Zuſammenhanges zwiſchen den analytiſchen Formeln und den geometriſchen Geſetzen der Beſchreibung der Linien zurückkommen.

§. 177. Zur Beſtimmung der Tangente der Cycloide könnte man die Gleichung (h) differenziren; allein es iſt einfacher, die Veränderliche φ beizubehalten und mit den Gleichungen (f), (g) zu operiren, wodurch man erhält:

$$dx = R(1-\cos.\varphi)\,d\varphi, \quad dy = R\sin.\varphi\,d\varphi,$$

und folglich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin.\varphi}{1-\cos.\varphi} = \pm\frac{\sqrt{2Ry-y^2}}{y} = \pm\sqrt{\frac{2R-y}{y}}.$$

Dieſer Werth wird $=0$, wenn $y=2R$ iſt, was an den Scheiteln der Cycloidenbogen ſtattfindet und er wird unendlich, wenn y verſchwindet. Die Fußpunkte der Cycloidenbogen ſind folglich Rückkehrpunkte, worin die Tangente auf der Baſis der Cycloide ſenkrecht wird. Für den Werth der Subnormale hat man:

$$\sqrt{2Ry-y^2} = R\sin.\varphi.$$

Die Normale MN der Cycloide durchſchneidet alſo die Baſis X′X in dem Punkte N, wo dieſe gerade Linie von dem Erzeugungskreiſe berührt wird, und die Tangente TM geht durch den andern Endpunkt N′ des auf der Baſis X′X ſenkrechten Durchmeſſers. Für die Länge der Normale MN hat man folglich den ſehr einfachen Ausdruck:

$$MN = \sqrt{2Ry},$$

wovon wir später Gebrauch machen werden. Bemerken kann man auch, daß die Länge MN in der Nähe des Punktes O immer mehr und mehr abnimmt, obgleich sich die Normale immer mehr und mehr gegen die Axe der x neigt.

2. Von den Asymptoten ebener Curven.

§. 178. Unter einer Asymptote einer ebenen Curve versteht man eine gerade Linie, welcher sich ein auf der Curve bewegender Punkt ohne Ende nähert, ohne sie jemals zu erreichen, so daß das von diesem Punkte auf die gerade Linie gefällte Perpendikel δ kleiner werden kann, als jede endliche Größe, ohne jemals ganz zu verschwinden, wozu erforderlich ist, daß der Curvenzweig, worauf sich der Punkt bewegt, in's Unendliche fortläuft.

Da der Unterschied der derselben Abscisse entsprechenden Ordinate der Curve und ihre Asymptote dem Quotienten aus der Länge δ und dem Cosinus des Winkels, welchen die Asymptote mit der Axe der x bildet, gleich ist; so convergirt derselbe gegen Null, wenn x unendlich groß wird. Zu gleicher Zeit convergirt der Winkel, welchen die Tangente der Curve mit der Axe der x bildet, gegen eine Grenze, welche nichts anders ist, als der Winkel, den dieselbe Axe mit der Asymptote bildet.

Die Gleichung (b) wird die einer Asymptote, wenn die Voraussetzung von $x = \infty$ oder $y = \infty$ alle Glieder verschwinden macht, worin diese Veränderlichen vorkommen, so daß die Gleichung nur noch die veränderlichen Coordinaten ξ, η und constante Parameter enthält. Man substituirt also in diese Gleichung den aus der Gleichung der Curve abgeleiteten Werth von y, durch x ausgedrückt, und setzt dann $x = +\infty$; so erhält man alle nicht zu der Axe der y parallelen Asymptoten. Diese letztere findet man, wenn man den Werth von x als Function von y substituirt und dann $y = \pm\infty$ setzt.

Wenn wir die auf ihren Mittelpunkt und auf ihre Axen bezogene Hyperbel nehmen, deren Gleichung folgende ist:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so erhalten wir für die Gleichung der Tangente:

$$\frac{\xi x}{a^2} - \frac{\eta y}{b^2} = 1.$$

Wenn man in diese letztere Gleichung den Werth von y als Function von x substituirt, so verwandelt sie sich in folgende:

$$\frac{\xi}{a^2} \pm \frac{\eta}{b}\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x},$$

und wenn man darin $x = \pm\infty$ setzt, so reducirt sie sich auf die Gleichung:

$$\eta = \pm\frac{b}{a}\xi$$

der beiden Asymptoten der Hyperbel, wie aus der Lehre von den Kegelschnitten bekannt ist.

Wenn man in der Gleichung:

$$\eta - y = \frac{1}{x}(\xi - x)$$

der Tangente der logarithmischen Linie $y = \log. x$ die Abscisse $x = \pm\infty$ setzt, nachdem für y sein Werth als Function von x substituirt ist: so erhält

a keine Aſymptoten; aber wenn man dagegen den Werth von x als Func-
t von y in dieſe Gleichung ſubſtituirt, ſo verwandelt ſie ſich in folgende:

$$(\eta - y + 1)\, e^{y} = \xi,$$

wenn man hierin $y = -\infty$ ſetzt, ſo reducirt ſie ſich auf $\xi = 0$. Folg-
iſt die Axe der y eine Aſymptote der Curve.

Die vorhergehende Methode bedarf in dem Falle einer Modification, wo die Gleichung der Curve nicht in Beziehung auf y und auf x auflöſen t. Es ſei:

$$y = mx + n$$

Gleichung einer nicht zu der Axe der y parallelen Aſymptote, ſo ergibt daraus:

$$\frac{y}{x} = m + \frac{n}{x},$$

wenn x unendlich groß wird; ſo convergirt der Werth des Verhältniſſes
- gegen die Conſtante m. Wenn man alſo in der Gleichung der Curve
$= \alpha x$ ſetzt, und die Grenze der neuen Veränderlichen α für $x = \pm\infty$
ht; ſo iſt dieſe Grenze, wenn ſie exiſtirt, ein Werth der Conſtanten m. Setzt
n alsdann in der Gleichung der Curve:

$$y - mx = \beta$$

ſucht ebenfalls die Grenze, gegen welche die Veränderliche β convergirt,
nn x gegen die Werthe $\pm\infty$ convergirt, ſo iſt dieſe Grenze ein Werth
r Conſtanten n.

Eben ſo fände man die nicht zu der Axe der x parallelen und folglich die der Axe der y parallelen Aſymptoten.

Wir wollen z. B. die Curve betrachten, welche das Descartes'ſche
olium genannt wird (Fig. 44) und deren Gleichung:

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

reits an einem andern Orte (§. 152) unterſucht iſt; ſo wird die Gleichung iſchen α und x:

$$\alpha + 1 = \frac{3a\alpha}{x},$$

raus für die Grenze von α folgt $m = -1$. Setzt man alsdann $y + x = \beta$,
erhält man für die Gleichung zwiſchen β und x:

$$3(\beta + \alpha) - \frac{3(\beta^2 + a\beta)}{x} + \frac{\beta^3}{x^2} = 0,$$

raus ſich $n = -a$ für die Grenze von β ergibt. Mithin iſt die gerade nie $y + x + a = 0$ eine Aſymptote der gegebenen Curven.

3. Anwendung der Polarcoordinaten.

§. 179. Man geht von der Gleichung einer Curve zwiſchen rechtwinkli-
n Coordinaten zu ihrer Gleichung zwiſchen Polarcoordinaten über, wenn an ſetzt:

$$x = r\cos.\varphi,\quad y = r\sin.\varphi,$$

o r alsdann den vom Anfangspunkte der Coordinaten, welcher jetzt der Pol nannt wird, nach dem Punkte (y, x) gezogenen Radiusvector und φ den inkel bezeichnet, welchen dieſer Radiusvector mit der Halbaxe der poſitiven bildet. Aus dieſen Gleichungen ergibt ſich:

$$dx = dr \cos.\varphi - r \sin.\varphi d\varphi, \quad dy = dr \sin.\varphi + r \cos.\varphi d\varphi, \qquad (i)$$

und folglich hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\varphi} \text{tang.}\varphi + r}{\frac{dr}{d\varphi} - r \text{tang.}\varphi}, \quad \frac{dr}{d\varphi} = r \cdot \frac{1 + \frac{dy}{dx} \text{tang.}\varphi}{\frac{dy}{dx} - \text{tang.}\varphi}.$$

Aber wenn man den Winkel, welchen die Tangente im Punkte (x, y) mit der Halbaxe der poſitiven x bildet, mit θ bezeichnet, ſo hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\theta, \quad \frac{dr}{rd\varphi} = \frac{1 + \text{tang.}\theta \cdot \text{tang.}\varphi}{\text{tang.}\theta - \text{tang.}\varphi} = \cot.(\theta - \varphi). \qquad (j)$$

Der Winkel, welchen die Tangente der Curve mit dem nach dem Berührungspunkte gehenden Radiusvector bildet, iſt $= (\theta - \varphi)$. Man kann folglich dieſen Winkel vermittelſt der Formel (j) berechnen und die Tangente conſtruiren, wenn die Gleichung der Curve zwiſchen Polarcoordinaten gegeben iſt. Wenn man durch den Pol ein Perpendikel auf den Radiusvector zieht, ſo ſchneidet daſſelbe die Tangente in einem Punkte, deſſen Abſtand vom Pole ausgedrückt wird durch:

$$p = r \text{tang.}(\theta - \varphi) = r^2 \frac{d\varphi}{dr}, \qquad (k)$$

und man nennt die Länge p nach der Analogie zuweilen die Polarſubtangente.

Die Formel (j) läßt ſich durch eine ſehr einfache Conſtruction direct erhalten; denn es ſeien m, m_1 (Fig. 45) zwei einander unendlich nahe liegende Punkte einer Curve, ſo daß die gerade Linie mt, welche eine Tangente der Curve im Punkte m iſt, als die Verlängerung des unendlich kleinen Bogens mm_1 betrachtet werden kann; O ſei der Pol und OX die gerade Linie, von welcher aus die Winkel φ gezählt werden. Wenn man mit dem Halbmeſſer Om den unendlich kleinen Kreisbogen $m\mu$ beſchreibt, ſo hat man $m\mu = rd\varphi$, $\mu m_1 = dr$, und man kann $m\mu m_1$ als ein geradliniges, in μ rechtwinkliges Dreieck betrachten, welches gibt:

$$\text{tang.}\,\mu m m_1 = \frac{dr}{rd\varphi}.$$

Man kann aber den unendlich kleinen Sector $Om\mu$ auch als ein in m rechtwinkliges Dreieck betrachten, und folglich iſt:

$$\text{tang.}\,\mu m m_1 = \cot.(\theta - \varphi).$$

§. 180. Da die Länge eines Curvenbogens, von einem auf der Curve genommenen feſten Punkte aus gezählt, eine Größe iſt, welche nicht von dem angewandten Coordinatenſyſteme abhängt, ſo braucht man, um den Ausdruck von ds in Polarcoordinaten zu erhalten, für dx und dy nur ihre aus den Gleichungen (i) abgeleiteten Werthe in die Formel:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

zu ſubſtituiren, wodurch man erhält:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2. \qquad (l)$$

Die vorhergehende Conſtruction gibt auch dieſes Reſultat ſehr einfach, weil man mm_1 nur als die Hypotenuſe des in μ rechtwinkligen Dreiecks $m\mu m_1$ zu betrachten braucht.

Unter der von einer auf Polarcoordinaten bezogenen Curve eingeſchloſſe-
en Fläche verſteht man die Fläche, welche zwiſchen der Curve, dem feſten
nd dem beweglichen Radiusvector Om liegt. Wenn alſo der bewegliche Ra-
iusvector aus der Lage Om in die unendlich wenig davon verſchiedene Lage
m_1 übergeht, ſo nimmt die von der Curve eingeſchloſſene Fläche, welche wir
it u bezeichnen wollen, um die Fläche des unendlich kleinen Dreiecks, Omm_1,
orin Om_1 als die Grundlinie $m\mu$ als die Höhe betrachtet werden kann, zu.
an hat alſo:

$$du = \frac{1}{2}(r + dr)\, r d\varphi,$$

nd wenn man die unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung unberück-
htigt läßt:

$$du = \frac{1}{2} r^2 d\varphi. \qquad (m)$$

as Differenzial derſelben Fläche, aber in rechtwinkligen Coordinaten ausge-
ückt, iſt:

$$du = \frac{1}{2}(x dy - y dx),$$

ril:

$$r^2 = x^2 + y^2,\ d\varphi = d\left(\text{arc.tg}\frac{y}{x}\right) = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \qquad (n)$$

. Wegen der Wichtigkeit der Formeln (m), (n) in der Mechanik und Aſtro-
mie kann es wünſchenswerth erſcheinen, ſie durch die Methode der Grenzen
zuleiten. Wir wollen daher bemerken, daß, wenn der Radiusvector aus der
ge Om in die Lage Om_1 übergeht, die Veränderlichen r, φ reſp. um Δr,
φ und die Curvenfläche um den Sector $Omm_1 = \Delta u$ zunehmen. Nun
gt aber die Fläche dieſes Sectors zwiſchen den Flächen der beiden Kreisſec-
ren, welche denſelben Winkel am Mittelpunkte und die Halbmeſſer r, $r + \Delta r$
ben, d. h. man hat, wenn Δr als poſitiv betrachtet wird:

$$\Delta u > \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi,\ \Delta u < \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\varphi.$$

ber das Verhältniß:

$$\frac{\frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\varphi}{\frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi}.$$

t die Einheit zur Grenze, wenn $\Delta\varphi$, Δr gegen Null convergiren, und
lglich hat das Verhältniß:

$$\frac{\Delta u}{\frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi}$$

ch die Einheit zur Grenze, woraus ſich die Gleichung (m) ergibt.

§. 181. Wenn die Gleichung einer Curve zwiſchen Polarcoordinaten die
form $r = f\varphi$ hat, wo $f\varphi$ eine Function iſt, welche für alle reelle Werthe
n φ reell bleibt, und mit φ ohne Ende zu- oder abnimmt; ſo wird die
urve eine Spirale genannt. Sie ſchneidet jede vom Pole aus gezogene un-

bestimmt verlängerte gerade Linie in unendlich vielen Punkten, und der Bogen, welcher zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchschnittspunkten der Curve mit demselben Radiusvector liegt, wird eine Windung genannt. Uebrigens haben die geometrischen Eigenschaften dieser Curven fast nur theoretisches Interesse.

Die sogenannte Archimedische Spirale, deren Gleichung folgende ist:

$$r = a\varphi,$$

hat die einfachste Form. Man kann sich vorstellen, daß sie von einem Punkte m (Fig. 46) beschrieben wird, welcher sich mit einer constanten Geschwindigkeit auf einer durch den Pol O gehenden geraden Linie MN fortbewegt, während sich diese gerade Linie selbst mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit um den Pol dreht. Auch muß man annehmen, daß, wenn der Punkt m durch den Pol geht, die bewegliche gerade Linie MN mit der festen geraden Linie OX, von welcher aus die Winkel φ gezählt werden, zusammenfällt.

Den Parameter a, welcher die Länge ausdrückt, die der Punkt m auf der geraden Linie MN durchläuft, während diese einen Winkel beschreibt, welcher sich zu der halben Umdrehung oder zu 180° wie 1 zu π verhält, kann man immer als positiv betrachten. Wenn die Constante a positiv ist, so wird r mit φ negativ, und nach dem Gesetze der Bewegung ist einleuchtend, daß die negativen Werthe des Radiusvectors nach einer der Richtung der positiven Werthe gerade entgegengesetzten Richtung genommen werden müssen. Wenn z. B. OM mit OX den positiven Winkel MOX bildet, so wird der Radiusvector von O nach m gemessen; aber vorher bildete OM mit OX den negativen Winkel M'OX und der bewegliche Punkt m befand sich in m', so daß der Radiusvector Om' in dem entgegengesetzten Sinne von OM' genommen werden muß.

Die Archimedische Spirale enthält also zwei Systeme entgegengesetzter Windungen, welche sich im Anfangspunkte vereinigen. Wenn man eins dieser Systeme hinwegließe, so würde die Curve im Anfangspunkte plötzlich unterbrochen, und das Gesetz der Stetigkeit der zusammengesetzten Bewegung, wodurch die Curve beschrieben wird, bliebe unberücksichtigt.

Die Gleichung dieser Spirale gibt:

$$\text{tang.}\,(\theta - \varphi) = \frac{r}{a} = \varphi,$$

so daß die Curve die gerade Linie OX im Anfangspunkte berührt. Ferner hat man nach der Formel (k):

$$p = \frac{r^2}{a} = a\varphi^2.$$

Es sei $R = 2a\pi$, so daß der Radiusvector bei jeder Umdrehung des beschreibenden Punktes um R zunimmt, so erhält man:

$$r = \frac{a}{\varphi} \qquad (p)$$

woraus $\text{tang.}\,(\theta - \varphi) = -\varphi$ folgt. Diese Curve (Fig. 47) wird die hyperbolische Spirale genannt; sie macht um den Pol, welchem sie sich ohne Ende nähert, ohne denselben jemals zu erreichen, weil man der Größe φ einen unendlichen Werth beilegen müßte, wenn r verschwinden sollte, unendlich viele Windungen. Sie hat die gerade Linie, deren Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten $y = a$ ist, zur Asymptote, indem der Winkel φ von der Halbaxe der positiven x aus gezählt wird. Denn die Gleichung (p) wird in diesem Coordinatensysteme:

$$y = a \frac{\sin. \varphi}{\varphi},$$

$y = a$ für $\varphi = 0$ folgt.
nn man auch die negativen Werthe von φ berückſichtigt und die ihnen enden negativen Werthe von r conſtruirt, wie bereits bei der Archi- en Spirale bemerkt wurde, ſo bekommt die logarithmiſche Spirale zwei iſche Zweige. Da aber zwiſchen den beiden ſo conſtruirten Zweigen ine Unterbrechung der Stetigkeit ſtattfindet, ſo bleibt dieſe Erweiterung ſtruction der Gleichung (p) rein conventionell, und entſpringt, wie bei imed'ſchen Spirale, nicht aus der Nothwendigkeit der Erhaltung der it der Bewegung, durch welche die Curve beſchrieben wird.
e logarithmiſche Spirale iſt diejenige, deren Gleichung fol- ::

$$\varphi = \frac{1}{m} \log. r, \quad \text{oder} \quad r = e^{m\varphi}.$$

ht, wie die hyperboliſche Spirale, unendlich viele Windungen um den ie ihn jemals zu erreichen; aber ſie hat keine Aſymptote. Die Formel für dieſe Curve:

$$\cot. (\theta - \varphi) = m,$$

folgt, daß der Radiusvector mit der Tangente einen conſtanten Winkel elche merkwürdige Eigenſchaft man zur geometriſchen Definition der ehmen kann.

Zweites Kapitel.

Theorie der ebenen Umhüllungslinien.

182. Es ſei:

$$F(x, y, a) = 0, \qquad (a)$$

chung unendlich vieler Curven, welche ſich nur durch den Werth des ers a von einander unterſcheiden (§. 162), und:

$$f(x, y, y') = 0 \qquad (b)$$

Differenzialgleichung, welche dieſer Reihe von Curven entſpricht und wird, wenn man die Conſtante a zwiſchen der Gleichung (a) und ihrer bleitung eliminirt; ſo kann es geſchehen, daß die in Rede ſtehenden einander nicht ſchneiden, wie wenig die ſucceſſiven, dem Parameter a en Werthe auch von einander verſchieden ſein mögen. Dieſer Fall desmal ſtatt, wenn man aus der Gleichung (b) nur einen einzigen Werth für y' ableiten kann, was für reelle Werthe x und y auch bei- in mögen, weil, wenn mehrere der Curven (a) ſich in einem Punkte) ſchnitten, die Werthe x_0, y_0 für y' eben ſo viele verſchiedene Werthe ßten, als ſich in dieſem Punkte Curven durchſchneiden, indem die n dieſer Curven im Durchſchnittspunkte verſchiedene Neigungen gegen iſſenare hätten.
nn man z. B. $x^2 + y^2 - a = 0$ ſetzt, ſo ſind die fraglichen Curven ſche Kreiſe, welche keinen gemeinſchaftlichen Punkt haben können, wel-

chen Werth der Unterſchied der Halbmeſſer auch haben mag. Die Gleichung (b) wird in dieſem Falle: $x + yy' = 0$ und ſie gibt für y' nur einen einzigen reellen Werth für alle reelle Werthe von x und y, wie es auch der Fall ſein muß. Für $x = 0$, $y = 0$ erſcheint zwar der Werth von y' unter der unbeſtimmten Form $\frac{0}{0}$; aber wenn man zur Beſtimmung des wahren Werthes von y' die Methode in §. 142 anwendet, ſo kommt man auf die Gleichung $y'^2 = -1$, deren Wurzeln imaginär ſind.

Es kann auch geſchehen, daß die in der Gleichung (a) enthaltenen Linien ſich alle in demſelben Punkte ſchneiden, und dieſes muß ſtattfinden, wenn die Werthe der Coordinaten dieſes Punktes vermöge der Gleichung (b) für y' einen wirklich unbeſtimmten Werth geben. So gehört z. B. die Gleichung $y - ax = 0$ einer Reihe gerader Linien an, welche ſich alle im Anfangspunkte der Coordinaten durchſchneiden und da die Gleichung (b) in dieſem Falle $y'x - y = 0$ wird, ſo findet man, daß die Unbeſtimmtheit von y' für die Werthe $x = 0$, $y = 0$ nicht gehoben werden kann.

§. 183. Wenn dagegen die Gleichung (b) ſo beſchaffen iſt, daß ſie für unendliche Syſteme reeller Werthe von x und y mehrere reelle Werthe für y' gibt, ſo durchſchneiden ſich die Curven (a) in einem, oder in mehreren Punkten. Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, daß zwei dieſer Curven nur einen einzigen Durchſchnittspunkt haben, wodurch in der Unterſuchung nichts geändert, der Vortrag aber erleichtert wird.

Es ſeien a und $a + \Delta a$ zwei verſchiedene Werthe des Parameters a, ſo ſind die Gleichungen der dieſen beſondern Werthen des Parameters a entſprechenden Curven:

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (a)$$

$$F(x, y, a + \Delta a) = 0 \qquad (a_1)$$

und die Coordinaten des Durchſchnittspunktes ſind die aus dieſen beiden Gleichungen abgeleiteten Werthe von x, y. Dieſe Coordinaten ändern ſich, und der Punkt verrückt ſich auf der erſten Curve, wenn man Δa immer kleiner und kleiner nimmt. Geht man zu der Grenze über, indem man Δa unendlich klein nimmt; ſo verwandelt ſich die Gleichung (a_1) in folgende:

$$F(x, y, a) + \frac{dF}{dx}\, da = 0$$

ſo daß man ſtatt der Gleichungen (a), (a_1) die beiden folgenden hat:

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (a)$$

$$\frac{dF}{da} = 0, \qquad (a')$$

und die aus dieſen letzten Gleichungen abgeleiteten Werthe von x, y ſind die Grenzen, welchen ſich die Werthe der aus den Gleichungen (a), (a_1) abgeleiteten Werthe derſelben Coordinaten ohne Ende nähern, wenn man Δa ohne Ende abnehmen läßt. Mit andern Worten: der ſo beſtimmte Punkt (x, y) iſt der Durchſchnittspunkt zweier einander unendlich naheliegender Curven, deren Gleichungen reſp. folgende ſind:

$$F(x, y, a) = 0,$$

$$F(x, y, a + da) = 0.$$

Dieſer Punkt verrückt ſich, wenn man den Werth des Parameters verändert; er beſchreibt in der Ebene der Curven eine ſtetige Linie, wenn man dieſen Parameter ſich ſtetig ändern läßt, und nach den erſten Begriffen der analytiſchen Geometrie wird die Gleichung dieſer Linie:

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (\alpha)$$

rch die Elimination von a zwiſchen den Gleichungen (a), (a') erhalten.

Die Linie (α) hat die merkwürdige Eigenſchaft, daß ſie alle Linien der ihe (a) berührt; und in der That iſt die Gleichung (α) nichts anders, als Gleichung (a), worin für a ſein aus der Gleichung (a') abgeleiteter Werth Function von x, y geſetzt iſt. Man kann daher, ſtatt unmittelbar die eichung (α) zu differenziren, um die Tangente der durch dieſe Gleichung gedrückten Curve zu beſtimmen, die Gleichung (a) differenziren, indem man Größe a nicht mehr als einen conſtanten Parameter, ſondern als eine nction der Veränderlichen x, y betrachtet, und man hat daher, weil y ſelbſt e Function von x iſt:

$$\frac{dF}{dx} + y'\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dx} + y'\frac{da}{dy}\right) = 0,$$

r blos:

$$\frac{dF}{dx} + y'\frac{dF}{dy} = 0,$$

il der für a zu ſubſtituirende Ausdruck mit x, y der Gleichung (a') Genüge ſtet. Die Ableitung y' hat folglich für den gemeinſchaftlichen Punkt der den Curven (a), (α) denſelben Werth, welche der beiden Curven man auch rachten mag, d. h. dieſe beiden Curven haben in dieſem Punkte eine gemeinaftliche Tangente, oder berühren einander.

Die Curven (a) werden die umhüllten Curven und die Curve (α) rd die Umhüllungscurve genannt, weil ſie die ſämmtlichen Curven (a) rührt oder umhüllt. Man nennt auch die Umhüllungscurve wohl die Berührungscurve, weil ſie der geometriſche Ort der Berührungspunkte je zweier ander unendlich nahe liegender umhüllter Curven iſt, oder was eben ſo viel ißt, weil der Durchſchnittspunkt zweier einander immer näher kommender umllter Linien ſich ohne Ende der Umhüllungslinie nähert, und zugleich die ngenten der beiden umhüllten Linien im Durchſchnittspunkte ſich ohne Ende ander nähern.

§. 184. Um die Begriffe an einem Beiſpiele zu fixiren, wollen wir die leichung:

$$y = ax - \frac{1+a^2}{2p}x^2 \qquad (c)$$

hmen, welche die Parabel ausdrückt, die ein ſchwerer materieller Punkt beeibt, der vom Anfangspunkte der Coordinaten aus unter einem Winkel aufärts geworfen wird, deſſen trigonometriſche Tangente = a iſt, indem die rdinaten y in verticaler Richtung von unten nach oben gemeſſen werden. *)

Wenn man den Wurfwinkel, und folglich den Parameter a ſich ſtetig ändern läßt, ſo erhält man unendlich viele Parabeln, deren Umhüllungslinie ich den obigen Formeln folgende Gleichung hat:

$$x^2 = 2p\left(\frac{p}{2} - y\right), \text{ oder } p^2 - 2py - x^2 = 0, \qquad (\gamma)$$

daß dieſe Umhüllungslinie eine andere Parabel iſt, deren Brennpunkt im nfangspunkte der Coordinaten liegt (Fig. 48).

Es kann geſchehen, daß die Umhüllungslinie (α) einen Theil der Curven a) berührt, und einen andern Theil dieſer Curven nicht. Wenn ſich z. B.

*) Traité de Mécanique par *Poisson*, T. I. p. 397.

der Mittelpunkt eines Kreiſes von veränderlichem Halbmeſſer auf der Abſciſſenaxe fortbewegt (Fig. 49), ſo daß die Abſciſſe OP des Mittelpunktes dieſes Kreiſes und ſein Halbmeſſer PM die Abſciſſe und Ordinate der Ellipſe ABA'B' ſind, deren Gleichung folgende iſt:

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1;$$

ſo iſt die gemeinſchaftliche Gleichung der in Rede ſtehenden Reihe von Kreiſen:

$$(x - a)^2 + y^2 - \frac{n^2}{m^2}(m^2 - a^2) = 0,$$

wo a die Abſciſſe des Mittelpunktes bezeichnet, und hieraus ergibt ſich für die Gleichung der Umhüllungscurve:

$$\frac{x^2}{m^2 + n^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1,$$

welche folglich eine zweite zu der erſten concentriſche Ellipſe $\alpha B \alpha' B'$ iſt, die dieſelbe Axe BB' und die Axe $\alpha\alpha' > AA'$ hat. Für alle zwiſchen $\frac{m^2}{\sqrt{m^2+n^2}}$ und m liegende Werthe von a berühren aber die einander unendlich nahe liegenden Kreiſe ſich unter ſich und auch die Umhüllungsellipſe nicht mehr, weil die Gleichungen (a), (a') geben:

$$x = \frac{a(m^2 + n^2)}{m^2}, \quad y = \pm n \sqrt{1 - \frac{(m^2+n^2)a^2}{m^4}},$$

woraus ſich für y ein imaginärer ergibt, ſobald a größer wird als $\frac{m^2}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

§. 185. Wenn eine Linie durch eine Gleichung:

$$F(x, y, a, b) = 0$$

gegeben iſt, worin zwei Parameter a, b vorkommen, ſo kann man zwiſchen a, b einen ſolchen Zuſammenhang feſtſtellen, daß die durch die ſtetige Veränderung des Parameters a erzeugten umhüllten Linien eine gegebene Linie:

$$\varphi(x, y) = 0$$

zur Umhüllungslinie haben. Da in dieſem Falle die Ableitungen von F und φ für y' denſelben Werth geben müſſen, ſo hat man, wenn man y' zwiſchen dieſen Ableitungen eliminirt:

$$\frac{dF}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dy} - \frac{dF}{dy} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

und die Elimination von x, y zwiſchen den drei vorhergehenden Gleichungen führt endlich auf die geſuchte Gleichung zwiſchen den Parametern a, b.

Es ſei z. B. die Gleichung:

$$y^2 + 2ax + b = 0$$

einer Parabel gegeben, deren Axe mit der Axe der x zuſammenfällt, und es ſei:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

die Gleichung eines Kreiſes, welcher die Berührungslinie aller durch die erſte Gleichung ausgedrückten Parabeln werden ſoll, wenn man darin a ſich ändern läßt, nachdem zwiſchen a und b ein ſchicklicher Zuſammenhang feſtgeſtellt iſt; ſo hat man, wenn man dieſe beiden Gleichungen differenzirt:

$$yy' + a = 0, \quad x + yy' = 0,$$

raus $x = a$ folgt. Substituirt man dieſen Werth von x in die Gleichung r Parabel und in die des Kreiſes, ſo erhält man:

$$y^2 + 2a^2 + b = 0, \quad y^2 + a^2 - r^2 = 0,$$

d folglich:

$$b = -(a^2 + r^2),$$

daß die Gleichung der umhüllten Linien, worin der Parameter a willkührlich ibt, folgende Form annimmt:

$$y^2 + 2ax - (a^2 + r^2) = 0.$$

§. 186. Es kann geſchehen, daß die Umhüllungslinie eine der umhüllten nien iſt, oder daß ſich die Gleichung der erſteren dadurch aus der allgemei- n Gleichung der letztern ergibt, daß man dem veränderlichen Parameter einen ſtimmten Werth beilegt. Dieſes findet ſtatt, wenn ſich der aus der Gleichung) als Function von x, y abgeleitete Werth von a vermöge der Gleichung r) der Umhüllungslinie auf einen conſtanten Werth reducirt, welcher auch $= 0$, er $= \infty$ ſein kann. Wir wollen z. B. für die Gleichung der umhüllten nien folgende nehmen:

$$(x^2 + y^2 - r^2)(x^2 - 2ax) + (y^2 - r^2)a^2 = 0,$$

ergibt ſich aus der Gleichung (a'):

$$a = \frac{x(x^2 + y^2 - r^2)}{y^2 - r^2},$$

nd wenn man dieſen Werth von a in die gegebene Gleichung ſubſtituirt, ſo hält man für die Gleichung der Umhüllungslinie:

$$\frac{x^4(x^2 + y^2 - r^2)}{y^2 - r^2} = 0.$$

ermöge dieſer Gleichung iſt der durch die vorhergehende Gleichung gegebene Werth von $a = 0$, und in der That iſt einleuchtend, daß ſich in dieſem be- ondern Falle die Gleichung der Umhüllungslinie aus der allgemeinen Gleichung r umhüllten Linien dadurch ergibt, daß man dem Parameter a den beſondern Werth Null beilegt. Aber im Allgemeinen machen die Veränderlichen x, y n aus der Gleichung (a') abgeleiteten Werth von a nicht verſchwinden, und e Umhüllungslinie gehört folglich nicht zu der Reihe der umhüllten Linien.

Hierdurch wird, wenigſtens für die Differenzialgleichungen der erſten rdnung, die Exiſtenz der ſogenannten ſinguläre n Integrale oder Auflö- ngen, wovon bereits in §. 164 die Rede geweſen iſt, gerechtfertigt. Es iſt nleuchtend, daß die Gleichung (a) das allgemeine Integral der Gleichung (b) , daß die Reihe der umhüllten Curven der Reihe der partikulären Integrale tſpricht, und daß das ſinguläre Integrale der Gleichung (b) die Gleichung r) der Umhüllungscurve iſt, welche im Allgemeinen nicht mit einer der um- illten Linien zuſammenfällt, wenn gleich ihre Gleichung auch der Gleichung) genügt, weil ſich daraus für y' ein Werth von x, y ergibt, der mit dem entiſch iſt, welcher ſich aus der Gleichung (a) ergibt, nachdem man aus die- r Gleichung den Parameter a fortgeſchafft hat.

§. 187. Die beiden Umhüllungslinien, welche man erhält, wenn man em Parameter a die beiden Werthe a, $a + \Delta a$ beilegt, haben im Allgemei- en einen Durchſchnittspunkt (§. 183), und für die Werthe von x, y, welche inem Durchſchnittspunkte angehören, iſt der aus der Gleichung (a) als Function on x, y abgeleitete Werth von a wenigſtens ein doppelter, weil jeder der

ſich in dieſem Punkte ſchneidenden umhüllten Linien ein Werth von a entſprechen muß. Aber auf der Berührungslinie ſelbſt findet kein Durchſchnitt ſtatt, woraus man ſchließen muß, daß mehrere aus der Gleichung (a) als Function von x, y abgeleiteten Werthe von a für die Werthe von x, y einander gleich werden, welche der Gleichung der Berührungslinie genügen. So gibt z. B. die Gleichung (c):

$$a = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2py - x^2}}{x},$$

und die beiden Werthe von a werden für die auf der Umhüllungslinie (γ) liegenden Punkte einander gleich. Nun iſt aber aus der Theorie der algebraiſchen Gleichungen bekannt, daß die Gleichung (a′) genau die Bedingung ausdrückt, unter welcher die als algebraiſch und in Beziehung auf die Unbekannte a als rational vorausgeſetzte Gleichung (a) gleiche Wurzeln hat.

Wenn die Gleichung (a) in Beziehung auf a aufgelöſt, und auf die Form:

$$a - f(x, y) = 0 \qquad (a)$$

gebracht iſt, ſo muß die Gleichung (a) wegen der darin vorkommenden Wurzelgrößen und deren doppelten Zeichen als vielförmig betrachtet werden, ſo daß ſie mit mehreren verſchiedenen Gleichungen:

$$a - f_1(x, y) = 0,\ a - f_2(x, y) = 0,\ \text{etc.} \qquad (a_1)$$

gleichbedeutend iſt.

So gibt z. B. die Gleichung (c) durch die Auflöſung dieſer beiden beſondern Gleichungen:

$$a = \frac{p + \sqrt{p^2 - 2py - x^2}}{x} \qquad (c_1)$$

$$a = \frac{p - \sqrt{p^2 - 2py - x^2}}{x} \qquad (c_2)$$

Die Gleichung (c_2) findet für alle Punkte der umſchloſſenen Parabel ſtatt, welche auf dem Theile mO (Fig. 48) der Curve liegen, und die Gleichung (c_1) findet für alle auf dem Stücke mn liegende Punkte ſtatt. Denn das Binom ax — p, deſſen erſtes Glied die veränderliche Ordinate der Tangente Ot ausdrückt, und deſſen zweites Glied eine dem Parameter der umſchließenden Parabel gleiche Conſtante iſt, wird offenbar negativ, wenn x verſchwindet, indem der Zahlenwerth dieſes Binomes für wachſende Werthe von x abnimmt, bis er verſchwindet, wenn x der Abſciſſe des Berührungspunktes der Umhüllungs- und der umhüllten Linie gleich wird, worauf dieſer Werth, wenn x fortwährend zunimmt, nothwendig negativ wird.

§. 188. Wenn die Gleichung (a) auf die Form (*a*) gebracht iſt, ſo reducirt ſich die Gleichung (a′) auf das abſurde Reſultat 1 = 0, welches die Gleichung der Umhüllungslinie nicht geben kann. Dieſes rührt, wie wir eben geſehen haben, daher, daß die Theile der durch eine der Gleichungen (a_1) ausgedrückten Curven keinen Durchſchnittspunkt mehr haben. Allein man muß bemerken, daß die Gleichung (a), wenn man für a ſeinen Werth $f(x, y)$ ſubſtituirt, identiſch wird, ſowohl als jede ihrer Ableitungen in Beziehung auf x und y, ſo daß man identiſch hat:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{da} \cdot \frac{df}{dx} = 0,\quad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{da} \cdot \frac{df}{dy} = 0$$

folglich:

$$\frac{df}{dx}=-\frac{dF}{dx}:\frac{dF}{da},\quad \frac{df}{dy}=-\frac{dF}{dy}:\frac{dF}{da}$$

macht aber die Relation zwiſchen x, y, welche die Gleichung der Umhül-
linie iſt, die Größe $\frac{dF}{da}$ verſchwinden, wenn die Gleichung (a) von
elgrößen befreit iſt, und folglich muß ſie die Ausdrücke $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$ unend-
machen, was ein Mittel an die Hand gibt, die Gleichung der Umhüllungs-
zu finden, ſelbſt wenn die Gleichung der umhüllten Linien in Beziehung
aufgelöſt iſt. Wenn man z. B. für f den aus der Gleichung (a) ab-
ten Werth nimmt, ſo kommt:

$$\frac{df}{dx}=\frac{\mp p^2\pm 2py-p\sqrt{p^2-2py-x^2}}{x^2\sqrt{p^2-2py-x^2}},$$

$$\frac{df}{dy}=\mp\frac{p}{x\sqrt{p^2-2py-x^2}},$$

man findet die Gleichung der Umhüllungslinie (γ) durch die Bedingung
r, daß dieſe Werthe unendlich werden.
Daſſelbe läßt ſich auch auf folgende Weiſe darthun:
Wenn man die Gleichung (a) differenzirt, indem man die Größe a ſucceſ-
als eine Conſtante und dann als eine Function der Veränderlichen x, y
chtet, ſo hat man nach §. 183:

$$\frac{dF}{dx}+y'\frac{dF}{dy}=0,$$

$$\frac{dF}{dx}+y'\frac{dF}{dy}+\frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dx}+y'\frac{da}{dy}\right)=0;$$

ch:

$$y'=-\frac{dF}{dx}:\frac{dF}{dy},$$

$$y'=-\frac{dF}{dx}:\frac{dF}{dy}-\frac{dF}{da}\left(\frac{da}{dx}+y'\frac{da}{dy}\right):\frac{dF}{dy},$$

dieſe beiden Werthe von y' ſtimmen überein, wenn man a ſo als Func-
von x, y beſtimmt, daß der einen oder der andern der beiden Gleichungen:

$$\frac{dF}{da}=0,\quad \frac{dF}{dy}=\infty$$

ige geſchieht. Wenn die Function F eine von Wurzelgrößen und Nennern
ite algebraiſche Function iſt, ſo kann die zweite dieſer Gleichungen keine
ſungen haben. Aber die verſchiedenen Transformationen, vermittelſt wel-
man die Gleichung (a) von Nennern, oder Wurzelgrößen frei macht,
n im Allgemeinen in die eine dieſer beiden Gleichungen die Auflöſungen
welche aus der andern verſchwinden. Uebrigens muß, wenn die Ableitung
unendlich wird, im Allgemeinen auch die Ableitung $\frac{dF}{dx}$ unendlich werden,
ſie ſonſt die Ableitung y' beſtändig Null wäre.

§. 189. Die Umhüllten Linien können auch gerade ſein, oder die Glei-
(a) kann in Beziehung auf die Veränderlichen x, y eine lineare Form

haben, und in dieſem Falle fällt das Syſtem der umhüllten Linien offenbar mit dem Syſteme der Tangenten der Umhüllungscurve zuſammen.

Wenn die Gleichung (a) in Beziehung auf x, y linear iſt, ſo hat ſie die Form:

$$y = x\varphi a - \varphi_1 a;$$

aber man kann die willkührliche Conſtante verändern, und $\varphi a = c$ ſetzen, wodurch die vorhergehende Gleichung die einfachere Form:

$$y = cx + \psi c$$

annimmt und die Gleichung (b) wird in dieſem Falle:

$$y = xy' + \psi y'.$$

Man kann für das Syſtem der umhüllten Linien das Syſtem der Normalen einer gegebenen Curve nehmen; aber alsdann führen die Relationen der Umhüllungscurve zu der urſprünglichen Curve auf eine ſehr wichtige Theorie, welche ein beſonderes Studium erfordert, und deren Auseinanderſetzung der Gegenſtand des folgenden Kapitels iſt.

Drittes Kapitel.

Theorie der Evoluten und der Krümmungshalbmeſſer ebener Curven. — Brennlinien. — Theorie der Berührungen der verſchiedenen Ordnungen zwiſchen ebenen Curven.

---

1. Theorie der Evoluten und der Krümmungshalbmeſſer ebener Curven.

§. 190. Wie im vorletzten Kapitel wollen wir die veränderlichen Coordinaten der Normale der Curve:

$$f(x, y) = 0 \qquad (f)$$

im Punkte (x, y) mit ξ, η bezeichnen, indem ſie wieder zu den Coordinaten x, y parallel ſind und von demſelben Anfangspunkte aus gezählt werden, ſo iſt die Gleichung der Normale:

$$\xi - x + (\eta - y)\, y' = 0. \qquad (1)$$

Wenn man in dieſe Gleichung die aus der Gleichung (f) abgeleiteten Werthe von y, y' als Functionen von x ſubſtituirte, ſo nähme ſie folgende Form an:

$$F(\xi, \eta, x) = 0, \qquad (2)$$

indem ſie in Beziehung auf die Veränderlichen ξ, η linear bliebe, und man könnte darin x als den veränderlichen Parameter betrachten, deſſen Werth jede der geraden Normalen beſtimmt, deren Umhüllungslinie geſucht wird. Die Gleichung dieſer Umhüllungslinie:

$$\varphi(\xi, \eta) = 0 \qquad (\varphi)$$

ergäbe ſich aus der Elimination von x zwiſchen der Gleichung (2) und ihrer Ableitung in Beziehung auf x, nämlich:

$$\frac{dF}{dx} = 0.$$

n aber dieſe Subſtitution bewerkſtelligen zu können, müßte man die Function particulariſiren, und da es für den Augenblick im Gegentheil darauf ankommt, Reſultate unabhängig von der Form dieſer Function auszudrücken, ſo wollen r unmittelbar mit der Gleichung (1) operiren, indem wir ſie in Beziehung f x differenziren, und dabei y, y' als implicite Functionen von x betrachten, möge der Gleichung (f).

Dieſe Rechnung gibt:

$$-(1+y'^2)+(\eta-y)\,y''=0, \qquad (3)$$

raus folgt:

$$\eta-y=\frac{1+y'^2}{y''},\quad \xi-x=-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},$$

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

In dieſen Formeln bezeichnen ξ, η die Coordinaten des Durchſchnittspunk- der Normale im Punkte (x, y) mit einer unendlich nahe liegenden Normale . 183) oder die Coordinaten des Punktes, worin die Normale im Punkte , y) die Umhüllungscurve (φ) berührt. Wenn man folglich die Entfernung s Punktes (x, y) von dem erwähnten Punkte (ξ, η) mit ρ bezeichnet, ſo ρ eine Function der unabhängigen Veränderlichen x, welche durch die Formel:

$$\rho^2=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}$$

er:

$$\rho=\pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\pm\left(\frac{ds}{dx}\right)^3:y'' \qquad (\rho)$$

geben wird, wo der Werth von ρ, wie alle nicht zu den Coordinatenaxen rallel gezählten Längen, mit dem doppelten Zeichen $\pm$ behaftet iſt. Wenn an die Wurzelgröße:

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{ds}{dx},$$

ſitiv nimmt, oder den Bogen s mit der Abſciſſe x zugleich wachſen läßt, ſo t ρ daſſelbe Zeichen, als y'' und ändert in allen Fällen das Zeichen mit y''.

§. 191. Da die Normale der Curve (f) im Punkte (x, y) die Umhüllungslinie (ϱ) im Punkte (ξ, η) berührt, ſo hat man, wenn λ den Winkel zeichnet, welchen dieſe Normale auf der Seite der poſitiven Abſciſſen mit der te der x bildet:

$$\text{tang.}\,\lambda=\frac{d\eta}{d\xi},\quad\text{oder}\quad\frac{d\xi}{dx}\sin.\lambda-\frac{d\eta}{dx}\cos.\lambda=0. \qquad (4)$$

rner gibt die Gleichung:

$$\rho^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2,$$

nn man ſie in Beziehung auf die unabhängige Veränderliche x differenzirt:

$$\rho\frac{d\rho}{dx}=(\xi-x)\left(\frac{d\xi}{dx}-1\right)+(\eta-y)\left(\frac{d\eta}{dx}-y'\right),$$

der wegen der Gleichung (1) einfacher:

$$\rho\frac{d\rho}{dx}=(\xi-x)\frac{d\xi}{dx}+(\eta-y)\frac{d\eta}{dx}.$$

Wenn man für $\xi - x$, $\eta - y$ ihre Werthe $\varrho \cos. \lambda$, $\varrho \sin. \lambda$ ſubſtituirt, ſo erhält man:

$$\frac{d\varrho}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \cos.\lambda + \frac{d\eta}{dx} \sin.\lambda, \qquad (5)$$

und wenn man beide Theile der Gleichungen (4), (5) zum Quadrate erhebt, und die Reſultate zuſammen addirt, ſo findet man endlich:

$$\frac{d\varrho^2}{dx^2} = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{dx^2}.$$

Wenn man die Länge des zwiſchen dem feſten Punkte auf der Curve und dem beweglichen Punkte (ξ, η) liegenden Bogens der Curve (φ) mit σ bezeichnet, ſo hat man (§. 174):

$$\frac{d\sigma}{dx} = \pm \frac{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}}{dx},$$

und folglich:

$$\frac{d\varrho}{dx} = \pm \frac{d\sigma}{dx}.$$

Wenn man alſo zwei Syſteme correſpondirender Werthe:

$$x_0, \varrho_0, \sigma_0; \; x_1, \varrho_1, \sigma_1$$

betrachtet und annimmt, daß die Ableitungen $\frac{d\varrho}{dx}$, $\frac{d\sigma}{dx}$ in dem Intervalle $x_1 - x_0$ daſſelbe Zeichen behalten, ohne unendlich zu werden; ſo ſind die Zahlenwerthe der Differenzen $\varrho_1 - \varrho_0$, $\sigma_1 - \sigma_0$ einander gleich, und haben gleiche, oder verſchiedene Zeichen, je nachdem die Größen ϱ, σ gleichzeitig zu- oder abnehmen, oder die eine zu- und die andere abnimmt.

§. 192. Es ſei $mm_1 m_2 m_3 \ldots$. (Fig. 50) die gegebene Curve, zu welcher die ſich auf der Ebene der xy bewegende gerade Linie ſtets normal bleiben muß, und $\mu\mu_1 \mu_2 \mu_3 \ldots$. ſei der geometriſche Ort zweier einander unendlich nahe liegender Normalen, oder die Curve, welche von der beweglichen geraden Linie fortwährend berührt wird, ſo folgt aus dem eben Bewieſenen, daß die erſte Curve durch eine ſtetige Bewegung des Endpunktes eines auf die zweite Curve gewickelten vollkommen biegſamen und ausdehnbaren Fadens beſchrieben werden kann, wenn dieſer Faden, indem er immer geſpannt bleibt, von der Curve abgewickelt wird; denn auf dieſe Weiſe bliebe die Differenz der Längen $m\mu$, $m_1\mu_1$ ſtets der Länge des Bogens $\mu\mu_1$ gleich, und der geradlinige Theil des Fadens, deſſen Endpunkt die Curve $mm_1m_2 \ldots$. beſchrieben, würde an ſeinem andern Ende die Curve $\mu\mu_1\mu_2 \ldots$. berühren.

Aus dieſem Grunde hat Huygens, der Erfinder dieſer Theorie, die Curve (φ) die Evolute der Curve (f) und dieſe die Evolvente der Curve (φ) genannt. Eine ebene Curve hat immer eine in ihrer Ebene liegende Evolute, und kann nur eine einzige haben; aber ſie hat unendlich viele Evolventen, weil bei der Abwickelung des über die Evolute gelegten Fadens jeder Punkt des geradlinigen Theiles dieſes Fadens, welchen man ſich unbeſtimmt verlängert denken kann, eine beſondere Curve beſchreibt.

Die Beſchreibung der ebenen Curven durch ihre Evoluten hat eine große Aehnlichkeit mit der Beſchreibung des Kreiſes. Für den Kreis, deſſen Gleichung folgende iſt:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

findet man:

$$\rho^2 = r^2,\ \xi = \alpha,\ \eta = \beta,$$

daß ſich die Evolute des Kreiſes auf ſeinen Mittelpunkt reducirt. Umgekehrt, der Beſchreibung einer beliebigen Curve vermittelſt ihrer Evolute ſpielt jeder nkt der Evolute ſucceſſive die Rolle eines Mittelpunktes, und der Halbmeſſer ibt nicht conſtant, ſondern ändert ſich von einem Punkte der beſchriebenen rve zum andern. Dieſe Beſchreibung wird uns ſogleich zu einer andern ſicht über die zwiſchen den Curven und ihren Evoluten ſtattfindende gegen- tige Abhängigkeit führen.

§. 193. Um uns von der Krümmung einer ebenen Linie in jedem ihrer nkte einen genauen Begriff zu bilden, wollen wir uns vorſtellen, daß man n Punkte m (Fig. 51) aus einen Bogen $mm_1 = \Delta s$ genommen, und dann den Punkten m, m_1 die Tangenten mt, $m_1 t$ und die Normalen mn, mn_1 ogen habe. Es bezeichne $\Delta\tau$ den Winkel, welchen dieſe Normalen mit ander bilden, oder den äußern von den beiden correſpondirenden Tangenten bildeten Winkel, ſo nimmt das Verhältniß:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s} \qquad (\varepsilon)$$

öße're oder kleinere Werthe an, je nachdem die betrachtete Curve mehr oder eniger krumm iſt, oder ſich in der Nähe des Punktes m mehr oder weniger n der Tangente mt entfernt, wenn vorausgeſetzt wird, daß der Curvenbogen der unmittelbaren Nähe des betrachteten Punktes keine Biegungen darbietet, ndern in ſeiner ganzen Ausdehnung ſeine Convexität immer nach demſelben inne kehrt, was man für jede ſtetige Curve erhalten kann, wenn man den ogen Δs hinreichend klein nimmt. Wenn die Curve ein Kreis wäre, deſſen rümmung offenbar in allen Punkten dieſelbe iſt, ſo wäre das Verhältniß (ε) wohl von der Länge des Bogens Δs, als von der Lage des Punktes m auf r Curve unabhängig, und ſein Werth wäre $= \frac{1}{r}$, wo r den Halbmeſſer s Kreiſes bezeichnet. Man kann alſo das Verhältniß $\frac{1}{r}$ als das Maaß er Krümmung des Kreiſes von dem Halbmeſſer r nehmen.

Für eine beliebige Curve mm_1 ändert ſich das Verhältniß (ε) nicht blos it der Lage des Punktes m, ſondern auch mit der Länge des Bogens Δs. Wenn jedoch die Größen Δs, $\Delta\tau$ beide immer kleiner und kleiner werden, ſo nvergirt das Verhältniß (ε), vorausgeſetzt, daß keine Stetigkeitsunterbrechung atifindet, gegen eine beſtimmte Grenze:

$$\frac{d\tau}{ds},$$

elche man nach der Analogie als Maaß der Krümmung der Linie im unkte m betrachten muß (§. 30 u. 38), ſo daß auf dieſe Weiſe die Krüm- mung jeder Curve und in jedem ihrer Punkte eine mathematiſch beſtimmte röße wird.

Wenn aber der Bogen mm_1 unendlich klein wird, ſo iſt der Punkt n der eiter oben beſtimmte Punkt (ξ, η), und da die Normalen mn, $m_1 n$ nur noch m eine unendlich kleine Größe von einander verſchieden ſind, ſo hat man bis uf unendlich kleine Größen der zweiten Ordnung $ds = \rho\, d\tau$, oder nach er Formel (ρ):

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\rho} = \pm\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Der unendlich kleine Winkel $d\tau$ wird der Contingenzwinkel genannt.

Ferner hat man unmittelbar, ohne daß man zu der Formel (ϱ) oder den Rechnungen, welche zu ihrer Ableitung gedient haben, zu recurriren braucht:

$$d\tau = \pm d \cdot \text{arc. tang. } y' = \pm \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}} \cdot dx,$$

$$ds = \pm \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx,$$

folglich:

$$\frac{d\tau}{ds} = \pm \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Das Verhältniß $\frac{1}{\varrho}$ iſt folglich das Maaß der Krümmung einer Curve im Punkte (x, y); der Punkt (ξ, η) wird der Krümmungsmittelpunkt genannt und iſt der Mittelpunkt des mit dem Halbmeſſer ϱ beſchriebenen Kreiſes, welcher im Punkte (x, y) dieſelbe Krümmung, als die gegebene Curve hat. Die Evolute iſt der geometriſche Ort aller Krümmungsmittelpunkte der Evolvente.

§. 194. Der Werth oder die Größe der Krümmung, welcher immer der umgekehrte Werth des Krümmungshalbmeſſers iſt, ändert ſich in jedem Punkte der Curve zu beiden Seiten des Punktes (x, y). Im Allgemeinen nimmt derſelbe in dem einen Sinne zu und in dem andern ab. Der aus dem Punkte (ξ, η) als Mittelpunkt mit dem Halbmeſſer ϱ beſchriebene Kreis muß folglich innerhalb der Curve auf der Seite des Punktes (x, y) liegen, wo die Krümmung abnimmt, und außerhalb der Curve auf der Seite dieſes Punktes, wo ſie zunimmt. Dieſer Kreis ſchneidet und berührt alſo die Curve zu gleicher Zeit im Punkte (x, y), ſo daß die Tangente der Curve auch Tangente des Kreiſes iſt, deſſen Mittelpunkt (ξ, η) auf der Normale liegt.

Jeder Kreis dagegen, welcher die Curve in demſelben Punkte berührt aber mit einem größern, oder kleinern Halbmeſſer als ϱ beſchrieben iſt, liegt aus demſelben Grunde zu beiden Seiten des Berührungspunktes außerhalb oder innerhalb der Curve.

Außerdem iſt nach der geometriſchen Conſtruction, welche uns zur Definition der Krümmung geführt hat, einleuchtend, daß ſich der Kreis, welcher im Punkte (x, y) mit der Curve einerlei Krümmung hat, in der unmittelbaren Nähe dieſes Punktes weniger von ihr entfernt, als jeder andere mit einem größern, oder kleinern Halbmeſſer beſchriebene Berührungskreis. Huyghens hat daher dieſen Berührungskreis, welcher den Krümmungsmittelpunkt zum Mittelpunkte hat, den Osculations- oder Krümmungskreis genannt. Derſelbe liegt an der gemeinſchaftlichen Grenze der Kreiſe, welche die Curve innerhalb zu beiden Seiten des Berührungspunktes (x, y) und der, welche ſie außerhalb zu beiden Seiten deſſelben Punktes berühren. Es gibt jedoch Fälle, wo der Krümmungskreis die Curve nicht mehr ſchneidet, nämlich wenn der Krümmungshalbmeſſer im Punkte (x, y) durch ein Maximum, oder Minimum geht, und alsdann muß der Krümmungskreis aus demſelben Grunde in dem Falle des Maximums die Curve außerhalb zu beiden Seiten des Punktes (x, y) und in dem Falle des Minimums innerhalb zu beiden Seiten dieſes Punktes berühren. In der Ellipſe z. B. zeigt ſchon die Symmetrie der Figur, daß der Krümmungshalbmeſſer in den Endpunkten der großen Axe ein Minimum und in denen der kleinen Axe ein Maximum iſt. Im Allgemeinen hat der Krümmungshalbmeſſer in einer geſchloſſenen Curve ohne Rückkehr, oder Wendepunkte wenigſtens ein Maximum oder ein Minimum, und überhaupt ſo viele Maxima, als Minima.

§. 195. Alle in dem letzten Paragraphen angeführten Resultate sind aus n geometrischen Betrachtungen abgeleitet, und man kann sie leicht, wenn es ordert wird, rein analytisch erhalten. Zur Vereinfachung der Rechnungen llen wir die Function:

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2,$$

er das Quadrat der Entfernung des Punktes (ξ, η) von dem Punkte (x, y) f der Curve mit u bezeichnen, so daß, wenn der erste Punkt fest bleibt, u s eine Function der unabhängigen Veränderlichen x ist. Wenn folglich die ntfernung des Punktes (ξ, η) von dem Punkte (x, y) unter allen geraden nien, welche man von dem ersten Punkte nach den benachbarten Punkten des eiten auf der Curve ziehen kann, ein Maximum, oder Minimum werden ll, so muß man haben:

$$-\frac{du}{dx} = \xi - x + (\eta - y)\, y' = 0, \qquad (1)$$

h. der Punkt (ξ, η) muß auf der Normale der Curve im Punkte (x, y) liegen. Es findet ein Maximum, oder Minimum statt, je nachdem:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 1 + y'^2 - (\eta - y)\, y'' < \text{oder} > 0$$

l. Der ersten Ungleichheit würde nicht genügt werden können, wenn die Factoren $\eta - y$, y'' entgegengesetzte Zeichen haben, oder wenn die Curve nd der Berührungskreis ihre Converität nach entgegengesetztem Sinne kehren. Wir wollen daher annehmen, daß diese Factoren einerlei Zeichen haben, oder aß die Curve und der Berührungskreis ihre Converität nach derselben Seite er Tangente kehren; so liegt der Berührungskreis in der Nähe des Punktes x, y) zu beiden Seiten außerhalb, oder innerhalb der Curve, jenachdem die rste, oder die zweite Ungleichheit erfüllt wird. Aber es findet weder ein Maximum, noch ein Minimum statt, wenn man außer der Gleichung (1) och die folgende hat:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = -(1 + y'^2) + (\eta - y)\, y'' = 0, \qquad (3)$$

. h. (nach der Identität der Gleichungen (1), (2) mit denen, welche wir eiter oben durch dieselben Zahlen bezeichnet haben), wenn der Punkt (ξ, η) er Mittelpunkt des Krümmungskreises ist. Dieser Kreis schneidet und berührt lso die Curve zu gleicher Zeit, und er liegt außerhalb, oder innerhalb der urve auf der Seite der zunehmenden x, jenachdem man hat:

$$\frac{d^3u}{dx^3} = 3yy'' - (\eta - y)\, y''' < \text{oder} < 0.$$

Der Krümmungskreis liegt endlich wieder zu beiden Seiten des Berührungsunktes außerhalb, oder innerhalb der Curve, wenn man hat:

$$\frac{d^3u}{dx^3} = 3\, yy'' - (\eta - y)\, y''' = 0,$$

oder wenn man den aus der Gleichung (3) abgeleiteten Werth von $\eta - y$ ubstituirt:

$$3y'y''^2 - (1 + y'^2)\, y''' = 0. \qquad (6)$$

Aber wenn man die Gleichung (ϱ) differenzirt, so findet man:

$$\frac{d\varrho}{dx} = \pm\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y''^2}\left(3y'y''^2 - (1 + y'^2)\, y'''\right),$$

und folglich drückt die Gleichung (6) die Bedingung aus, daß der Krümmungshalbmeſſer durch ein Maximum, oder Minimum geht.

§. 196. Wenn man x nicht als unabhängige Veränderliche betrachten will, ſo nimmt der Ausdruck des Krümmungshalbmeſſers folgende ſymmetriſche Form an:

$$\varrho = \pm \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x} = \pm \frac{ds^3}{dxd^2y - dyd^2x}. \qquad (\varrho_1)$$

Nun gibt aber die Gleichung:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

durch Differenzirung:

$$d^2s = \frac{dxd^2x + dyd^2y}{ds}, \qquad (7)$$

woraus folgt:

$$d^2s^2 = \frac{(dxd^2x + dyd^2y)^2}{ds^2} = \frac{(d^2x^2 + d^2y^2)(dx^2 + dy^2) - (dxd^2y - dyd^2x)^2}{ds^2}$$

$$= d^2x^2 + d^2y^2 - \frac{(dxd^2y - dyd^2x)^2}{ds^2}, \qquad (8)$$

und mithin iſt:

$$\frac{dxd^2y - dyd^2x}{ds} = \sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 - d^2s^2},$$

$$\varrho = \pm \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 - d^2s^2}}. \qquad (\varrho_2)$$

Die Gleichung (8) läßt ſich auch auf folgende Form bringen:

$$(dxd^2y - dyd^2x)^2 = (d^2x^2 + d^2y^2)\,ds^2 - (dx^2 + dy^2)\,d^2s^2,$$

welche vermöge der Gleichung (7) übergeht in:

$$(dxd^2y - dyd^2x)^2 = (dsd^2x - dxd^2s)^2 + (dsd^2y - dyd^2s)^2$$

$$= ds^4 \left\{ \left(d \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2 \right\},$$

und hieraus folgt:

$$\varrho = \pm \frac{ds}{\sqrt{\left(d \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2}}. \qquad (\varrho_3)$$

Außerdem hat man nach §. 193:

$$ds = \varrho d\tau,$$

wo $d\tau$ den Winkel zweier unendlich nahe liegender Tangenten oder den Contingenzwinkel bezeichnet. Man hat folglich:

$$d\tau = \pm \sqrt{\left(d \cdot \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds}\right)^2}. \qquad (\tau)$$

Die Formeln (ϱ_2), (ϱ_3) und (τ) werden in der Mechanik häufig angewandt.

Ferner hat man, wenn man Polarcoordinaten anwendet (§. 179) und den Winkel φ zur unabhängigen Veränderlichen nimmt:

$$dx = dr \cos.\varphi - r \sin.\varphi\, d\varphi,$$
$$dy = dr \sin.\varphi - r \cos.\varphi\, d\varphi,$$
$$d^2x = d^2r \cos.\varphi - 2 \sin.\varphi\, dr d\varphi - r \cos.\varphi d\varphi^2,$$
$$d^2y = d^2r \sin.\varphi + 2 \cos.\varphi\, dr d\varphi - r \sin.\varphi d\varphi^2,$$

o wenn man dieſe Werthe in den Ausdruck des Krümmungshalbmeſſers ſubirt, ſo erhält man:

$$\varrho = \pm \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\varphi^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\varphi^2} - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}. \qquad (\varrho_4)$$

§. 197. **Beiſpiel 1.** Es ſei die Gleichung der Ellipſe:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

geben, ſo findet man:

$$\xi = x^3 \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^4},\ \eta = y^3 \cdot \frac{b^2 - a^2}{a^4},\ \varrho = \pm \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4},$$

ıd als Gleichung der Evolute zwiſchen ξ, η erhält man:

$$\left(\frac{a\xi}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\eta}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

er von Wurzelgrößen befreit:

$$\left[1 - \frac{a^2\xi^2}{(a^2 - b^2)^2} - \frac{b^2\eta^2}{(a^2 - b^2)^2}\right]^3 = 27\,\frac{a^2b^2\xi^2\eta^2}{(a^2 - b^2)^4}.$$

ieſe Evolute (Fig. 52) hat vier Rückkehrpunkte, welche den Endpunkten der ren der Ellipſe (§. 194) entſprechen.

Dieſelbe Rechnung gibt die Evolute der Hyperbel, wenn man blos $b\sqrt{-1}$ r b ſetzt.

Beiſpiel 2. Für die Parabel $y^2 = 2px$ hat man:

$$\xi = p + 3x,\ \eta = \frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}},\ \varrho = \pm \frac{(p + 2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}},$$

ıd die Gleichung der Evolute wird:

$$\eta^2 = \frac{8}{27} \cdot \frac{(\xi - p)^3}{p}.$$

ieſe Evolute (Fig. 53) iſt eine paraboliſche Curve, d. h. eine Curve, deren leichung auf die Form:

$$y^n = kx^m$$

bracht werden kann, wo m und n ganz poſitive Zahlen ſind. Man nennt die Neil'ſchen Parabel, weil dieſer Geometer ſie zuerſt mit unterſucht, und ter andern die merkwürdige Eigenſchaft derſelben gefunden hat, daß ſie rectificabel iſt, d. h. daß ſich der Bogen s dieſer Curve durch eine algebraiſche Function der Abſciſſe x ausdrücken läßt, auf welchen Gegenſtand ir bei der Rectification der Curven oder bei der Beſtimmung des Bogens s s Function von x zurückkommen werden.

§. 198. **Beiſpiel 3.** Für die Cycloide (§. 176):

$$x = R \text{ arc. cos. } \frac{R - y}{R} \pm \sqrt{2Ry - y^2}$$

haben wir in §. 177 gefunden:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{2R - y}{y}},$$

woraus folgt:

$$y'' = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{R}{y^2}, \quad \varrho = \pm 2\sqrt{2Ry},$$

und aus der Vergleichung dieser Formel mit der Gleichung (h') des angeführten §. folgt, daß der Krümmungshalbmesser das Doppelte der Normale ist.

Wir wollen hier noch eine sehr merkwürdige Eigenschaft der Cycloide beweisen, nämlich die: daß ihre Evolute ebenfalls eine Cycloide von denselben Dimensionen ist, welche unter der Evolvente liegt (Fig. 54).

Zu dem Zwecke wollen wir zu XX' in einer dem Halbmesser des erzeugenden Kreises der gegebenen Cycloide (Evolvente) Omq gleichen Entfernung eine unbegrenzte Parallele ziehen. Von diesem Kreise nmn' wollen wir den symmetrisch liegenden Kreis nμν construiren, so ist der Durchschnittspunkt μ dieses Kreises mit der verlängerten geraden Linie mn nach dem vorhin Bewiesenen der Krümmungsmittelpunkt der Evolvente. Die Länge On ist dem Bogen mn und die Länge Os dem halben Umfange des Erzeugungskreises gleich. Folglich hat der Bogen mn, oder der ihm gleiche Bogen μν, dieselbe Länge, als die gerade Linie sn, oder als die Parallele ov. Wenn also der Kreis nμν auf der geraden Linie ξξ' fortrollt, so beschreibt der Punkt des Kreisumfanges, welcher diese feste gerade Linie im Punkte o berührt, die Evolute der Cycloide, welche durch das Fortrollen des Kreises nmn' auf der geraden Linie erzeugt wird.

Diese Construction zeigt, daß der Krümmungshalbmesser der Evolvente in dem Rückkehrpunkte O gleich Null ist, und im Scheitel = oq, oder gleich dem doppelten Durchmesser des Erzeugungskreises. Aber oq ist auch dem halben Bogen der Evolute gleich, welche mit der Evolvente identisch ist, und folglich ist die Länge eines ganzen Cycloidenbogens dem vierfachen Durchmesser des Erzeugungskreises gleich.

Die in diesem §. angeführten Eigenschaften der Cycloide sind von Huyghens bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die Anwendung des Pendels auf Uhren entdeckt, und haben diesen eminenten Geist theils auf die geometrische Theorie der Evoluten und der Krümmungshalbmesser und theils auf andere in der rationellen Mechanik höchst wichtige Lehrsätze geführt; und die Geschichte der mathematischen Wissenschaften bietet fast kein anderes Beispiel so merkwürdiger Beziehungen dar.

§. 199. Beispiel 4. Als letztes Beispiel wollen wir die logarithmische Spirale:

$$r = e^{m\varphi}$$

nehmen (§. 181), so gibt die Formel (ϱ_4) für den Zahlenwerth des Krümmungshalbmessers:

$$\varrho = r\sqrt{1 + m^2}.$$

Aber da wir wissen, daß in dieser Curve die Normale mit dem Radiusvector einen constanten Winkel α bildet, dessen trigonometrische Tangente = — m ist, so ist $r = \varrho \cos. \alpha$, und folglich ist der Krümmungsmittelpunkt der Durchschnittspunkt der Normale mit dem im Anfangspunkte auf dem Radiusvector errichteten Perpendikel.

Die Tangente der Evolute, welche nichts anders ist, als die Normale der olvente, bildet folglich mit dem Radiusvector der Evolute einen constanten inkel, welcher dem von der Tangente und dem Radiusvector der Evolvente ildeten Winkel gleich ist. Die Evolute ist also dieselbe Curve, als die olvente und auf denselben Fall bezogen, so daß die zweite Curve mit der ien zusammenfallen würde, wenn sie sich um einen entsprechenden Winkel i den gemeinschaftlichen Pol drehte.

2. Brennlinien.

§. 200. Die Theorie der Umhüllungslinien, auf den Fall beschränkt, wo e umhüllten Linien gerade sind, bietet noch eine merkwürdige Anwendung r, welche sich zu natürlich an die Theorie der Evolute anschließt, als daß r sie hier ganz mit Stillschweigen übergehen könnten. Man kann nämlich nehmen, daß die umhüllten geraden Linien, statt auf der gegebenen Curve N (Fig. 55) normal zu bleiben, vielmehr mit den Normalen mn einen inkel rmn von solcher Beschaffenheit bilden, daß man die Gleichung hat:

$$\sin. rmn = k \sin. Fmn',$$

) k eine gegebene Constante und F ein in der Ebene der Curve der Lage ch gegebener Punkt ist. Die Optik lehrt, daß, wenn MN der Durchschnitt ier cylindrischen Fläche ist, welche zwei verschieden brechende Mittel von ander trennt und deren Erzeugungslinien auf der Ebene der Curve senkrecht id, die von dem leuchtenden Punkte F nach Fm ausgehenden Lichtstrahlen ch mr gebrochen werden, wo k den Brechungsinder bezeichnet, welcher sich f den Uebergang des Lichtes aus dem einen Mittel in das andere bezieht. ie Umhüllungslinie aller der geraden Linien mr, wenn sie sich auf dem Wege s Lichtes befindet, kann sich auf der Ebene der Curve abbilden, weil die he an der Umhüllungslinie liegenden Punkte, worin die Lichtstrahlen fast parallel auffallen, mehr Licht erhalten, als die übrigen Punkte der Ebene. Man nnt diese Umhüllungslinie daher Brennlinie durch Brechung. Wenn e Constante k = 0 würde, so fiele die Brennlinie mit der Evolute zusamen. Wenn man k = — 1 setzte, so ginge die Brechung in Zurückwerfung er, und die Umhüllungscurve würde eine Brennlinie durch Zurückwerung genannt. Die Brennlinien ändern sich bei derselben Curve MN und mselben Werthe der Constante k mit der Lage des Punktes F. Wenn sich eser Punkt in's Unendliche entfernte, oder wenn die einfallenden Lichtstrahlen rallel würden; so erhielte man Curven, welche man Hauptbrennlinien nnen könnte.

Es seien α, β die zu den Axen der x und der y parallelen Coordinaten s Punktes F; ξ, η die Coordinaten irgend eines Punktes des in m gebroenen Lichtstrahles, x, y die Coordinaten des auf der brechenden Curve:

$$f(x, y) = 0 \qquad (f)$$

egenden Einfallspunktes m und λ, λ' seien die Winkel, welche der einfallende id der gebrochene Lichtstrahl resp. mit der Halbare der positiven x bilden; so erden die Cosinus der Winkel, welche dieselben Lichtstrahlen mit der Tangente er Curve bilden, resp. ausgedrückt durch:

$$\cos.\lambda \frac{dx}{ds} + \sin.\lambda \frac{dy}{ds}, \quad \cos.\lambda' \frac{dx}{ds} + \sin.\lambda' \frac{dy}{ds}.$$

ber diese Cosinus werden auch resp. ausgedrückt durch:

$$\pm \sin. Fmn', \quad \pm \sin. rmn,$$

nd folglich hat man:

$$\cos.\lambda' dx + \sin.\lambda' dy = k\,(\cos.\lambda dx + \sin.\lambda dy). \qquad (9)$$

Wir wollen der Kürze wegen ſetzen:

$$\varrho = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2},\quad \varrho' = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2},$$

ſo kommt:

$$\cos.\lambda = \frac{x-\alpha}{\varrho},\ \sin.\lambda = \frac{y-\beta}{\varrho};\ \cos.\lambda' = \frac{\xi - x}{\varrho'},\ \sin.\lambda' = \frac{\eta - y}{\varrho'},$$

und folglich iſt:

$$\frac{\xi - x + (\eta - y)y'}{\varrho'} + k\cdot\frac{\alpha - x + (\beta - y)y'}{\varrho'} = 0. \qquad (10)$$

Dieſes iſt die Gleichung des gebrochenen Strahles zwiſchen ξ, η oder der umhüllten geraden Linie, welche dem Punkte (x, y) auf der brechenden Curve (f) entſpricht. Wenn man dieſe Gleichung in Beziehung auf x differenzirt, indem man y, y' als implicite Functionen von x betrachtet, und dann x, y, y', y'' zwiſchen der Gleichung (10) und ihrer Ableitung, ſowie zwiſchen der Gleichung (f) und ihren Ableitungen der beiden erſten Ordnungen eliminirt; ſo erhält man die Gleichung der Umhüllungscurve oder der Brennlinie zwiſchen ξ, η.

§. 201. Wenn man in der Gleichung (10) die Coordinaten ξ, η als gegebene Conſtanten betrachtet, ſo nimmt ſie folgende Form an:

$$\frac{d(\varrho' + k\varrho)}{dx} = 0,$$

und drückt aus, daß die Function $\varrho' + k\varrho$ ein Maximum, oder Minimum wird, ſo daß man, wenn man nach irgend einem andern von m verſchiedenen Punkte der Curve die geraden Linien Fm, rm_1 zieht, beſtändig hat:

$$rm_1 + k\cdot Fm_1 > \text{oder} < rm + k\cdot Fm.$$

Der erſte Theil dieſer Ungleichheit geſtattet aber offenbar kein Maximum, und folglich zeigt die Gleichung (10) ein Minimum an.

Wenn man dagegen ξ, η als die veränderlichen Coordinaten der Umhüllungslinie betrachtet, woran jede umhüllte gerade Linie Tangente iſt, ſo hat man nach der Definition des Winkels λ':

$$\text{tang.}\,\lambda' = \frac{d\eta}{d\xi},\quad \text{oder}\quad \frac{d\xi}{dx}\sin.\lambda' - \frac{d\eta}{dx}\cos.\lambda' = 0. \qquad (11)$$

Wenn man ferner die Gleichungen:

$$\varrho^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2,\ \varrho'^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2,$$

in Beziehung auf die unabhängige Veränderliche x differenzirt und in das Reſultat für $x-\alpha$, $y-\beta$, $\xi - x$, $\eta - y$ ihre reſp. Werthe $\varrho\cos.\lambda$, $\varrho\sin.\lambda$, $\varrho'\cos.\lambda'$, $\varrho'\sin.\lambda'$ ſubſtituirt, ſo kommt:

$$\frac{d\varrho}{dx} = \cos.\lambda + y'\sin.\lambda,$$

$$\frac{d\varrho'}{dx} = \left(\frac{d\xi}{dx} - 1\right)\cos.\lambda' + \left(\frac{d\eta}{dx} - y'\right)\sin.\lambda',$$

woraus vermöge der Gleichung (9) folgt:

$$\frac{d\varrho'}{dx} + k\frac{d\varrho}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\cos.\lambda' + \frac{d\eta}{dx}\sin.\lambda'. \qquad (12)$$

Wenn man die beiden Theile der Gleichungen (11), (12) zum Quadrate erhebt, ſie dann zuſammen addirt und das Differenzial des Bogens der Brennlinie mit $d\sigma$ bezeichnet, ſo erhält man die Formel:

$$\frac{d\sigma^2}{dx^2} = \left(\frac{d\varrho'}{dx} + k\frac{d\varrho}{dx}\right)^2 \text{ oder } \frac{d\sigma}{dx} = \pm\left(\frac{d\varrho'}{dx} + k\frac{d\varrho}{dx}\right),$$

elche der im §. 191 für die Evoluten gefundenen analog ist, und woraus folgt:

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \pm[\varrho'_1 - \varrho'_0 + k(\varrho_1 - \varrho_0)],$$

o σ_0, ϱ_0, ϱ'_0; σ_1, ϱ_1, ϱ'_1 zwei Systeme von Werthen der Größen σ, , ϱ' für Punkte bezeichnen, welche einander auf der brechenden Curve und if der Brennlinie entsprechen.

§. 202. Um von diesen Formeln eine Anwendung zu geben, wollen wir mehmen, daß die brechende Linie eine gerade sei, welche wir zu der Axe r x nehmen wollen, und der strahlende Punkt liege auf der Axe der y, so ird die Gleichung (10):

$$(\xi - x)\cdot\sqrt{x^2+\beta^2} = -kx\cdot\sqrt{(\xi-x)^2+\eta^2},$$

oraus folgt:

$$\frac{\xi - x}{x}\cdot\sqrt{\beta^2+(1-k^2)x^2} = \pm k\eta. \qquad (13)$$

Die Gleichung zwischen ξ, η muß sich aus der Elimination von x zwi- jen dieser letzten Gleichung und ihrer Ableitung in Beziehung auf x nämlich:

$$\xi\beta^2 + (1-k^2)x^3 = 0 \qquad (14)$$

id woraus folgt:

$$(\xi - x)\beta^2 = -x[\beta^2 + (1-k^2)x^2], \qquad (15)$$

geben.

Aus der Vergleichung der Gleichungen (13) und (15) ergibt sich:

$$[\beta^2 + (1-k^2)x^2]^{\frac{1}{2}} = \mp k\beta^2\eta,$$

er:

$$\beta^2 + (1-k^2)x^2 = (k\beta^2\eta)^{\frac{1}{2}}, \qquad (16)$$

d wenn man nun x zwischen den Gleichungen (14) und (16) eliminirt, so hält man:

$$\beta^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{1-k^2}\cdot\xi)^{\frac{1}{2}} = (k\eta)^{\frac{1}{2}}$$

er die Gleichung der Evolute eines Kegelschnittes, dessen Mittelpunkt der ıfangspunkt und dessen Brennpunkt der strahlende Punkt ist.

3. Theorie der Berührungen der verschiedenen Ordnungen zwischen ebenen Curven.

§. 203. Es seien:

$$y = fx \ldots\ldots (f), \quad y = \varphi x \ldots\ldots \qquad (\varphi)$$

Gleichungen zweier Curven, welche einen gemeinschaftlichen Punkt (x, y) ben, so daß die Bedingungsgleichung:

$$fx = \varphi x \qquad (m)$$

den besondern Werth x stattfindet, so hat man nach §. 99:

$$f(x+\Delta x) - \varphi(x+\Delta x) = [f'(x+t\Delta x) - \varphi'(x+\theta\Delta x)]\cdot\Delta x, \quad (\delta)$$

t, θ Zahlen zwischen Null und der Einheit bezeichnen. Wenn die Funcnen f, φ in dem Intervalle von x bis $x+\Delta x$ keine Stetigkeitsunterbreıng erfahren und wenn außerdem Δx eine sehr kleine Größe der ersten rdnung bezeichnet (§. 45), so ist der erste Theil der vorhergehenden Gleiıng oder die Differenz $m_1\mu_1$ (Fig. 56) der Ordinaten $p_1\mu_1$, $p_1 m_1$ im lgemeinen auch eine sehr kleine Größe der ersten Ordnung.

Wenn aber die beiden Curven (f), (φ) ſich im Punkte m **berühren**, d. h. eine **gemeinſchaftliche Tangente** haben, und folglich die Bedingungsgleichung:

$$f'x = \varphi'x \qquad (m')$$

ſtattfindet, ſo hat man:

$$f(x+\Delta x) - \varphi(x+\Delta x) = [f''(x+t_1\Delta x) - \varphi''(x+\theta_1\Delta x)] \cdot \frac{\Delta x^2}{1\cdot 2}, \qquad (\delta')$$

wo die im Allgemeinen von t, θ verſchiedenen Zahlen t_1, θ_1 wieder zwiſchen 0 und 1 liegen müſſen, und alsdann iſt die Entfernung $m_1\mu_1$ eine ſehr kleine Größe von derſelben Ordnung, wie Δx^2, d. h. von der **zweiten Ordnung**.

Man ſieht leicht ein, daß der Abſtand des Punktes m_1 von der Linie (φ) oder die vom Punkte m_1, welcher ſehr nahe bei m liegt, auf die durch den Punkt m gehende Linie (φ) gefällte Normale m_1n_1 im Allgemeinen von derſelben Größenordnung iſt, als die Differenz $m_1\mu_1$. Dieſer Abſtand m_1n_1 iſt alſo eine ſehr kleine Größe der **erſten Ordnung**, wenn die Curve (φ) nur der Bedingung genügt, daß ſie durch den Punkt m geht, und derſelbe wird eine ſehr kleine Größe der **zweiten Ordnung**, wenn die Curve (φ) die Curve (f) im Punkte m berührt.

Man kann alſo um ſo mehr den Punkt m_1 immer ſo nahe bei m nehmen, daß ſeine Entfernung von der Linie (φ) kleiner iſt, als ſein Abſtand von jeder andern Curve, welche ebenfalls durch den Punkt m geht, aber die Curve (f) in dieſem Punkte nicht berührt. Man ſagt alsdann, es finde zwiſchen den Curven (f), (φ) eine **Berührung der erſten Ordnung** ſtatt.

Man kann Δx immer ſo klein annehmen, daß die Differenzen:

$$f'(x+t\Delta x) - \varphi'(x+\theta\Delta x),\ f''(x+t_1\Delta x) - \varphi''(x+\theta_1\Delta x)$$

reſp. daſſelbe Zeichen haben als die Differenzen:

$$f'x - \varphi'x,\ f''x - \varphi''x,$$

und folglich ändert die Differenz:

$$f(x+\Delta x) - \varphi(x+\Delta x) \qquad (\Delta)$$

vermöge der Gleichung (δ) für hinreichend kleine Werthe von Δx das Zeichen mit Δx, und die Curve (φ) **ſchneidet** die Curve (f), wenn ſie mit dieſer blos den Punkt m gemein hat. Dagegen behält die durch die Gleichung (δ') ausgedrückte Differenz für hinreichend kleine Werthe mit entgegengeſetzten Zeichen von Δx daſſelbe Zeichen, ſo daß die Curve (φ), welche mit (f) im Punkte m eine Berührung der **erſten Ordnung** hat, die Curve (f) im Punkte m nicht mehr ſchneidet.

Statt der Gleichungen (m), (m') kann man folgende nehmen:

$$fx = \varphi x,\ f(x+dx) = \varphi(x+dx),$$

d. h. in der Sprache der Infiniteſimalmethode: **zwei Curven** (f), (φ), **zwiſchen welchen im Punkte** (x, y) **eine Berührung der erſten Ordnung ſtattfindet, haben zwei einander unendlich nahe liegende gemeinſchaftliche Punkte** (x, y), (x + dx, y + dy).

§. 204. Wir wollen nun annehmen, daß man außer den Gleichungen (m), (m') noch die Gleichung:

$$f''x = \varphi''x \qquad (m'')$$

habe; ſo wird die Differenz (Δ) durch die Gleichung:

$$f(x+\Delta x) - \varphi(x+\Delta x) = [f'''(x+t_2\Delta x) - \varphi'''(x+\theta_2\Delta x)] \cdot \frac{\Delta x^3}{1\cdot 2\cdot 3}, \qquad (\delta'')$$

gegeben, und wird eine sehr kleine Größe der dritten Ordnung, wenn Δx nieder eine sehr kleine Größe der ersten Ordnung bezeichnet. In diesem Falle haben die beiden Curven (f), (φ) nicht blos dieselbe Tangente, sondern auch denselben Krümmungskreis, und nach der Analogie sagt man, daß diese beiden Curven einander osculiren.

Der Abstand $m_1 n_1$ wird, wie die Differenz (Δ) eine sehr kleine Größe der dritten Ordnung, wenn sich die beiden Curven im Punkte m osculiren, während sie nur eine sehr kleine Größe der zweiten Ordnung war, wenn sich die beiden Curven in diesem Punkte nur berührten.

Man kann also um so mehr den Punkt m_1 so nahe bei m nehmen, daß sein Abstand von der die Curve (f) im Punkte m osculirenden Curve (φ) kleiner sei, als sein Abstand von jeder andern Curve, welche die Curve (f) im Punkte m berührt, aber nicht osculirt. Man sagt daher: die einander osculirenden Curven (f), (φ) haben im Punkte m eine Berührung der zweiten Ordnung.

Die Differenz (Δ), welche durch die Gleichung (δ'') gegeben wird, ändert für hinreichend kleine absolute Werthe von Δx das Zeichen mit Δx, und folglich schneidet und berührt die osculirende Curve (φ) die Curve (f) im Punkte n im Allgemeinen zu gleicher Zeit.

Statt der Gleichungen (m), (m'), (m'') kann man auch setzen:

$$fx - \varphi x = 0,\quad d(fx - \varphi x) = 0,\quad d^2(fx - \varphi x) = 0,$$

oder:

$$fx = \varphi x,\quad f(x + dx) = \varphi(x + dx),\quad f(x + 2dx) = \varphi(x + 2dx),$$

d. h.: wenn zwischen den beiden Curven (f), (φ) im Punkte (x, y) eine Berührung der zweiten Ordnung stattfindet, so haben sie drei einander unendlich nahe liegende gemeinschaftliche Punkte (x, y), $(x + dx, y + dy)$, $(x + 2dx, y + 2dy + d^2y)$.

§. 205. Wenn man diese Betrachtungen verallgemeinert, so erhält man für die Bedingung, daß die beiden Curven (f), (φ) im Punkte (x, y) eine Berührung der n^{ten} Ordnung miteinander eingehen, die $(n + 1)$ Gleichungen:

$$fx = \varphi x,\quad f'x = \varphi' x,\quad f''x = \varphi'' x,\quad \ldots\ldots\quad f^{(n)}x = \varphi^{(n)}x.$$

für sehr kleine Werthe der ersten Ordnung von Δx wird die Differenz (Δ) eine sehr kleine Größe der $(n+1)^{ten}$ Ordnung, wenn die Curven (f), (φ) im Punkte (x, y) eine Berührung der n^{ten} Ordnung mit einander eingehen, woraus insofern folgt, daß der Punkt $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ so nahe bei dem Punkte (x, y) auf der Curve (f) genommen werden kann, daß sein Abstand von der Curve (φ) kleiner wird, als von jeder andern Curve, welche ebenfalls durch den Punkt (x, y) geht, aber mit der Curve (f) in diesem Punkte nur eine Berührung von einer niedrigern Ordnung hat.

Die Curven (f), (φ) schneiden sich im Punkte (x, y) oder nicht, jenachdem sie in diesem Punkte eine Berührung von gerader, oder ungerader Ordnung haben.

In der Sprache der Infinitesimalmethode kann man daher sagen: daß zwei Curven, welche im Punkte (x, y) eine Berührung der n^{ten} Ordnung miteinander eingehen, n einander unendlich nahe liegende gemeinschaftliche Punkte haben.

Wenn zwei Curven (f), (φ) gegeben sind, wovon die erste völlig bestimmt ist, während in der Gleichung der zweiten n willkührliche Parameter vorkommen; so kann man die Werthe der Parameter so annehmen, daß zwischen den beiden Curven in einem gegebenen Punkte eine Berührung der $(n - 1)^{ten}$ Ordnung stattfindet.

So kann man z. B. die beiden Parameter a, b, welche in der allgem
nen Gleichung einer geraden Linie:

$$y = ax + b$$

vorkommen, ſo annehmen, daß die gerade Linie eine Curve in einem gegeb
Punkte berührt, welche Berührung alsdann von der erſten Ordnung
Eben ſo kann man die in der allgemeinen Gleichung des Kreiſes:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$$

vorkommenden drei Conſtanten a, b, c ſo annehmen, daß der Kreis eine
bene Curve in einem gegebenen Punkte osculirt oder eine Berührung
zweiten Ordnung mit ihr eingeht.

Viertes Kapitel.

Von den ſingulären Punkten ebener Curven und der gegenſeitig Beziehung zwiſchen der Geometrie und Algebra.

§. 206. Unter ſingulären, beſonders merkwürdigen oder
gezeichneten Punkten einer ebenen Curve ſind in geometriſchem Sinn
diejenigen zu verſtehen, worin die Curve, abgeſehen von dem willkühr
Coordinatenſyſteme, worauf ſie bezogen wird, irgend eine beſondere Eigen
lichkeit darbietet, im Gegenſatze zu den übrigen unendlich vielen Punkte
Curve, welche ſich von den unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden
kein geometriſches Merkmal unterſcheiden. So iſt z. B. der Punkt, wor
Curve eine Inflexion erfährt, ein ſingulärer Punkt, deſſen Exiſtenz
von den willkührlichen Coordinatenaxen, noch ſelbſt von der Art der Coo
ten, welche man zur analytiſchen Beſtimmung der Curve anwendet, abh
Dagegen iſt der Punkt einer Curve, für welchen die Ordinate derſelbe
Maximum oder Minimum wird, darum allein noch kein ſingulärer P
denn wenn man die Richtung der Axen veränderte, wodurch an der
ſelbſt nichts geändert würde, ſo würde die in Rede ſtehende Eigenſchaft
größten oder kleinſten Ordinate nicht mehr dem frühern, ſondern einem
andern Punkte entſprechen, ſo daß jener erſte Punkt jetzt gar keine beſo
Eigenthümlichkeit mehr darbieten würde.

§. 207. Man muß die Curven, welche ſich durch eine Gleichung zw
ihren Coordinaten ausdrücken laſſen, in ſogenannte algebraiſche Cur
deren Ordinate in einem Syſteme feſter Coordinatenaxen eine algebraiſche
tion der Abſciſſe iſt, und in transcendente Curven unterſcheiden,
Ordinate in dem erwähnten Coordinatenſyſteme eine transcendente Fu
der Abſciſſe iſt. So ſind z. B. die Kegelſchnitte algebraiſche Curven, wä
die Cycloide und die Spiralen transcendente Curven ſind.

Die Gleichung einer algebraiſchen Curve kann durch Fortſchaffun
Nenner und Wurzelgrößen immer auf folgende Form gebracht werden:

$$F(x, y) = 0,$$

wo F ſowohl eine in Beziehung auf y, als auf x ganze und rationale
tion bezeichnet. Der Grad dieſer Gleichung wird durch die Summe de
ponenten von x und y in dem Gliede, worin dieſe Summe am größte

estimmt. Wenn man von einem Syſteme paralleler Coordinaten zu einem andern übergeht, ſo wird der Grad der Gleichung dadurch nicht geändert, weil die in dem erſten Syſteme genommenen Coordinaten lineare Functionen der in dem zweiten Syſteme genommenen ſind. Der Grad der Gleichungen algebraiſcher Curven iſt folglich ein *weſentliches* Merkmal dieſer Curven, wornach man ſie klaſſificiren kann, ohne daß dieſe Klaſſification willkührlich wäre, obgleich ſich die Form der Gleichungen mit der Lage des Anfangspunktes und mit der Richtung der Axen, welche einen beliebigen Winkel miteinander bilden können, ändert.

Eine gerade Linie kann mit einer algebraiſchen Curve nicht mehr Durchſchnittspunkte haben, als der Grad der Gleichung der Curve Einheiten enthält, und die Anzahl der Durchſchnittspunkte zweier Curven, wovon die eine vom m^{ten} und die andere vom m'^{ten} Grade iſt, kann nicht größer ſein, als das Product mm'. Dieſe ſehr merkwürdigen geometriſchen Merkmale folgen unmittelbar aus den Grundprincipien der Theorie der algebraiſchen Gleichungen.

§. 208. Eine algebraiſche Curve bricht in ihrem Laufe nicht plötzlich ab oder kann keine ſingulären Punkte der Art haben, welche wir *Stillſtands-*, *Schluß-* oder *Zerreißungspunkte* genannt haben, und welche bei gewiſſen transcendenten Curven, z. B. bei der durch die Gleichung:

$$y + 1 = e^{-\frac{1}{x}} \qquad (1)$$

ausgedrückten Curven (§. 16) vorkommen. Dieſes hat ſeinen Grund darin, daß eine algebraiſche Gleichung mit einer einzigen unbekannten Größe und mit reellen Coefficienten immer nur eine *gerade* Anzahl imaginärer Wurzeln hat, und nur eine *gerade* Anzahl reeller Wurzeln verlieren kann, wenn man eine der bei der Bildung ihrer Coefficienten vorkommenden Größen eine Reihe reeller Werthe durchlaufen läßt. Hieraus und aus der bekannten Form der imaginären Wurzeln folgt, daß wenn die Ordinate y einer algebraiſchen Curve für einen gewiſſen Werth von x vom Reellen zum Imaginären übergeht, immer eine *gerade* Anzahl reeller Werthe von y einander gleich werden.

Wenn dieſer Werthe *zwei* ſind, wie es gewöhnlich geſchieht, ſo vereinigen ſich *zwei Theile* der Curve in einem Punkte, welcher übrigens keine beſondere Eigenthümlichkeit darbieten kann, wenn man die Richtung der Axen verändert, und welcher folglich im Allgemeinen kein ſingulärer Punkt iſt.

Um alſo den vollſtändigen Ausdruck einer algebraiſchen Curve durch eine Gleichung zwiſchen ihren geradlinigen Coordinaten zu haben, muß man die Gleichung von Wurzelgrößen frei machen, oder alle doppelten Zeichen jeder Wurzelgröße von einem geraden Inder beibehalten, weil ſonſt willkührlich Stetigkeitsunterbrechungen eingeführt würden, die von der Richtung der Hülfslinien herrührten, welche man zu Coordinatenaxen nehmen könnte; aber zur Beſchreibung der Curve an ſich betrachtet, unzuläſſig ſind.

Dieſes iſt die Grundlage des Zuſammenhanges zwiſchen der Algebra und der Geometrie, indem die Algebra durch das doppelte Zeichen der Wurzelgröße von geradem Inder Zweige oder Stücke von Curven vereinigt, welche in der That demſelben geometriſchen Orte angehören.

Uebrigens wird dieſer gegenſeitiger Zuſammenhang zwiſchen der Geometrie und Algebra oft in einem zu abſoluten Sinne genommen, weil derſelbe beſonders bei der Unterſuchung der einfachſten, gewöhnlich beim Unterrichte gewählten algebraiſchen Curven ſich herausſtellt; aber im Allgemeinen bei transcendenten Curven nicht mehr ſtattfindet. So muß z. B. die in der Gleichung der Cycloide vorkommende Wurzelgröße des zweiten Grades (§. 176) entweder mit dem Zeichen $+$, oder mit dem Zeichen $-$ genommen werden, und wenn man beide

Zeichen zugleich anwendete, ſo würden zwei einzelne Cycloiden conſtruirt, w
nicht als denſelben geometriſchen Ort bildend oder als zwei Zweige derſe
Curve betrachtet werden können. Eben ſo kann man die negativen Werthe
r und φ bei der Conſtruction der hyperboliſchen Spirale $r = \frac{a}{\varphi}$ verwer
oder zulaſſen; denn wenn man ſie zuläßt, ſo wendet man nur eine erl
Convention an, und wenn man ſie verwirft, ſo wird weder eine geomet
Analogie aufgehoben, noch eine mit den geometriſchen Bedingungen der
ſchreibung der Curve unverträgliche Stetigkeitsunterbrechung eingeführt.

Umgekehrt, wenn die Ordinate einer algebraiſchen Curve einen Au
von transcendenter Form bekommt, und z. B. durch eine Reihe ausge
wird, ſo bietet der transcendente Ausdruck gewöhnlich Stetigkeitsunterbrech
dar, welche der Zeichnung der Curve fremd ſind. Dieſes findet z. B. b
Gleichung (q) in §. 113 ſtatt, deren zweiter Theil die Ordinate einer g
Linie ausdrückt; aber nur zwiſchen gewiſſen Grenzen, und wir werden
ſehen, daß ſich Beiſpiele derſelben Art beliebig viele anführen laſſen.

§. 209. Wenn alſo von der zwiſchen der Geometrie und Algebra
findenden gegenſeitigen Beziehung die Rede iſt, ſo muß der Ausdruck A
in einem engern Sinne genommen werden, indem man bemerkt, daß e
blos darum handelt, Linien durch eine algebraiſche Gleichung zwiſchen
linigen, zu feſten Axen parallelen Coordinaten auszudrücken. Dieſer ge
tige Zuſammenhang zwiſchen der Geometrie und Algebra hat in den
oben erwähnten Eigenſchaften der algebraiſchen Gleichungen und in dem
ſtande ſeinen Grund, daß in einem ſolchen Coordinatenſyſtem jede Gleichun
erſten Grades mit zwei Veränderlichen eine unbeſtimmt verlängerte
Linie ausdrückt.

Descartes nannte daher alle Curven, welche in einem Syſteme
gonaler Coordinaten durch algebraiſche Gleichungen ausgedrückt werden,
metriſche Curven, und mechaniſche Curven dagegen diejenigen,
in einem ſolchen Coordinatenſyſteme durch transcendente Gleichungen ausg
werden, wie z. B. die Spiralen, oder die Cycloide; allein dieſe unri
Benennungen ſind jetzt außer Gebrauch gekommen. Man kann ſehr wo
jenigen Curven, welche Descartes geometriſche nannte, algebraiſche n
allein man kann den Charakter der geometriſchen Curven nicht durch eine
Definition fixiren, obgleich dieſe letzte Benennung auf gewiſſe Curven anw
iſt und auf andere nicht. So ſind z. B. die Cycloide und Ellipſe o
Curven, deren Entſtehung man ſich vorſtellen kann, und deren manni
Eigenſchaften nach der Methode der reinen Geometrie, unabhängig v
Anwendung der Algebra und von jeder Convention über ein Syſtem w
licher Coordinaten unterſucht werden können, und ſie ſind daher in
Sinne geometriſche Curven. Wenn man dagegen ganz zufällig eine algeb
Gleichung eines beliebigen Grades mit zwei Veränderlichen, oder eine
cendente Gleichung von einer ſonderbaren Form bildete; ſo würde der
triſche Ort einer ſolchen Gleichung nur höchſt ſelten geometriſche Eigenſ
haben, vermöge welcher ſich die Erzeugung der Curve denken oder bewe
ließe, wenn man ſie nicht auf beliebige Coordinatenaxen beziehen, und di
die Gleichung ausgedrückte Relation zwiſchen den Zahlenwerthen ihrer
naten anwenden wollte. Eine ſolche Curve könnte, wie die Ellipſe od
Cycloide, noch eine algebraiſche oder transcendente ſein, allein ſie wür
keine geometriſche Curve gelten können.

§. 210. Die algebraiſchen Curven können ebenſowenig vorſprin

Zerreißungspunkte haben. Denn wenn man y zwiſchen der Gleichung
er algebraiſchen Curve:

$$F(x, y) = 0, \qquad (a)$$

welche von Wurzelgrößen und Nennern befreit iſt, und ihrer erſten Ableitung:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' = 0 \qquad (a')$$

liminirt, ſo erhält man eine ebenfalls von Wurzelgrößen und Nennern freie
lgebraiſche Gleichung zwiſchen x, y', ſo daß die abgeleitete Curve, deren
bſciſſe x und deren Ordinate y' iſt, keine Zerreißungspunkte haben kann, was
thwendig der Fall ſein würde, wenn die urſprüngliche Curve vorſpringende
unkte hätte.

Eine algebraiſche Curve kann auch keine ſingulären Punkte haben, worin
r Krümmungshalbmeſſer plötzlich von einem endlichen zu einem andern endli-
en Werthe überginge; denn der Krümmungshalbmeſſer iſt eine algebraiſche
unction der Ableitungen y', y'', und die Ableitung y'' iſt ſowohl als y', eine
gebraiſche Function von x. Daſſelbe gilt von der n^{ten} Ableitung $y^{(n)}$, wo n
ne beliebige ganze Zahl iſt.

Die Stetigkeitsunterbrechungen von einer beliebigen Ordnung, welche eine
gebraiſche Function erfahren kann, rühren alſo immer von dem Durchgange
ner ihrer Ableitungen und der folgenden Ableitungen durch das Unendliche
nd niemals davon her, daß die abgeleiteten Functionen von einer gewiſſen
rdnung an plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem andern endlichen
Werthe übergehen.

§. 211. Die Zerreißungs- und vorſpringenden Punkte der transcendenten
urven laſſen ſich durch eine, der Natur der in der Gleichung der Curve vor-
mmenden transcendenten Function ſpeciell entſprechende, Unterſuchung beſtimmen.

So erkennt man z. B. aus der Beſchaffenheit der Function $e^{-\frac{1}{x}}$, welche für
$= 0$ verſchwindet, oder unendlich groß wird, jenachdem x gegen Null con-
rgirt, indem es poſitive oder negative Werthe durchläuft, daß der Zweig der
urve (1), deſſen Abſciſſe poſitiv iſt, im Punkte $x = 0$, $y = 1$ plötzlich ab-
icht. Betrachten wir ferner die Curve, deren Gleichung folgende iſt:

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}},$$

verſchwindet die Function y für $x = 0$, man mag x eine Reihe poſitiver,
der eine Reihe negativer Werthe durchlaufen laſſen; denn der Ausdruck für y
ird in beiden Fällen $\frac{0}{\infty} = 0$, $\frac{0}{1} = 0$. Die Curve geht alſo durch
n Anfangspunkt und dehnt ſich ſowohl nach der Seite der negativen, als nach
r der poſitiven Abſciſſen aus. Wenn man die Ableitung nimmt, ſo er-
ilt man:

$$y' = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\frac{1}{x^2 e^{\frac{1}{x}}}}{\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2}.$$

etzt man nun $x = 0$, ſo findet man $y' = 0$, oder $y' = 1$, jenachdem man
poſitive, oder negative Werthe durchlaufen läßt, um zu der Grenze Null zu
langen. Der Anfangspunkt der Coordinaten iſt folglich ein vorſpringender
unkt der Curve und der Zweig, deſſen Abſciſſen poſitiv ſind, berührt die Axe

der x in dieſem Punkte, während die Tangente des andern Zweiges in dieſem Punkte unter einem Winkel von 45^0 gegen dieſe Axe geneigt iſt.

Eben ſo fände man, daß der Anfangspunkt der Coordinaten ein vorſpringender Punkt der Curve iſt, welche durch die Gleichung:

$$y = x \text{ arc. tang.} \frac{1}{x} \qquad (2)$$

ausgedrückt wird, deren Ableitung folgende iſt:

$$y' = \text{arc. tang.} \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$

Denn jenachdem x gegen Null convergirt, indem es poſitive, oder negative Werthe durchläuft, hat man an der Grenze $y' = \frac{1}{2}\pi$, oder $y' = -\frac{1}{2}\pi$.

Uebrigens hat die Unterſuchung dieſer Arten von Curven aus den bereits früher angegebenen Gründen nur ein geringes Intereſſe für die Geometrie, weshalb wir uns auch dabei nicht länger aufhalten wollen.

§. 212. Die Curve, deren Ordinate y iſt, erfährt eine **Inflexion**, wenn die Ableitung y' durch ein **Maximum**, oder **Minimum** geht, es mag dieſes ein gewöhnliches **Maximum**, oder **Minimum** ſein, in welchem Falle das **Keppler**'ſche Princip anwendbar iſt, oder ein einer Stetigkeitsunterbrechung der Function y' entſprechendes **Maximum** oder **Minimum**. Die Regeln zur Beſtimmung der Maxima und Minima der expliciten oder impliciten Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe, laſſen ſich folglich unmittelbar auf die Beſtimmung der Inflexionspunkte der Curve anwenden, ohne daß man zu dieſem Zwecke beſondere Verfahrungsarten zu ſuchen braucht. Der Inflexionspunkt wird **gewöhnlich** durch die Gleichung $y'' = 0$ und **zufällig** durch $y'' = +\infty$ charakteriſirt; allein es kann geſchehen, daß die eine, oder die andere dieſer Gleichungen erfüllt wird, ohne daß die Curve in dem entſprechenden Punkte eine Inflexion erfährt. Wenn die Curve durch eine von Wurzelgrößen und Nennern befreite algebraiſche Gleichung (a) gegeben iſt, ſo eliminirt man y zwiſchen dieſer Gleichung und ihrer unmittelbaren Ableitung (a'), und die reſultirende Gleichung, welche implicite y' als Function von x beſtimmt, dient alsdann zur Beſtimmung der Werthe von x, welche die Function y' zu einem **Maximum**, oder **Minimum** machen, und folglich auch zur Beſtimmung der Inflexionspunkte der gegebenen Curve.

Betrachten wir noch die durch die Gleichung:

$$y^3 = ax^2 + bx^3 \qquad (3)$$

ausgedrückte Curve, welche, jenachdem der Coefficient a poſitiv, Null, oder negativ iſt (indem b immer poſitiv bleibt) eine der drei in Figur 57, 58 und 59 angegebenen Formen annimmt. Aus der Gleichung (3) folgt:

$$y'^2 = \frac{(2a+3bx)^2}{4(a+bx)}, \quad y''^2 = \frac{b^2(a+\frac{3}{4}bx)^2}{(a+bx)^3}, \quad y'''^2 = \frac{9b^6x^2}{64(a+bx)^5}.$$

Die Werthe von x, welche y' zu einem **Maximum** oder **Minimum** machen, werden durch die Gleichung $a + \frac{3}{4}bx = 0$ gegeben. Wenn a poſitiv iſt, ſo macht der ſich daraus ergebende Werth von x die Functionen y' und y imaginär, und folglich kann dieſer Werth keinem Inflexionspunkte der Curve entſprechen.

Wenn $a = 0$ iſt, ſo geht y'' für $x = 0$ durch das Unendliche, ſtatt zu verſchwinden, und die gegebene Curve, welche die **Neil**'ſche Parabel wird (§. 197), kann keine Inflexionspunkte haben, weil die negativen Werthe von x die Functionen y' und y imaginär machen.

Aber wenn der Coefficient a negativ iſt, ſo erfährt die Curve in den der gemeinſchaftlichen Abſciſſe $x = -\frac{4a}{3b}$ entſprechenden Punkten zwei Inflexionen.

Die Gleichung (1) gibt:

$$y' = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}, \quad y'' = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1-2x}{x}\right),$$

nd die transcendente Curve, welche dieſe Gleichung ausdrückt, hat folglich nen der Abſciſſe $x = \frac{1}{2}$ entſprechenden Inflexionspunkt.

Die Beſtimmung der Punkte der **größten** oder **kleinſten Krümmung** mmt, wie wir in §. 194 geſehen haben, auf die Beſtimmung der Werthe n x, y zurück, welche den Krümmungshalbmeſſer ϱ zu einem **Minimum** er **Maximum** machen, und zu gleicher Zeit der Gleichung der gegebenen rve genügen. Wenn dieſe Gleichung eine algebraiſche iſt, ſo kann man durch limination immer eine andere algebraiſche Gleichung zwiſchen x, ϱ erhalten, d man hat alsdann nur noch die gewöhnlichen Regeln zur Beſtimmung der erthe von x anzuwenden, welche die implicite Function ϱ zu einem **Maximum** oder **Minimum** machen.

§. 213. Die Punkte, worin ſich mehrere Zweige derſelben Curve begegn, d. h. **ſchneiden** oder **berühren**, werden **vielfache Punkte** genannt. enn die Berührung von einer **geraden** oder **ungeraden** Ordnung iſt, ſo det nach §. 205 zugleich ein Durchſchneiden ſtatt oder nicht. Ein einziger, ſich ſelbſt zurücklaufender Curvenzweig kann ebenfalls vielfache Punkte darten. Der vielfache Punkt iſt ein **doppelter**, **dreifacher**, **vierfacher**, ..., nachdem ein Zuſammentreffen von **zwei**, **drei**, **vier** ..... Zweigen oder heilen derſelben Curve ſtattfindet, und alsdann hat die Ordinate in der unmittelbaren Nähe des vielfachen Punktes **zwei**, **drei**, **vier** ..... reelle Werthe, elche derſelben Abſciſſe entſprechen.

Die vielfachen Punkte, worin ein **bloßes Durchſchneiden ohne Berühren** ſtattfindet, ſind wohl von denen zu unterſcheiden, worin eine **Berührung** ſtattfindet, weil man, wenigſtens für alle algebraiſchen Curven, die nkte der erſten Art immer durch ein allgemeines Verfahren beſtimmen kann, ährend ſich die Punkte der zweiten Art nur durch Verſuche von den **conjurten Punkten** und den **Rückkehr-** oder **Wendepunkten**, wie wir bald nen werden, unterſcheiden laſſen.

Es ſei wieder:

$$F(x, y) = 0 \qquad (a)$$

von Wurzelgrößen und Nennern befreite Gleichung einer algebraiſchen rve, ſo gibt ihre Ableitung der erſten Ordnung:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' = 0 \qquad (a')$$

r y immer einen einzigen reellen Werth, wenn die Ableitungen $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ ht zu gleicher Zeit verſchwinden. Soll alſo eine algebraiſche Curve einen elfachen **Durchſchnittspunkt** haben können, ſo muß man zunächſt die den Gleichungen haben:

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \qquad (b)$$

d die Ableitung der zweiten Ordnung:

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dxdy}y' + \frac{d^2F}{dy^2}y'^2 + \frac{dF}{dy}y'' = 0 \qquad (a'')$$

reducirt ſich folglich für die Werthe von x, y, welche den Gleichungen (a) und (b) gleichzeitig genügen, auf:

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dxdy}y' + \frac{d^2F}{dy^2}y'^2 = 0. \qquad (c)$$

Wenn man aus dieſer letzten Gleichung zwei reelle Werthe für y' ableiten kann, ſo hat die Curve einen doppelten Durchſchnittspunkt.

Es ſei z. B. die Gleichung gegeben:

$$y^2 = \frac{x^2}{a^2}(a^2 - x^2), \qquad (4)$$

welche die unter dem Namen Lemniscate bekannte Curve ausdrückt (§. 60), ſo werden die Gleichungen (b) und (c):

$$x(a^2 - x^2) - x^3 = 0, \quad y = 0, \quad y'^2 = \frac{a^2 - 3x^2}{a^2}.$$

Hieraus folgt, daß der Anfangspunkt der Coordinaten ein doppelter Punkt iſt, worin ſich zwei Bogen der Curve rechtwinklig durchſchneiden, weil die beiden Tangenten unter einem Winkel von 45° gegen die Abſciſſenaxe geneigt ſind. Außerdem iſt dieſer doppelte Durchſchnittspunkt ein Inflexionspunkt; denn die Gleichungen zwiſchen y'', x und y''', x ſind:

$$y''^2 = \frac{x^2(2x^2 - 3a^2)^2}{a^2(a^2 - x^2)^3}, \quad y'''^2 = \frac{9a^6}{(a^2 - x^2)^5},$$

und geben $y'' = 0$ für $x = 0$, während y''' einen endlichen Werth behält.

Eben ſo fände man, daß der Anfangspunkt ein doppelter Punkt der Curve (3) iſt, weil die beiden Tangenten mit der Abſciſſenaxe Winkel bilden, deren trigonometriſche Tangenten durch $\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$ ausgedrückt werden, indem der Parameter a als poſitiv vorausgeſetzt iſt (Fig. 57).

§. 214. Dieſe Regel kann zuweilen auch auf transcendente Curven angewandt werden, und zur Beſtimmung der vielfachen vorſpringenden Punkte dienen. Es ſei z. B. die Curve:

$$\left(y - x \text{ arc. tang. } \frac{1}{x}\right)^2 - x^2 \cos. x = 0 \qquad (5)$$

gegeben, ſo findet man, daß die Werthe $x = 0$, $y = 0$ den Gleichungen (a) und (b) genügen, und man hat:

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 2, \quad \frac{d^2F}{dxdy} = -2\left(\text{arc. tang. } \frac{1}{x} - \frac{x}{(1+x^2)}\right),$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 2\left(\text{arc. tang. } \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)^2 + \frac{4\left(y - x \text{ arc. tang. } \frac{1}{x}\right)}{(1+x^2)^2}$$
$$+ (x^2 - 2)\cos. x + 4x \sin. x.$$

Die Gleichung (c) verwandelt ſich für die Werthe $x = 0$, $y = 0$ in:

$$y'^2 \mp \pi y' + \frac{\pi^2}{4} - 1 = 0,$$

und gibt für y' die vier verſchiedenen Werthe:

$$\frac{\pi}{2}+1,\ \frac{\pi}{2}-1,\ -\frac{\pi}{2}+1,\ -\frac{\pi}{2}-1.$$

Der Anfangspunkt der Coordinaten iſt alſo ein vorſpringender Punkt der Curve (5), worin ſich vier Curvenbogen unter endlichen Winkeln treffen. Der vorſpringende Punkt der Curve (2) könnte nicht auf dieſelbe Weiſe gefunden werden; denn obgleich y' für den Anfangspunkt zwei verſchiedene Werthe annimmt, ſo reducirt ſich doch $\frac{dF}{dy}$ auf die Conſtante 1 und kann nicht für die Werthe $x=0$, $y=0$ verſchwinden.

§. 215. Die Gleichung (c) wird illuſoriſch, wenn zu gleicher Zeit:

$$\frac{d^2F}{dx^2}=0,\ \frac{d^2F}{dxdy}=0,\ \frac{d^2F}{dy^2}=0 \qquad (d)$$

iſt, und alsdann nimmt man die Ableitung dieſer Gleichung, welche ſich auf:

$$\frac{d^3F}{dx^3}+3\frac{d^3F}{dx^2dy}y'+3\frac{d^3F}{dxdy^2}y'^2+\frac{d^3F}{dy^3}y'^3=0 \qquad (e)$$

reducirt. Wenn dieſe letzte Gleichung für die Werthe von x, y, welche den Gleichungen (a), (b), (d) genügen, drei reelle ungleiche Wurzeln hat, ſo hat die gegebene Curve einen dreifachen Durchſchnittspunkt, während dieſer Punkt nur einem einzigen Zweige der Curve angehört, wie die unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden, wenn die Gleichung (e) nur eine einzige reelle Wurzel hat.

Dieſer letzte Fall bietet ſich bei der Curve dar, deren Gleichung folgende iſt:

$$y^3-x(x-1)^3=0, \qquad (6)$$

welcher durch die Werthe $x=1$, $y=0$ Genüge geſchieht, die auch den Gleichungen (b) und (d) genügen; aber die Gleichung (e) reducirt ſich für dieſelben Werthe auf:

$$y'^3-1=0, \qquad (7)$$

und geſtattet nur eine einzige reelle Wurzel. Uebrigens iſt nach der Form der Gleichung (6) einleuchtend, daß y für alle reellen Werthe von x nur einen einzigen reellen Werth haben kann, und daß folglich die Curve keine vielfachen Punkte würde darbieten können.

In dem Falle, wo alle Coefficienten der Gleichung (e) ebenfalls verſchwänden, müßte man ebenſo zu einer Gleichung des vierten Grades mit y' übergehen. Wenn dieſe Gleichung vier ungleiche reelle Wurzeln hätte, ſo wäre der den Werthen von x, y, welche den Gleichungen (a) und (b) genügen, entſprechende Punkt ein vierfacher Durchſchnittspunkt. Wenn die in Rede ſtehende Gleichung nur zwei ungleiche reelle Wurzeln hätte, ſo wäre der fragliche Punkt ein doppelter, und wenn ſie endlich zwei ungleiche und zwei gleiche reelle Wurzeln hätte, ſo würden die beiden erſten wieder den Durchſchnitt zweier Curvenzweige in dem entſprechenden Punkte (x, y) andeuten, und wir werden ſogleich ſehen, welche Bedeutung die beiden gleichen reellen Wurzeln haben.

Offenbar kann man dieſe Unterſuchung beliebig weit fortſetzen, ſo daß man eine direkte und zuverläſſige Methode zur Beſtimmung der vielfachen Durchſchnittspunkte aller algebraiſchen Curven und des Grades ihrer Vielfachheit oder der Anzahl der Curvenzweige, welche ſich in dieſen Punkten durchſchneiden, hat.

§. 216. Wenn die Gleichung mit y', auf welche man durch Anwendung der vorhergehenden Methode kommt, von einem geraden Grade iſt und lauter

imaginäre Wurzeln hat, so ist der Punkt, dessen Coordinaten nach der Voraussetzung den Gleichungen (a) und (b) genügen, ein conjugirter Punkt, d. h. ein isolirter, aber dennoch mit in der Gleichung (a) begriffener Punkt, so daß der geometrische Ort dieser Gleichung aus dem Systeme einer stetigen Linie und eines isolirten Punktes besteht. Eine Linie kann mehrere, und sogar unendlich viele conjugirte Punkte haben, wenn ihre Gleichung eine transcendente ist. Eine Gleichung mit zwei Veränderlichen kann auch zuweilen nur einen Punkt, oder ein System isolirter Punkte ausdrücken; allein dieses ist nur der Fall, wenn sie sich in mehrere verschiedene Gleichungen zerlegen läßt, oder mit diesen gleichbedeutend ist. Dieses ist z. B. bei den Gleichungen von der Form:

$$[\varphi(x, y)]^2 + [\psi(x, y)]^2 = 0$$

der Fall, welche mit dem Systeme der beiden Gleichungen:

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0$$

gleichbedeutend ist.

Der Anfangspunkt der Coordinaten ist ein conjugirter Punkt, der durch die Gleichung (3) ausgedrückten Curve, wenn man dem Parameter a einen negativen Werth beilegt. Die Gleichungen (b) und (c) werden in diesem Falle:

$$2y = 0, \quad 2ax + 3bx^2 = 0, \quad y'^2 - 3bx - a = 0,$$

wovon den beiden ersten durch die Werthe $x = 0$, $y = 0$ genügt wird, und wenn man in der dritten $x = 0$, $a < 0$ setzt, so ergeben sich daraus für y' nur imaginäre Werthe. Wenn man übrigens die Gleichung (3) auf folgende Form bringt:

$$y = \pm x\sqrt{bx + a},$$

so sieht man offenbar, daß ihr durch $x = 0$, $y = 0$ Genüge geschieht, und daß die Ordinate y, wenn a negativ und b positiv angenommen wird, für positive oder negative Werthe von x, wie wenig sie auch von Null verschieden sein mögen, imaginär bleibt, und nur dann reell wird, wenn x größer ist, als $-\frac{a}{b}$.

Man kann bemerken, daß der conjugirte Punkt O (Fig. 59) gewissermaßen die Stelle des Knotens Omn (Fig. 57) vertritt, welcher durch die Veränderung des Zeichens des Parameters a verschwunden ist, und man kann sich auf diese Weise, insoweit es der Gegenstand gestattet, von der geometrischen Bedeutung der conjugirten Punkte Rechenschaft geben.

Es ist leicht einzusehen, weshalb man die conjugirten Punkte mit den vielfachen zu gleicher Zeit erhält; denn ein conjugirter Punkt ist derjenige, worin zwei conjugirte imaginäre Wurzeln der Gleichung (a), nämlich:

$$y = \varphi x + \psi x\sqrt{-1}, \qquad (\alpha_1)$$

$$y = \varphi x - \psi x\sqrt{-1}, \qquad (\alpha_2)$$

durch das Verschwinden der Function ψx einander gleich reell und werden. Man kann also den conjugirten Punkt als den Durchschnittspunkt zweier imaginärer Zweige der Curve (a) betrachten. Für jeden dieser Zweige gibt die Gleichung (a') einen einzigen imaginären Werth von y', und man muß folglich zwei imaginäre Werthe von y' für das den beiden imaginären Curvenzweigen gemeinschaftliche Werthsystem von x, y oder für die reellen Coordinaten des conjugirten Punktes haben. Die Gleichung (a') kann also nicht mehr zur Bestimmung eines einzigen Werthes von y' dienen, und die Gleichungen (b) müssen durch die dem conjugirten Punkte entsprechenden Werthe von x, y erfüllt werden.

In algebraiſchem Sinne hat die Curve (6) einen den Coordinaten $x = 1$, $y = 0$ und den imaginären Wurzeln der Gleichung (7) entſprechenden conjugirten Punkt; allein dieſer conjugirte Punkt fällt zufällig mit einem Punkte des reellen Zweiges der Curve zuſammen. Einige Schriftſteller ſagen in dieſem Falle: der conjugirte Punkt ſei nicht mehr ſichtbar, d. h. er habe keine geometriſche Exiſtenz mehr.

§. 217. Man ſieht leicht ein, daß der Werth von x, welcher einem conjugirten Punkte der Curve (1) entſpricht, zufällig auch einem conjugirten Punkte der abgeleiteten Curve, deren Abſciſſe x und deren Ordinate y' iſt, und ſogar auch einem conjugirten Punkte der abgeleiteten Curve der zweiten Ordnung, deren Ordinate y'' iſt, u. ſ. f. entſprechen kann. So iſt z. B. der Anfangspunkt der Coordinaten offenbar ein conjugirter Punkt der Curve:

$$y^2 = ax^4 + bx^5, \text{ oder } y = \pm x^2 \sqrt{bx + a},$$

wenn man, wie weiter oben, $b > 0$, $a < 0$ ſetzt, und er iſt auch ein conjugirter Punkt der abgeleiteten Curve:

$$y' = \pm \frac{x(5bx + 8a)}{2\sqrt{bx + a}};$$

denn die Gleichung (c) reducirt ſich in dieſem Falle auf $y'^2 = 0$ und hat keine imaginären, ſondern gleiche reelle Wurzeln. Allgemein, wenn die Coordinaten x, y eines conjugirten Punktes nicht imaginären Wurzeln der Endgleichung mit y', auf welche die obige Methode führt, entſprechen; ſo entſprechen ſie gleichen reellen Wurzeln derſelben Gleichung von einer geraden Anzahl. Um dieſes zu beweiſen, wollen wir bemerken, daß, wenn zwei Curvenzweige einander in dem Punkte (x, y) nicht durchſchneiden, ſondern ſich berühren, die correſpondirenden Werthe von y', welche in dem Falle des Durchſchnittes der Curvenzweige ungleich waren, einander gleich werden müſſen, ohne imaginär zu werden, und da alsdann die beiden Curvenzweige eine gemeinſchaftliche Tangente bekommen, ſo kann man auch ſagen, daß ſie zwei einander unendlich nahe liegende gemeinſchaftliche Punkte haben. Ebenſo, wenn den Coordinaten des conjugirten Punktes ein reeller Werth von y' entſpricht, ſo kann man ſagen, daß die imaginären Curvenzweige (α_1), (α_2) zwei einander unendlich nahe liegende gemeinſchaftliche reelle Punkte haben, oder daß dieſe Zweige einander berühren, und folglich muß die Gleichung mit y' gleiche Wurzeln bekommen. Dieſes erhellet übrigens aus der Form der Gleichungen (α_1), (α_2), weil, wenn der aus der Gleichung (α_1) abgeleitete Werth von y' für die Abſciſſe x des conjugirten Punktes reell iſt, der Werth von x nicht blos die Function φx, ſondern auch ihre Ableitung $\psi' x$ verſchwinden macht, und alsdann iſt der aus der Gleichung (α_2) abgeleitete Werth von y' derſelbe, als der, welcher ſich aus der Gleichung (α_1) ergibt. Die Function y' bekommt alſo in dem conjugirten Punkte zwei gleiche Werthe, und ſie könnte deren auch vier, oder ſechs, oder eine beliebige gerade Anzahl bekommen, je nach der Anzahl der paarweiſe conjugirten Curvenzweige, welche den conjugirten Punkt zum gemeinſchaftlichen Berührungspunkte haben.

§. 218. Wir werden ſagen: daß zwiſchen zwei Curvenzweigen eine Berührung der erſten Art ſtattfindet, wenn dieſe beiden Curvenzweige auf beiden Seiten der gemeinſchaftlichen Tangente liegen (Fig. 61), und eine Berührung der zweiten Art, wenn die beiden Curvenzweige auf derſelben Seite der gemeinſchaftlichen Tangente liegen (Fig. 62). Wenn ſich die beiden Curvenzweige in dem Berührungspunkte vereinigen, ohne darüber hinaus zu gehen, ſo verwandelt ſich der vielfache Berührungspunkt in einen Rückkehrpunkt (eine Spitze) der erſten oder zweiten Art (Fig. 63 und 64),

jenachdem die gemeinſchaftliche Tangente zwiſchen die beiden Curvenzweige fällt, oder beide Curvenzweige auf derſelben Seite der Tangente liegen. Die Cycloide und die Evoluten der Kegelſchnitte haben uns bereits Beiſpiele von Rückkehrpunkten der erſten Art dargeboten. Die Curve:

$$(y - ax^2)^2 = b^2x^5, \text{ oder } y = ax^2 \pm bx^2\sqrt{x}$$

hat im Anfangspunkte der Coordinaten einen Rückkehrpunkt der zweiten Art; denn ihre Gleichung gibt:

$$y' = 2ax \pm \frac{5}{2} bx\sqrt{x},\ y'' = 2a \pm \frac{15}{4} b\sqrt{x},$$

und wenn man $x = 0$ ſetzt, ſo iſt $y = 0$, $y' = 0$ und die beiden Werthe von y'' werden einander gleich, nämlich $= 2a$. Die Werthe von y'' haben folglich für beide Curvenzweige daſſelbe Zeichen, welche daher ihre Concavität nach demſelben Sinne kehren (Fig. 65).

Wenn man ſich vorſtellt, daß eine gerade Linie ſich in der Ebene einer Curve ſo bewegt, daß ſie dieſe Curve beſtändig berührt, ſo kann der Berührungspunkt als ein ſich auf der beweglichen geraden Linie bewegender Punkt betrachtet werden. Der Sinn der Geſchwindigkeit dieſes Punktes ändert ſich oder er nimmt auf der beweglichen geraden Linie eine entgegengeſetzte Bewegung an, wenn dieſe gerade Linie die Curve in einem Rückkehrpunkte der erſten, oder der zweiten Art berührt, und wenn der Rückkehrpunkt von der zweiten Art iſt, ſo ändert ſich auch der Sinn der Rotation der beweglichen geraden Linie auf der Ebene, wie bei den Inflexionspunkten.

§. 219. Kurz, wenn die Gleichung mit y', wovon bisher die Rede geweſen iſt, gleiche reelle Wurzeln hat, ſo können dieſe Wurzeln entweder vielfachen Berührungspunkten, oder Rückkehrpunkten, oder endlich conjugirten Punkten entſprechen. Derſelbe analytiſche Charakter muß dieſen drei Arten ſingulärer Punkte zukommen; denn man kann durch (α_1), (α_2) immer zwei Zweige der Curve (a) bezeichnen, welche reell, oder imaginär ſind, jenachdem die Function ψx imaginär, oder reell iſt. Es bezeichne φx eine reelle Function und wird in dem gegenwärtigen Falle angenommen, daß der Werth, welcher ψx verſchwinden macht, auch $\psi' x$ zu Null macht. Es ſei ξ dieſer Werth, ſo findet zwiſchen den beiden Curvenzweigen eine gewöhnliche Berührung der erſten, oder zweiten Art ſtatt, wenn ψx imaginär bleibt, wie wenig die Werthe von x auch größer, oder kleiner ſein mögen als ξ. Wenn ψx imaginär iſt für Werthe von x, welche beliebig wenig kleiner ſind, als ξ und reell für Werthe von x, welche beliebig wenig größer ſind, als ξ, oder umgekehrt; ſo iſt der ſinguläre Punkt ein Rückkehrpunkt der erſten, oder zweiten Art. Wenn endlich der Werth von ψx für die Werthe von x, welche unmittelbar größer, oder kleiner ſind, als ξ, reell bleibt, ſo ſind die beiden Curvenzweige imaginär, und der ſinguläre Punkt wird ein conjugirter. Nichts iſt leichter, als die Unterſcheidung dieſer drei Fälle, wenn die Function ψx explicite durch die Auflöſung der gegebenen Gleichung gegeben iſt, und wenn dieſes nicht der Fall iſt, ſo muß man zu Verſuchen ſeine Zuflucht nehmen, oder die Curve in der Nähe des ſingulären Punktes, deſſen Beſchaffenheit man wiſſen will, durch Punkte conſtruiren. Durch das vorhin angegebene Verfahren werden die zweifelhaften Fälle ſo viel als möglich beſeitigt, und in den Fällen, wo dieſe Unbeſtimmtheit dem Gegenſtande nothwendig inhärirt, wird der Grund derſelben angegeben.

§. 220. Die Berührungs- oder Rückkehrpunkte der erſten Art unterſcheiden ſich auch von denen der zweiten Art noch durch ein anderes Merkmal. Denn es ſeien ξ, η' die Werthe von x und y', welche den Berührungs- oder Rückkehrpunkten der erſten Art entſprechen, ſo hat y' für die dem Werthe ξ

benachbarten Werthe von x zwei Werthe, wovon der eine etwas größer und der andere etwas kleiner, als η' iſt, und hieraus erhellet leicht, daß die abgeleitete Curve, deren veränderliche Coordinaten x, y' ſind, im Punkte (ξ, η') eine auf der Axe der x ſenkrechte Tangente hat, wofern der Punkt (ξ, η') nicht zufällig ſelbſt ein Berührungs- oder Rückkehrpunkt der erſten Art und die Tangente in dieſem Punkte (ξ, η') nicht zu der Axe der x parallel iſt. Die Ableitung y'' iſt alſo für die einem Berührungs- oder Rückkehrpunkte der erſten Art entſprechenden Werthe von x gewöhnlich unendlich, oder zuweilen auch Null. Es findet in dieſer Beziehung zwiſchen den in Rede ſtehenden Punkten und den Inflexionspunkten, für welche die Ableitung y'' gewöhnlich Null und zuweilen unendlich iſt, die Reciprocität ſtatt.

Der Punkt, welchem auf der abgeleiteten Curve ein Rückkehrpunkt der erſten, oder der zweiten Art entſpricht, kann ſelbſt ein Rückkehrpunkt der erſten oder zweiten Art ſein, und es gibt kein Mittel mehr, auf eine allgemeine Weiſe eine Ableitungsordnung n von ſolcher Beſchaffenheit anzugeben, daß die Ableitung $y^{(n)}$ nothwendig unendlich, oder Null ſein muß.

§. 221. Wir wollen dieſes Kapitel mit der Angabe des zwiſchen den ſingulären Punkten einer ebenen Curve und denen ihrer Evolute ſtattfindenden Zuſammenhanges beſchließen. Die Formel:

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

zeigt, daß ϱ unendlich oder die Krümmung Null wird, wenn y'' verſchwindet, was im Allgemeinen in den Inflexionspunkten der Evolvente ſtattfindet. Die Normalen der Evolvente in den Inflexionspunkten ſind alſo im Allgemeinen Aſymptoten der Evolute (Fig. 66), wogegen die Inflexionspunkte der Evolute Rückkehrpunkten der zweiten Art der Evolvente entſprechen (Fig. 67).

Die ſingulären Punkte der Evolvente, worin der Krümmungshalbmeſſer durch ein Maximum, oder Minimum geht, entſprechen im Allgemeinen Rückkehrpunkten der erſten Art der Evolute (Fig. 52 und 53). Ausnahsmweiſe kann es auch geſchehen, daß dieſe Punkte der Evolvente Punkte ſind, für welche y'' verſchwindet, ohne daß eine Inflexion ſtattfindet, und alsdann ſind die Normalen in dieſen Punkten Aſymptoten der Evolute.

In den Punkten, worin die Evolvente Rückkehrpunkte der erſten Art hat, wird y'' gewöhnlich unendlich, ϱ iſt Null und die Evolute ſchneidet die Evolvente unter rechten Winkeln (Fig. 54 und 69). Aber es kann zufällig auch geſchehen, daß y'' verſchwindet und ϱ unendlich wird oder daß das Perpendikel auf der Tangente im Rückkehrpunkte der Evolvente eine Aſymptote der Evolute iſt. Wenn die Evolvente keine algebraiſche Curve iſt, ſo entſprechen ihren Stillſtands- oder Zerreißungspunkten eben ſolche Punkte der Evolute und den vorſpringenden Punkten der erſten Curve entſprechen Zerreißungspunkte der zweiten. Die Evolute bietet ebenfalls eine Zerreißung dar, oder ihre als Functionen der Abſciſſe x der Evolvente betrachteten veränderlichen Coordinaten erfahren eine Stetigkeitsunterbrechung der erſten Ordnung (§. 36), wenn die in dem Ausdrucke der Werthe dieſer Coordinaten vorkommende Function y'' eine Stetigkeitsunterbrechung derſelben Ordnung, oder wenn die Ordinate y der Evolvente eine Stetigkeitsunterbrechung der dritten Ordnung erfährt, ſo daß die Evolute ſo viele Zerreißungspunkte darbietet, als die Function y, welche die Ordinate der Evolvente ausdrückt, Stetigkeitsunterbrechungen der erſten, zweiten und dritten Ordnung erfährt. Die Stetigkeitsunterbrechung der dritten Ordnung einer beliebigen Function y wird alſo geometriſch durch eine Stetigkeitsunterbrechung der erſten Ordnung der Function dargeſtellt, welche die Krümmung der Linie mißt, wovon y die Ordinate iſt, oder durch eine Zerreißung

der Evolute dieſer Linie. Da man die Evolute der Evolute, u. ſ. f. ins Un endliche beſchreiben kann, ſo folgt, daß ſich die Stetigkeitsunterbrechung ein beliebigen Ordnung geometriſch definiren läßt, oder zur Anſchauung gebrac werden kann.

Die Evolvente jeder geſchloſſenen Curve ohne Biegungen, wie die de Kreiſes oder der Ellipſe, iſt eine ſpiralartige, aus einem doppelten Syſtem von Windungen gebildete Curve (Fig. 68); denn die Rotationsbewegung de Tangente der Evolute, vermöge welcher jeder Punkt der beweglichen Tangent mit der Evolute in Berührung kommt, wird weder in dem einen, noch in de andern Sinne durch etwas beſchränkt. Es ſei m der Punkt der Evolute, m welchem der Punkt der beweglichen Tangente, welcher die betrachtete Evolvent beſchreibt, bei der ſtetigen Rotationsbewegung der Tangente zuſammenfällt; e iſt klar, daß die beiden entgegengeſetzten Syſteme von Windungen, woraus di Evolvente beſteht, ſich im Punkte m vereinigen und daſelbſt einen Rückkehrpun der erſten Art haben.

Die Evolvente einer Curve, welche eine Aſymptote, aber keinen Inflexion punkt hat, wie die logarithmiſche Curve, oder ein Hyperbelzweig, bietet eine Rückkehrpunkt der erſten Art und einen Zerreißungspunkt dar. Es ſei M (Fig. 69) die Evolute, AS ihre Aſymptote und m der Punkt der Evolute, m welchem der die Evolvente $\mu m \nu$ beſchreibende Punkt der beweglichen Tangen zuſammenfällt; ſo hat dieſe letzte Curve offenbar in m einen Rückkehrpunkt de erſten Art. Wenn ſich ferner die bewegliche Tangente in dem Sinne mM a der Evolute verrückt, ſo nähert ſie ſich ohne Ende der Lage SA, ohne dieſ jemals zu erreichen. Es gibt alſo auf AS einen Punkt μ, welchem ſich de beſchreibende Punkt mit einer immer mehr und mehr verzögerten Bewegun nähert, ohne ihn jemals zu erreichen, und welcher folglich ein wahrer Schluß punkt der Evolvente iſt.

Die Schluß- oder Stillſtandspunkte können folglich Curven angehören deren Beſchreibung nach geometriſchen Bedingungen beſtimmt iſt, ſo daß di Exiſtenz dieſer ſingulären Punkte nicht blos eine Folge der Eigenthümlichkeiten des Verlaufes einer urſprünglich rein analytiſchen Function iſt (§. 209).

Fünftes Kapitel.

Grundbegriffe der Theorie der Curven von doppelter Krümmung.

§. 222. Eine Linie wird im Raume beſtimmt durch zwei Gleichunge zwiſchen den Coordinaten x, y, z, welche die Entfernungen eines beliebige Punktes der Linie von drei aufeinander ſenkrechten feſten Ebenen ausdrücken und umgekehrt kann das Syſtem zweier ſolcher Gleichungen durch eine i Raume beſchriebene Linie, deren rechtwinklige Coordinaten x, y, z ſind, da geſtellt werden. Die fragliche Linie im Raume wird auch graphiſch durch di beiden ebenen Curven beſtimmt, welche ihre Projectionen auf zwei der Coord natenebenen, z. B. auf den Ebenen der xy und xz ſind. Die Gleichunge der Projectionslinien werden erhalten, wenn man abwechſelnd z und y zwiſche den Gleichungen:

$$f(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0, \qquad (1)$$

welche die Linie im Raume beſtimmen, eliminirt.

Man kann dieſe Linie als den Durchſchnitt zweier cylindriſcher Flächen trachten, deren Baſen die Projectionslinien auf den Ebenen der xy und der x und deren gerade Erzeugungslinien reſp. zu den Axen der z und der y rallel ſind.

Im Allgemeinen ſind die auf dieſe Weiſe im Raume beſtimmten Linien cht *eben*, d. h. es liegen nicht blos alle ihre Punkte nicht in derſelben Ebene, ndern jeder *noch ſo kleine* Bogen derſelben kann nicht in *einer* Ebene egen, und man nennt ſie daher *Linien* oder *Curven von doppelter rümmung*, welche Benennung die Folge erklären und rechtfertigen wird. ermöge der beiden Gleichungen der Curve kann nur eine der drei Veränderchen x, y, z als unabhängig betrachtet werden, und die beiden andern, ſowie re Ableitungen aller Ordnungen, ſind entwickelte oder unentwickelte Functionen rſelben. Allein der Symmetrie der Formeln wegen, welche hier um ſo erthvoller iſt, da dieſe Formeln ziemlich zuſammengeſetzt ſind, wird es zweckäßig ſein, x, y, z als drei Functionen derſelben unabhängigen Veränderlichen zu behandeln. Zur Fixirung der Begriffe kann man ſich vorſtellen, daß t die eit bezeichnet, und daß die Curve durch einen beweglichen Punkt beſchrieben ird, deſſen Bewegung durch drei Gleichungen zwiſchen x, y, z, t beſtimmt ird. Wenn man zwei Verbindungen dieſer zu je zwei genommenen Gleichunen bildet, und t zwiſchen den beiden Gleichungen jeder Gruppe eliminirt, ſo halt man die beiden Gleichungen der Curve wieder.

§. 223. Wenn man die beiden auf der Curve liegenden Punkte (x, y, z), $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$) durch eine Sehne verbindet, ſo wird bekanntch die Länge derſelben ausgedrückt durch:

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

nd die Gleichungen ihrer Projectionen auf die Ebenen der xy und xz ſind:

$$\eta - y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot (\xi - x), \quad \zeta - z = \frac{\Delta z}{\Delta x} \cdot (\xi - x),$$

o ξ, η, ζ die veränderlichen Coordinaten bezeichnen. Endlich bildet dieſe Sehne mit den durch den Punkt (x, y, z) in dem Sinne der poſitiven Coordinaten zu den Axen der x, der y und der z gezogenen Parallelen, Winkel, eren Coſinus reſp. ausgedrückt werden durch:

$$\frac{\pm \Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}, \quad \frac{\pm \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}, \quad \frac{\pm \Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}$$

Wenn ſich der zweite Punkt dem erſten ohne Ende nähert, ſo nähert ſich die Sehne ohne Ende einer beſtimmten Lage, welche die der *Tangente* der Curve im Raume iſt. Zu gleicher Zeit nähern ſich die Projectionen des zweiten unktes auf denſelben Ebenen, und die Projection der Sehne nähert ſich einer eſtimmten Lage, welche die der Tangente der Projectionslinie iſt. Folglich nd die Tangenten der Projectionslinien die Projectionen der geraden Linie, elche im Raume die projectirte Linie berührt, und dieſe Tangente wird folgch durch das Syſtem der beiden Gleichungen:

$$\eta - y = \frac{dy}{dx} \cdot (\xi - x), \quad \zeta - z = \frac{dz}{dx} \cdot (\xi - x),$$

eſtimmt, welche die Gleichung:

$$\eta - y = \frac{dy}{dz} \cdot (\zeta - z).$$

zur Folge haben. Es iſt ſymmetriſcher und folglich eleganter, dieſe drei Gleichungen in die eine Formel:

$$\frac{dx}{\xi - x} = \frac{dy}{\eta - y} = \frac{dz}{\zeta - z} \qquad (2)$$

zuſammenzufaſſen, welche ſich nach Belieben wieder in zwei beſondere Gleichungen auf ſo viele verſchiedene Weiſen zerlegen läßt, als man aus drei Dingen Combinationen zu je zwei bilden kann. Die Formeln dieſer Art kommen beſonders bei den Anwendungen der Analyſis auf die Geometrie in drei Dimenſionen häufig vor.

Wenn α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche die Tangente der Curve im Raume mit den Axen der x, y, z in dem Sinne der poſitiven Coordinaten bildet, ſo hat man:

$$\cos.\alpha = \frac{\pm dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \quad \cos.\beta = \frac{\pm dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

$$\cos.\gamma = \frac{\pm dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \qquad (3)$$

oder wegen:

$$\cos.^2\alpha + \cos.^2\beta + \cos.^2\gamma = 1$$

auch:

$$\frac{dx}{\cos.\alpha} = \frac{dy}{\cos.\beta} = \frac{dz}{\cos.\gamma} = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

Unter der Länge des Bogens einer Curve von doppelter Krümmung verſteht man die Grenze, welcher ſich die Länge eines in den Curvenbogen beſchriebenen windſchiefen Polygonſtückes ohne Ende nähert, wenn die Anzahl der Seiten deſſelben ohne Ende zu- und jede Seite ohne Ende abnimmt, indem die Endpunkte des Curvenbogens mit denen des Polygonſtückes zuſammen fallen. Wenn demnach s die Länge des Bogens einer Curve von doppelter Krümmung bezeichnet, indem dieſe Länge von einem auf der Curve willkührlich genommenen Punkte aus gezählt wird, ſo hat man:

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \qquad (a)$$

je nachdem der Bogen mit der Abſciſſe zu- oder abnimmt, und das Differenzial ds poſitiv oder negativ iſt. Ferner hat man auch:

$$\cos.\alpha = \pm\frac{dx}{ds}, \quad \cos.\beta = \pm\frac{dy}{ds}, \quad \cos.\gamma = \pm\frac{dz}{ds}.$$

Wir betrachten die Gleichung (a) als die analytiſche Definition der Größe s (§. 174). Man gelangt dazu auch, wenn man ſich vorſtellt, daß der Theil der cylindriſchen Fläche, welche den Bogen s enthält und ſeine Projection u auf der Ebene der xy auf der durch die Tangente an dem einen Endpunkte des Bogens s und durch die Tangente an dem entſprechenden Endpunkte des Bogens u gelegten Ebene ausgebreitet wird, wodurch der Bogen s, ohne daß ſeine Länge ſich ändert, ein ebener Curvenbogen und der Bogen u, ebenfalls ohne Aenderung ſeiner Länge, ein Stück einer geraden Linie wird, und nach dem für ebene Curven Geſagten, hat man:

$$du^2 = dx^2 + dy^2, \quad ds^2 = du^2 + dz,$$

folglich:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

§. 224. Unter der Berührungsebene einer Curve von doppelter Krümmung verſteht man jede Ebene, welche die Tangente dieſer Curve enthält; und folglich hat jede Curve von doppelter Krümmung in jedem ihrer Punkte unendlich viele Berührungsebenen. Auch hat jede Curve von doppelter Krümmung in jedem ihrer Punkte unendlich viele Normalen oder gerade Linien, welche im Berührungspunkte auf der Tangente ſenkrecht ſind, und die Ebene, welche alle dieſe Normalen enthält, iſt die Normalebene der Curve in demſelben Punkte. Wenn man die veränderlichen Coordinaten der Normalebene im Punkte (x, y, z) mit ξ, η, ζ bezeichnet, ſo iſt ihre Gleichung nach den Principien der analytiſchen Geometrie, und vermöge der Gleichungen (2):

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0. \qquad (b)$$

Die Differenzirung der Gleichungen (1) gibt:

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0, \quad \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0,$$

woraus vermöge der Gleichungen (2) und (3) folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dx}(\xi - x) + \frac{df}{dy}(\eta - y) + \frac{df}{dz}(\zeta - z) &= 0, \\ \frac{df}{dx}(\xi - x) + \frac{df}{dy}(\eta - y) + \frac{df}{dz}(\zeta - z) &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dx}\cos.\alpha + \frac{df}{dy}\cos.\beta + \frac{df}{dz}\cos.\gamma &= 0, \\ \frac{df}{dx}\cos.\alpha + \frac{df}{dy}\cos.\beta + \frac{df}{dz}\cos.\gamma &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$\frac{df}{dy}\cdot\frac{df}{dz} - \frac{df}{dz}\cdot\frac{df}{dy} = L,$$

$$\frac{df}{dz}\cdot\frac{df}{dx} - \frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dz} = M,$$

$$\frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dy} - \frac{df}{dy}\cdot\frac{df}{dx} = N,$$

ſo geben die Gleichungen (5):

$$\frac{\cos.\alpha}{L} = \frac{\cos.\beta}{M} = \frac{\cos.\gamma}{N} = \pm\frac{1}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

Die Gleichungen der Tangente ſind auch vermöge der Gleichungen (4):

$$\frac{\xi - x}{L} = \frac{\eta - y}{M} = \frac{\zeta - z}{N},$$

und die der Normalebene wird:

$$L(\xi - x) + M(\eta - y) + N(\zeta - z) = 0.$$

§. 225. Wir wollen uns vorſtellen, daß von dem Punkte (x, y, z) aus, welcher in der Figur durch m (Fig. 70) bezeichnet iſt, auf der Curve eine Reihe einander ſehr nahe liegender Punkte $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots$ genommen und durch Sehnen verbunden ſeien, ſo daß ein windſchiefes Vieleck entſteht, deſſen Umfang ſich der Curve deſto mehr nähert, je näher die Winkelſpitzen deſſelben aneinander liegen. Zwei aufeinander folgende Seiten mm_1, m_1m_2

dieſes Vieleckes beſtimmen eine Ebene, deren Lage im Raume etwas verände wird, wenn ſich die Punkte m_1, m_2 dem Punkte m immer mehr und meh nähern, und welche ſich umſoweniger verrückt, vorausgeſetzt, daß keine Stetig keitsunterbrechung ſtattfindet, jemehr die Punkte m, m_1, m_2 einander ſcho genähert ſind. Dieſe Ebene nähert ſich im Allgemeinen einer beſtimmten Lage welche man durch Rechnung finden kann, wenn man die Gleichung der Eben aufſtellt und dabei die Längen mm_1, m_1m_2 als unendlich kleine Größen be handelt. Man ſagt alsdann, daß die Ebene durch drei einander unendlic nahe liegende Punkte gehe, und es iſt gleichgültig, wofern die Curve im Punkt m keine Stetigkeitsunterbrechung der zweiten oder dritten Ordnung erfährt, o man die Punkte m_1, m_2 beide dieſſeits, oder beide jenſeits, oder den eine dieſſeits und den andern jenſeits des Punktes m nimmt.

Unter Stetigkeitsunterbrechungen der Curve verſtehen wir die Stetigkeits unterbrechungen der als Functionen einer unabhängigen Veränderlichen t be trachteten Coordinaten x, y, z, wenn dieſe Stetigkeitsunterbrechungen nicht vo der willkührlichen Richtung der Coordinatenaxen abhängig ſind.

Die Ebene, welche durch zwei einander unendlichnahe liegende Punkt m, m_1 geht, geht durch die Tangente oder befindet ſich unter den Berührungs ebenen der Curve im Punkte m. Die Ebene dagegen, welche durch dre einander unendlich nahe liegende Punkte m, m_1, m_2 geht, wird die Oscu lations- oder Krümmungsebene der Curve im Punkte m genannt, nac der Analogie mit dem Krümmungskreiſe einer ebenen Curve, und dieſe Eben kann als durch die Bedingung beſtimmt, angeſehen werden, daß ſie drei ein ander unendlich nahe liegende Punkte mit der Curve gemein hat (§. 204).

Es ſei **A** eine beliebige durch den Punkt m gelegte Ebene und m_1 ei Punkt der Curve, welcher von dem Punkte m um eine ſehr kleine Größe de erſten Ordnung entfernt iſt (§. 45), ſo iſt der Abſtand des Punktes m_1 vo der Ebene **A** im Allgemeinen eine Größe von derſelben Ordnung, als di Sehne mm_1, d. h. eine ſehr kleine Größe der erſten Ordnung. Es ſei B eine Berührungsebene der Curve mm_1, ſo iſt der Abſtand des Punktes m von der Ebene **B** eine ſehr kleine Größe der zweiten Ordnung. Endlic bezeichne **C** die Krümmungsebene im Punkte m, ſo wird der Abſtand de Punktes m_1 von der Ebene **C** eine ſehr kleine Größe der dritten Ordnung Man kann alſo immer den Punkt m_1 ſo nahe bei dem Punkte m annehmen daß er einer beliebigen Berührungsebene näher iſt, als jeder andern Ebene und der Krümmungsebene näher, als jeder andern Berührungsebene. De Kürze wegen übergehen wir den ſtrengen Beweis dieſer verſchiedenen Sätze welcher ſich aus ähnlichen Rechnungen, wie die in §. 203 u. fgg., deren wi aber in der Folge nicht bedürfen, ergibt.

§. 226. Wenn man die veränderlichen Coordinaten der Krümmungsebene im Punkte (x, y, z) mit ξ, η, ζ bezeichnet, ſo iſt ihre Gleichung von de Form:

$$\mathbf{X}(\xi - x) + \mathbf{Y}(\eta - y) + \mathbf{Z}(\zeta - z) = 0, \qquad (c)$$

wo **X**, **Y**, **Z** noch unbekannte und zu beſtimmende Coefficienten ſind. Dieſ Gleichung muß auch ſtattfinden, wenn man darin $x + dx$, $y + dy$, $z + d$ reſp. für x, y, z ſetzt, und man hat folglich:

$$\mathbf{X}dx + \mathbf{Y}dy + \mathbf{Z}dz = 0. \qquad (c')$$

Endlich müſſen dieſe beiden Gleichungen noch ſtattfinden, wenn man darin für

$$x, y, z; \quad dx, dy, dz$$

reſp. ſetzt:

$$x + dx, y + dy, z + dz; \quad dx + d^2x, dy + d^2y, dz + d^2z,$$

welches gibt:

$$Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z = 0. \qquad (c'')$$

Wenn man dieſe drei Gleichungen ſo miteinander verbindet, daß zwei der drei Unbekannten X, Y, Z eliminirt werden, ſo verſchwindet die dritte zu gleicher Zeit und man erhält für die Gleichung der Krümmungsebene:

$$(dyd^2z - dzd^2y)(\xi - x) + (dzd^2x - dxd^2z)(\eta - y) + (dxd^2y - dyd^2x)(\zeta - z) = 0;$$

aber der Kürze wegen kann man die Gleichung der Krümmungslinie auch unter der Form (c) beibehalten, indem man ſetzt:

$$X = dyd^2z - dzd^2y,\ Y = dzd^2x - dxd^2z,\ Z = dxd^2y - dyd^2x. \qquad (\gamma)$$

§. 227. Für die Gleichung der Normalebene im Punkte (x, y, z) haben wir gefunden:

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0, \qquad (b)$$

und wenn man die Gleichung der durch einen unendlich nahe liegenden Punkt gehenden Normalebene haben will; ſo muß man zu dem erſten Theile der vorhergehenden Gleichung ihr Differenzial in Beziehung auf alle Veränderlichen addiren. Für die auf der geraden Durchſchnittslinie der beiden einander unendlich nahe liegenden Normalebenen liegenden Punkte hat man folglich außer der vorhergehenden Gleichung noch die ſich durch Differenzirung daraus ergebende Gleichung:

$$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0,$$

oder:

$$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z - ds^2 = 0. \qquad (b')$$

Dieſe Durchſchnittslinie der beiden Normalebenen trifft die Krümmungsebene in einem Punkte (ξ, η, ζ), deſſen Coordinaten den drei Gleichungen (b), (b'), (c) genügen müſſen. Dieſer Punkt iſt der Mittelpunkt eines Kreiſes, welcher durch drei einander unendlich nahe liegende Punkte der Curve geht, oder der Mittelpunkt des Krümmungskreiſes. In der That iſt die Conſtruction des Krümmungskreiſes, da bei der geometriſchen Beſtimmung des Krümmungskreiſes einer ebenen Curve nur zwei aufeinanderfolgende unendlich kleine Elemente der Curve in Betracht kommen, und zwei aufeinanderfolgende Elemente einer beliebigen Curve von doppelter Krümmung auch in derſelben Ebene liegen, oder dieſe Ebene, welche die Krümmungsebene iſt, beſtimmen, ſowohl auf Curven von doppelter Krümmung, als auf ebene Curven anwendbar. Setzt man:

$$\rho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2,$$

ſo bildet der Halbmeſſer ρ des Krümmungskreiſes mit den Parallelen zu den Axen der x, y, z die Winkel λ, μ, ν, welche durch folgende Gleichungen beſtimmt werden:

$$\pm\rho\cos.\lambda = \xi - x,\ \pm\rho\cos.\mu = \eta - y,\ \pm\rho\cos.\nu = \zeta - z.$$

Die Krümmung der Curve in ihrer Krümmungsebene hat den Ausdruck $\frac{1}{\rho}$ zum Maße, und der Contingenzwinkel $d\tau$ (§. 193) iſt mit ρ durch folgende Gleichung verbunden:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds} \qquad (d)$$

§. 228. Die Gleichungen (b), (b'), (c) geben unmittelbar durch Elimination der Binome $\xi - x$, $\eta - y$:

$$\zeta - z = \frac{ds^2 (Xdy - Ydx)}{X(dyd^2z - dzd^2y) + Y(dzd^2x - dxd^2z) + Z(dxd^2y - dyd^2x)}$$
$$= \frac{ds^2 (Xdy - Ydx)}{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

und hieraus ergibt ſich durch bloße Vertauſchung der Buchſtaben:

$$\eta - y = \frac{ds^2 (Zdx - Xdz)}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\xi - x = \frac{ds^2 (Ydz - Zdy)}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Ferner erhält man:

$$\varrho = \pm \frac{ds \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2) ds^2 - (Xdx + Ydy + Zdz)^2}}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

oder wegen der Gleichung (c'):

$$\varrho = \pm \frac{ds^3}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}. \qquad (\varrho_1)$$

Durch eine ähnliche Rechnung, wie die in §. 196 findet man:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = ds^2 (d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2),$$

und:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = ds^4 \left\{ \left(d \cdot \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy^2}{ds} \right) \right\}.$$

Man kann alſo dem Ausdrucke des Krümmungshalbmeſſers die beiden folgenden Formen geben:

$$\varrho = \pm \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z - d^2s^2}}, \qquad (\varrho_2)$$

und:

$$\varrho = \pm \frac{ds}{\sqrt{\left(d \cdot \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(d \cdot \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(d \cdot \frac{dz}{ds} \right)^2}}. \qquad (\varrho_3)$$

Ferner fände man unmittelbar:

$$Xdy - Ydx = d^2z (dx^2 + dy^2) - dz (dxd^2x + dyd^2y) = d^2z (ds^2 - dz^2)$$
$$- dz (dsd^2s - dzd^2z) = d^2z ds^2 - dz ds d^2s = ds^3 d \cdot \frac{dz}{ds},$$

und folglich:

$$\xi - x = \varrho^2 \cdot \frac{d \cdot \frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \eta - y = \varrho^2 \cdot \frac{d \cdot \frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \zeta - z = \varrho^2 \cdot \frac{d \cdot \frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Man hat alſo:

$$\cos.\lambda = \pm\rho\frac{\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{ds}}}{\mathrm{ds}},\quad \cos.\mu = \pm\rho\frac{\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{ds}}}{\mathrm{ds}},\quad \cos.\nu = \pm\rho\frac{\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{ds}}}{\mathrm{ds}}.$$

Endlich gibt die Formel (d) für den Werth des Contingenzwinkels $\mathrm{d}\tau$:

$$\mathrm{d}\tau = \pm\sqrt{\left(\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{ds}}\right)^2 + \left(\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{ds}}\right)^2 + \left(\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{ds}}\right)^2}. \qquad (\tau)$$

Dieſe letzte Formel, und mithin die Formel (ϱ_3) erhält man direkt durch eine ſehr einfache Rechnung. Denn es ſeien:

$$\cos.\alpha,\ \cos.\beta,\ \cos.\gamma;$$

$$\cos.\alpha + \Delta\cos.\alpha,\ \cos.\beta + \Delta\cos.\beta,\ \cos.\gamma + \Delta\cos.\gamma,$$

die Coſinus der Winkel, welche die durch den Anfangspunkt parallel zu den Tangenten der Curve in den Punkten:

$$(x, y, z),\ (x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z),$$

gezogenen geraden Linien, reſp. mit den Axen der x, y, z bilden und τ bezeichne den zwiſchen dieſen beiden geraden Linien liegenden endlichen Winkel; ſo hat man nach den bekannten Formeln der analytiſchen Geometrie:

$$\cos.\tau = \cos.\alpha(\cos.\alpha + \Delta\cos.\alpha) + \cos.\beta(\cos.\beta + \Delta\cos.\beta) + \cos.\gamma(\cos.\gamma + \Delta\cos.\gamma),$$

$$1 = \cos.^2\alpha + \cos.^2\beta + \cos.^2\gamma,$$

$$1 = (\cos.\alpha + \Delta\cos.\alpha)^2 + (\cos.\beta + \Delta\cos.\beta)^2 + (\cos.\gamma + \Delta\cos.\gamma)^2;$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} 2(1 - \cos.\tau) = {} & \cos.^2\alpha - 2\cos.\alpha(\cos.\alpha + \Delta\cos.\alpha) + (\cos.\alpha + \Delta\cos.\alpha)^2 \\ & + \cos.^2\beta - 2\cos.\beta(\cos.\beta + \Delta\cos.\beta) + (\cos.\beta + \Delta\cos.\beta)^2 \\ & + \cos.^2\gamma - 2\cos.\gamma(\cos.\gamma + \Delta\cos.\gamma) + (\cos.\gamma + \Delta\cos.\gamma)^2 \end{aligned}$$

oder vielmehr:

$$\left(2\sin.\frac{\tau}{2}\right)^2 = (\Delta\cos.\alpha)^2 + (\Delta\cos.\beta)^2 + (\Delta\cos.\gamma)^2$$

$$= \left(\Delta\cdot\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{ds}}\right)^2 + \left(\Delta\cdot\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{ds}}\right)^2 + \left(\Delta\cdot\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{ds}}\right)^2.$$

Wenn nun der Winkel τ unendlich klein wird, was wir ausdrücken, wenn wir $\mathrm{d}\tau$ für τ ſetzen; ſo muß auch in der vorhergehenden Gleichung d für Δ geſetzt werden, und da der Sinus eines unendlich kleinen Bogens mit dieſem Bogen zuſammenfällt, ſo kommt man wieder auf die Formel (τ).

§. 229. Wir wollen nun annehmen, was immer geſtattet iſt, daß die Krümmungsebene zu der der xy parallel ſei, ſo hat man $\mathrm{dz} = 0$, $\mathrm{d}^2z = 0$, folglich $X = 0$, $Y = 0$ und:

$$\varrho = \pm\frac{(\mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{dx}\,\mathrm{d}^2y - \mathrm{dy}\,\mathrm{d}^2x}$$

aber dieſes iſt der Ausdruck des Krümmungshalbmeſſers der Projection der Curve von doppelter Krümmung auf die Ebene der xy (§. 196), und für $\xi - x$, $\eta - y$ fände man ebenfalls Werthe, welche mit den Werthen der Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes einer ebenen Curve übereinſtimmen. Hieraus folgt: daß der Krümmungshalbmeſſer einer beliebigen im Raume beſchriebenen Curve der Größe und Richtung nach mit

dem Krümmungshalbmeſſer der Projection dieſer Curve auf die Krümmungsebene übereinſtimmt.

§. 230. Wenn λ', μ', ν' die Winkel bezeichnen, welche die Normale auf der Krümmungsebene, reſp. mit den Parallelen zu der Axe der x, der y und z bilden, ſo hat man:

$$\cos.\lambda' = \pm\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\quad \cos.\mu' = \pm\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos.\nu' = \pm\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

Bezeichnet ferner $d\theta$ den unendlich kleinen Winkel, welchen die Normalen der einander unendlich naheliegenden beiden Krümmungsebenen, wovon ſich die eine auf den Punkt (x, y, z) und die andern auf den Punkt $(x+dx, y+dy, z+dz)$ bezieht, miteinander bilden; ſo hat man nach dem vorhin Bewieſenen:

$$d\theta^2 = (d\cdot\cos.\lambda')^2 + (d\cdot\cos.\mu')^2 + (d\cdot\cos.\nu')^2$$

$$= \left(d\cdot\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\right)^2$$

$$= \frac{(X^2+Y^2+Z^2)(dX^2+dY^2+dZ^2)-(XdX+YdY+ZdZ)^2}{(X^2+Y^2+Z^2)^2}$$

$$= \frac{(XdY-YdX)^2+(ZdX-XdZ)^2+(YdZ-ZdY)^2}{(X^2+Y^2+Z^2)^2}.$$

Ferner findet man:

$$dX = dyd^3z - dzd^3y,\quad dY = dzd^3x - dxd^3z,\quad dZ = dxd^3y - dyd^3x,$$

$$\frac{XdY-YdX}{dz} = \frac{ZdX-XdZ}{dy} = \frac{YdZ-ZdY}{dx}$$

$$= dz(d^2xd^3y - d^2yd^3x) + dy(d^2zd^3x - d^2xd^3z) + dx(d^2yd^3z - d^2zd^3y),$$

und folglich:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{dz(d^2xd^3y-d^2yd^3x)+dy(d^2zd^3x-d^2xd^3z)+dx(d^2yd^3z-d^2zd^3y)}{(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dxd^2y-dyd^2x)^2}.$$

Sowie nun der Ausdruck:

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\varrho},$$

worin $d\tau$ den von zwei einander unendlich nahe liegenden Tangenten gebildeter Contingenzwinkel bezeichnet, die Krümmung der Curve in ihrer Krümmungsebene oder ihre erſte Krümmung mißt, ebenſo iſt der Ausdruck:

$$\frac{d\theta}{ds},$$

worin $d\theta$ den von zwei aufeinander folgenden Krümmungsebenen gebildeten Flexionswinkel bezeichnet, das Maß der zweiten Krümmung der Curve, wodurch die Benennung „Linien von doppelter Krümmung", welche man den nicht in derſelben Ebene liegenden Curven beilegt, gerechtfertigt wird.

n ſich die Rectification einer Curve von doppelter Krümmung vorzuſtel-
m man ſich denken, daß die erſte Krümmungsebene auf die zweite, dieſe
dritte, u. ſ. f. niedergeſchlagen werde, ſo daß die Linie in eine ebene
verwandelt wird, und dann, daß die erſte Tangente auf die zweite, dieſe
dritte, u. ſ. f. ebenfalls niedergeſchlagen werde, ſo daß die ebene Curve
gerade Linie verwandelt wird, ohne daß die Länge der Elemente der
zlichen Curve durch dieſe doppelte Operation verändert iſt.
irch eine umgekehrte Operation oder durch zwei aufeinander folgende
ien könnte man alſo auch von der geraden Linie zu einer beliebigen im
beſchriebenen Curve übergehen.
an ſieht, daß der Ausdruck der zweiten Krümmung von den Differen-
er dritten Ordnung der Coordinaten x, y, z abhängt, während der
t der erſten Krümmung blos von den Differenzialen der erſten und
n Ordnung abhängig iſt.

231. Die zweite Biegung (Krümmung) verſchwindet und ändert im
inen das Zeichen, wenn man hat:

$$dx(d^2yd^3z-d^2zd^3y)+dy(d^2zd^3x-d^2xd^3z)+dz(d^2xd^3y-d^2yd^3x)=0, \quad (e)$$

n ſagt alsdann, die Curve erfahre eine einfache Inflexion. Wenn
dingungsgleichung für alle Werthe von x, y, z erfüllt wird, ſo iſt die
ine ebene.
nn man x zur unabhängigen Veränderlichen nimmt, ſo wird die Glei-
e) auf die ſehr einfache Form:

$$y''z''' - z''y''' = 0$$

Nach den Gleichungen (d) und (ϱ_1) verſchwindet die erſte Biegung,
an zu gleicher Zeit hat:

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2x}{dx}=\frac{d^2y}{dy}=\frac{d^2z}{dz}. \quad (f)$$

eſe Bedingungsgleichungen reduciren ſich auf $y''=0$, $z''=0$, wenn
nabhängigen Veränderlichen genommen wird. Hiernach iſt klar, daß,
e Gleichungen (f) erfüllt werden, es die Gleichung (e) ebenfalls wird;
n darf daraus nicht mit einigen Schriftſtellern ſchließen, daß die durch
ichungen (f) charakteriſirte Inflexion der erſten Krümmung nothwendig
lenz einer doppelten Inflexion zur Folge habe. Es folgt daraus
aß der weiter oben angegebene Ausdruck von $\frac{d\theta}{ds}$ unter der unbeſtimm-

m $\frac{0}{0}$ erſcheint, und um den wahren Werth deſſelben bequemer zu
n, wollen wir x zur unabhängigen Veränderlichen nehmen; ſo haben wir

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{y''z'''-z''y'''}{(y'z''-z'y'')^2+y''^2+z''^2}.$$

hler und Nenner dieſes Bruches verſchwinden für $y''=0$, $z''=0$,
elbe würde mit ihren Ableitungen der erſten Ordnung in Beziehung
unabhängige Veränderliche x der Fall ſein. Aber wenn man zu den
gen der zweiten Ordnung übergeht, ſo erhält man:

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{y'''z^{IV}-z'''y^{IV}}{(y'z'''-z'y''')^2+y'''^2+z'''^2}.$$

Werth nur unbeſtimmt werden könnte, wenn man zu gleicher Zeit
, $z'''=0$ hätte, und welcher im Allgemeinen von Null verſchieden iſt.

Daſſelbe erhellet auch aus der Figur; denn es ſeien $_1m$, m, m_1, m_2 (Fig. 70) vier aufeinander folgende Winkelſpitzen des windſchiefen Vielecks mit unendlich kleinen Seiten, welches man für die Curven von doppelter Krümmung ſubſtituirt; ſo kann man die durch die Punkte $_1m$, m, m_1 gehende Ebene als die Krümmungsebene im Punkte m und die durch die Punkte m, m_1, m_2 gehende Ebene als die Krümmungsebene im Punkte m_1 betrachten (§. 225). Dieſe beiden Ebenen ſchneiden ſich nach einer geraden Linie mO. Nun kann man aber, ohne die gegenſeitige Neigung der beiden Ebenen zu verändern, indem man blos ihre Durchſchnittslinie verrückt, die Seite mm_1 in die Verlängerung der Seite $_1mm$ bringen, wodurch der Contingenzwinkel in m verſchwindet, wobei aber der Werth des Winkels der zweiten Biegung ganz ungeändert bleibt.

Wenn jedoch den Gleichungen (f) für alle Werthe von x, y, z genügt wird, ſo iſt die Linie eine gerade, und folglich verſchwindet der Winkel der zweiten Biegung ebenſowohl, als der Contingenzwinkel.

§. 232. Eine im Raume beſchriebene Curve kann als die Umhüllungslinie aller ihrer Tangenten, oder aller geraden Linien, womit ihre Tangente ſucceſſive zuſammenfällt, indem ſie ſich nach einem durch die Form der Curve gegebenen Geſetze im Raume bewegt, betrachtet werden (§. 189). Aber das Umgekehrte findet nicht ſtatt, und eine gerade Linie, welche ſich willkührlich im Raume bewegt, kann nicht haben, und hat auch im Allgemeinen nicht eine Umhüllungslinie, welche ſie in ihren verſchiedenen Bogen ſucceſſive in verſchiedenen Punkten berührt. Es ſeien, größerer Allgemeinheit wegen, die Gleichungen einer beliebigen Linie folgende:

$$f(\xi, \eta, \zeta, \alpha) = 0, \; f(\xi, \eta, \zeta, \alpha) = 0, \qquad (\alpha)$$

worin ξ, η, ζ die veränderlichen Coordinaten und α einen willkührlichen Parameter bezeichnen, deſſen ſtetige Veränderung die ſtetige Veränderungen beſtimmen, welche die Linie in ihrer Form und Lage erfahren kann; ſo werden die Gleichungen der Umhüllungslinie zwiſchen ξ, η, ζ, wenn ſie exiſtirt, durch die Elimination von α zwiſchen den beiden vorhergehenden Gleichungen und ihren Ableitungen in Beziehung auf α, nämlich:

$$\frac{df}{d\alpha} = 0, \; \frac{df}{d\alpha} = 0 \qquad (\alpha')$$

gegeben. Allein man hätte auf dieſe Weiſe mehr Gleichungen, als zur Beſtimmung der beiden Gleichungen der geſuchten Umhüllungslinie erforderlich ſind, wofern der aus den erſten Gleichungen (α), (α') als Function von ξ, η, ζ abgeleitete Werth von α nicht für alle Werthe der Coordinaten dem Werthe gleich wäre, welchen man erhielte, wenn man α zwiſchen den beiden letzten Gleichungen derſelben Gruppen eliminirte.

Wir wollen dieſes auch auf die geraden Durchſchnittslinien zweier einander unendlich nahe liegender Normalebenen einer gegebenen Curve anwenden. Dieſe geraden Linien ſind offenbar auf den entſprechenden Krümmungsebenen ſenkrecht und der Winkel, welchen ſie miteinander bilden, wenn ſie einander unendlich nahe kommen, iſt genau der weiter oben mit $d\theta$ bezeichnete Winkel. Für die Gleichungen dieſer dem Punkte (x, y, z) entſprechenden geraden Linien zwiſchen ξ, η, ζ haben wir in §. 227 gefunden:

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0, \qquad (b)$$

$$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z - ds^2 = 0. \qquad (b')$$

Die unabhängige Veränderliche t, wovon x, y, z Functionen ſind (§. 222), hängt von dem vorhin mit α bezeichneten veränderlichen Parameter ab, oder

was daſſelbe iſt, man kann annehmen, daß ſich α mit t ändert. Nun wollen wir aber bemerken, daß die Gleichung (b') aus der Gleichung (b) bereits durch eine Differenzirung in Beziehung auf die als Functionen von t betrachteten Veränderlichen x, y, z abgeleitet iſt. Wenn man folglich die Gleichungen (b), (b') nochmals in Beziehung auf t differenzirt, ſo wird nur noch eine neue Gleichung, nämlich:

$$(\xi-x)d^3x+(\eta-y)d^3y+(\zeta-z)d^3z-3(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)=0 \quad (b'')$$

eingeführt, und wir kommen folglich auf den Ausnahmefall der Exiſtenz einer Umhüllungslinie. Es gibt alſo eine Curve, deren Tangenten die Normalen auf den Krümmungsebenen der erſten Curve ſind, indem jede dieſer Normalen der Durchſchnitt zweier aufeinanderfolgender Normalebenen iſt. Nach Fourier's Bemerkung iſt der Contingenzwinkel oder der Winkel der erſten Biegung auf der zweiten Curve, dem Winkel der zweiten Biegung in dem entſprechenden Punkte der erſten Curve gleich. Um von dieſem umgekehrten Satze, welcher allein des Beweiſes bedarf, einen ſolchen zu geben, wollen wir bemerken, daß die Tangenten der erſten Curve Winkel miteinander bilden, welche den von den Normalebenen gebildeten Winkeln gleich ſind, und daß die Normalebene der erſten Curve die Krümmungsebene der zweiten iſt. Denn die Gleichung (b) iſt die der Normalebene, und dieſe Gleichung findet vermöge der Gleichungen (b'), (b'') noch ſtatt, wenn man darin ſucceſſive $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ und dann $x+2dx+d^2x$, $y+2dy+d^2y$, $z+2dz+d^2z$ reſp. für x, y, z ſetzt, ſo daß dieſe Ebene drei einander unendlich nahe liegende Punkte der Curve enthält, deren veränderliche Coordinaten ξ, η, ζ ſind.

§. 233. Wenn man die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes mit ξ, η, ζ bezeichnet, ſo hat man zur Beſtimmung dieſer drei Coordinaten die Gleichungen (b), (b') und außerdem die Gleichung der Krümmungsebene:

$$X(\xi-x)+Y(\eta-y)+Z(\zeta-z)=0. \quad (c)$$

Wenn man ſich alſo die Coordinaten x, y, z und ihre Differenziale der beiden erſten Ordnungen als Functionen einer unabhängigen Veränderlichen t ausgedrückt denkt, ſo braucht man nur noch t zwiſchen dieſen drei Gleichungen zu eliminiren, um zwei Gleichungen zwiſchen ξ, η, ζ zu erhalten, welche die Gleichungen der Linie ſind, worauf alle Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Curve liegen.

Da ξ, η, ζ Functionen von t ſind, ſo können wir die Gleichung (b) differenziren, indem wir alle darin vorkommenden Größen ſich ändern laſſen, und alsdann erhalten wir wegen der Gleichung (b'):

$$d\xi dx+d\eta dy+d\zeta dz=0, \quad (g)$$

woraus folgt, daß die durch den Punkt (ξ, η, ζ) gezogene Tangente der neuen Curve auf der Tangente der gegebenen Curve im Punkte (x, y, z) ſenkrecht iſt und in ihrer Normalebene liegt.

Ebenſo gibt die Gleichung:

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=\varrho^2,$$

wenn man darin alle Größen ſich ändern läßt, und die Gleichung (b) berückſichtigt:

$$(\xi-x)\,d\xi+(\eta-y)\,d\eta+(\zeta-z)\,d\zeta=\varrho d\varrho,$$

woraus folgt, wenn man $d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2=d\sigma^2$ ſetzt:

$$\pm\frac{d\varrho}{d\sigma}=\frac{\xi-x}{\varrho}\cdot\frac{d\xi}{d\sigma}+\frac{\eta-y}{\varrho}\cdot\frac{d\eta}{d\sigma}+\frac{\zeta-z}{\varrho}\cdot\frac{d\zeta}{d\sigma}. \quad (g_1)$$

Der zweite Theil dieſer letzten Gleichung drückt den Coſinus des Winkels aus, welchen der Krümmungshalbmeſſer ρ mit der Tangente der Curve bildet, die der geometriſche Ort der Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Curve iſt. Wenn die gegebene Curve eine ebene iſt, ſo verſchwindet dieſer Winkel, und man hat $d\rho = \pm d\sigma$. Aus dieſem Reſultate, verglichen mit der Gleichung (ε), folgt, daß der geometriſche Ort der Krümmungspunkte zu gleicher Zeit die Evolute der gegebenen Curve iſt.

Um zu zeigen, daß dieſes nicht mehr ſtattfindet, wenn die gegebene Curve keine ebene iſt, oder daß die Richtung des Krümmungshalbmeſſers nicht mehr mit der Richtung der Tangente an der Linie der Krümmungsmittelpunkte zuſammenfällt, braucht man nur zu zeigen, daß das Syſtem der Krümmungshalbmeſſer keine Umhüllungslinie hat, oder daß man im Raume keine Linie beſchreiben kann, welche alle dieſe Krümmungshalbmeſſer berührt.

Zu dieſem Zwecke wollen wir bemerken, daß die Richtung der geraden Linie ρ mittelſt des Durchſchnittes der Normalebene und der Krümmungsebene beſtimmt wird, und daß folglich die Gleichungen dieſer geraden Linie zwiſchen ξ, η, ζ folgende ſind:

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0, \qquad (b)$$

$$X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\zeta - z) = 0. \qquad (c)$$

Um die Gleichung der Umhüllungscurve der geraden Linien ρ zu erhalten, wenn ſie exiſtirt, muß man mit dieſen Gleichungen ihre Ableitungen in Beziehung auf die unabhängige Veränderliche t verbinden, und auf dieſe Weiſe erhält man unter Berückſichtigung der Gleichung (c'):

$$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z - ds^2 = 0, \qquad (b')$$

$$(\xi - x)\,dX + (\eta - y)\,dY + (\zeta - z)\,dZ = 0. \qquad (c'_1)$$

Aus den vier Gleichungen (b), (c), (b') und (c'_1) ergibt ſich durch Elimination der Binome $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ eine Bedingungsgleichung, welcher die Coordinaten x, y, z und ihre Differenziale genügen müſſen, damit die geraden Linien ρ eine Umhüllungscurve haben können. So geben z. B. die Gleichungen (b), (c), (b') die bereits in §. 228 angeführten Werthe von $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, und wenn dieſe Werthe in die Gleichung (c'_1) ſubſtituirt werden, ſo wird ſie mit der Gleichung (e) identiſch, welche, wie wir geſehen haben, ausdrückt, daß die gegebene Curve eine ebene iſt, wenn ſie für alle Werthe von x, y, z erfüllt wird.

Zu demſelben Reſultate würde man auch gelangen, aber nicht ſo einfach, wenn man ausdrückte, daß ſich der zweite Theil der Gleichung (ε_1) für alle Werthe von x, y, z auf die Einheit reduciren muß.

Daraus, daß die Linie der Krümmungsmittelpunkte keine Evolute mehr iſt, wenn die gegebene Curve keine ebene iſt, darf man jedoch nicht ſchließen, daß die Linien von doppelter Krümmung keine Evoluten haben können. Da ſich aber die Conſtruction der Evoluten für Linien von doppelter Krümmung an die Theorie der krummen Flächen ſchließt, ſo ſoll ſpäter die Rede davon ſein.

§. 234. Wir wollen die in dieſem Kapitel mitgetheilten Formeln auf die ſogenannte Schraubenlinie anwenden, welche auf der Oberfläche eines geraden Cylinders mit kreisförmiger Baſis ſo beſchrieben iſt, daß die Tangente der Curve mit den Erzeugungslinien des Cylinders einen conſtanten Winkel bildet, oder ſo, daß ſich die Curve in eine gerade Linie verwandelt, wenn die cylindriſche Fläche in eine Ebene ausgebreitet wird. Es ſei R der Halbmeſſer des Cylinders, deſſen Axe mit der der z zuſammenfalle, φ ſei der Winkel zwiſchen der Ebene der xz und der durch die Axe des Cylinders gelegten Ebene, worin der Punkt (x, y, z) der Curve liegt und a bezeichne die trigo-

metriſche Tangente des conſtanten Winkels, welchen die Tangente der Curve t der Erzeugungslinie des Cylinders bildet; ſo gibt die Definition der hraubenlinie unmittelbar:

$$x = R \cos. \varphi, \quad y = R \sin. \varphi, \quad z = aR\varphi, \qquad (h)$$

nigſtens wenn man annimmt, daß die Axe der x durch den Punkt geht, worin : Schraubenlinie die Ebene der xy trifft. Die Gleichungen der Projectionen r Curve auf die Ebenen der xz und der yz ſind folglich zwiſchen rechtwink-en Coordinaten:

$$x = R \cos. \frac{z}{aR}, \quad y = R \sin. \frac{z}{aR}, \qquad (h_1)$$

b die Gleichung der Projection der Curve auf die Ebene der xy ſtimmt enbar mit der des Durchſchnittes des Cylinders mit dieſer Ebene überein, b iſt folgende:

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (h_2)$$

ich hat man die Gleichung:

$$\frac{y}{x} = \text{tang.} \frac{z}{aR}, \qquad (h_3)$$

lches die Gleichung der Fläche iſt, welche durch eine gerade Linie erzeugt rd, die ſich, indem ſie ſtets zu der Ebene der xy parallel bleibt, ſo bewegt, ß ſie ſich fortwährend auf die Schraubenlinie und auf die Axe des Cylin-rs ſtützt.

Es iſt wohl zu bemerken, daß das Syſtem der Gleichungen (h_1) nur eine zige Schraubenlinie ausdrückt, nämlich die, welche vermittelſt des Winkels φ rch die Gleichungen (h) ausgedrückt wird, während das Syſtem der Glei-ungen (h_2), (h_3) oder das Syſtem, welches aus der Verbindung der Glei-ung (h_2) mit einer der Gleichungen (h_1) gebildet wird, außerdem noch eine dere Schraubenlinie ausdrücken könnte, welche man erhielte, wenn man $+\varphi$ für φ in die Gleichungen (h) ſetzte. Dieſer Ueberfluß, welcher für wiſſe Projectionsſyſteme ſtattfindet und für andere nicht, iſt dem bereits in 176 bei Gelegenheit der Cycloide angeführten, analog.

Die Gleichungen der Tangente der Schraubenlinie ſind:

$$-\frac{\xi - x}{\sin. \varphi} = \frac{\eta - y}{\cos. \varphi} = \frac{\zeta - z}{a},$$

b die der Normalebene iſt:

$$(\xi - x) \sin. \varphi - (\eta - y) \cos. \varphi - a(\zeta - z) = 0.$$

eraus folgt, daß die Normalebene mit der Ebene der xy einen conſtanten inkel bildet, was übrigens auch aus der Definition der Curve hervorgeht.

Die Coordinaten ξ, η des Punktes, worin die Tangenten im Punkte , y, z) der Schraubenlinie die Ebene der xy trifft, werden durch folgende leichungen beſtimmt:

$$-x = \frac{z}{a} \sin. \varphi = R\varphi \sin. \varphi, \quad \eta - y = -\frac{z}{a} \cos. \varphi = -R\varphi \cos. \varphi,$$

raus folgt:

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = R^2\varphi^2.$$

Es ſei AmBA (Fig. 71) der Durchſchnitt des Cylinders mit der Ebene r xy, A der Punkt, worin die Schraubenlinie dieſe Ebene trifft, $m\mu$ die rjection der Tangente der Schraubenlinie in dem Punkte, welcher ſich auf

die Ebene der xy nach m projeccirt und μ der Punkt, wo dieſe Tangente dieſelbe Ebene trifft; ſo berührt die gerade Linie $m\mu$ den Kreis in m, und aus der vorhergehenden Gleichung folgt; daß die gerade Linie $m\mu$ dieſelbe Länge hat, wie der Bogen Am. Wenn alſo die Tangente der Schraubenlinie ſich fortbewegt, indem ſie dieſe Curve beſtändig berührt, ſo beſchreibt der Punkt μ, worin ſie die Ebene der xy trifft, auf dieſer Ebene eine Evolvente des Kreiſes, welcher der Durchſchnitt des Cylinders mit derſelben Ebene iſt, und dieſe Evolvente hat in dem Punkte, worin die Schraubenlinie dieſelbe Ebene trifft, einen Rückkehrpunkt (§. 221).

§. 235. Wenn man, wie es der Natur der Curve entſpricht, den Winkel φ zur unabhängigen Veränderlichen nimmt, ſo hat man:

$$dx = R \sin.\varphi d\varphi,\quad dy = R\cos.\varphi d\varphi,\quad dz = aRd\varphi;$$

$$d^2x = -R\cos.\varphi d\varphi^2,\quad d^2y = -R\sin.\varphi d\varphi^2,\quad d^2z = 0;$$

$$d^3x = R\sin.\varphi d\varphi^3,\quad d^3y = -R\cos.\varphi d\varphi^3,\quad d^3z = 0.$$

Bezeichnet man ferner den conſtanten Winkel, deſſen Tangente $= a$ iſt, mit i, ſo erhält man:

$$ds = \frac{R}{\cos.i} d\varphi,\quad d^2s = 0;$$

Bei Berückſichtigung dieſer Werthe gibt die Formel (ϱ_2) für das Maas der erſten Krümmung:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos.^2 i}{R};$$

und für das der zweiten Krümmung hat man nach den Formeln in §. 230:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin.i\cos.i}{R}.$$

Die Gleichung der Krümmungsebene wird:

$$\text{tang.}\, i\,[(\xi - x)\sin.\varphi - (\eta - y)\cos.\varphi] + \zeta - z = 0,$$

oder vermöge der Gleichungen (h) einfacher:

$$\zeta - z = a(\eta\cos.\varphi - \xi\sin.\varphi);$$

und man ſieht, daß ſie gegen die Ebene der xy eine conſtante Neigung hat.

Für die Coordinaten ξ, η, ζ des Krümmungsmittelpunktes hat man die Werthe:

$$\xi = -a^2R\cos.\varphi,\quad \eta = -a^2R\sin.\varphi,\quad \zeta = aR\varphi, \qquad (\eta)$$

welche denen von x, y, z als Functionen von φ ganz analog ſind, und zeigen, daß die Linie der Krümmungsmittelpunkte eine zweite Schraubenlinie iſt, die auf einem Cylinder beſchrieben iſt, welcher die Axe z ebenfalls zur Axe und einen Halbmeſſer $= a^2R$ hat. Uebrigens befindet ſich dieſe Linie, wie die erſte Schraubenlinie, auf der durch die Gleichung (h_3) ausgedrückten Fläche, und da die Gleichungen (h), (η) für z und ζ dieſelben Werthe geben, ſo folgt, daß die beiden Schraubenlinien dieſelbe Schraubenweite haben, oder daß die Veränderlichen z, ζ denſelben Zuwachs bekommen, wenn der Bogen φ um einen ganzen Kreisumfang zunimmt.

Ferner folgt aus der Vergleichung der Gleichungen (h), (η), daß der Krümmungshalbmeſſer ϱ nach dem Halbmeſſer des Cylinders (h_2), oder der beweglichen geraden Linie, welche die Fläche (h_3) beſchreibt, gerichtet und folglich die Axe der Schraubenlinie rechtwinklig durchſchneidet. Da man ferner hat:

$$d\sigma = \pm R \sin. i \cdot d\varphi, \quad \varrho = \text{const.},$$

o folgt aus der Formel (ξ_1) auch, daß der Krümmungshalbmeſſer ϱ die Tangente an der Linie der Krümmungsmittelpunkte unter einem rechten Winkel urchſchneidet, was auch ohne alle Rechnung daraus folgt, daß ϱ nach dem albmeſſer des Cylinders gerichtet iſt, worauf die zweite Schraubenlinie oder er geometriſche Ort der Krümmungsmittelpunkte liegt.

Endlich fällt in dem gegenwärtigen Falle die Linie der Krümmungsmittelunkte mit der Umhüllungscurve der geraden Durchſchnittslinien der ſucceſſiven Normalebenen oder mit der Linie zuſammen, deren zweite Biegung der erſten Biegung der gegebenen Curve gleich iſt, und umgekehrt.

Sechstes Kapitel.

Ueber die Berührungsebenen der krummen Flächen.

§. 236. Wir wollen nun zu den Anwendungen der Differenzialrechnung auf die Theorie der krummen Flächen übergehen, welche auch in praktiſcher Hinſicht von Wichtigkeit ſind. Die Entwickelung dieſer Theorie verdanken wir beſonders Monge und ſeinen Schülern, und ſie bildet eine der weſentlichſten Vervollkommnungen, welche die höhere Geometrie ſeit dem Alterthume erhalten hat.

Wenn die Gleichung einer auf geradlinige Coordinaten x, y, z, welche wir der Einfachheit wegen als rechtwinklig vorausſetzen wollen, bezogenen krummen Fläche gegeben iſt, ſo kann man auch zwei dieſer Veränderlichen, z. B. x, y, als unabhängig betrachten, und die dritte Veränderliche z, welche eine Function der beiden erſten iſt, hat zwei partielle Ableitungen der erſten Ordnung p, q, und das Totaldifferenzial derſelben wird folglich ausgedrückt durch:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

wo die unendlich kleinen Incremente dx, dy von einander unabhängig bleiben.

Aber wenn man ſich auf der krummen Fläche irgend eine durch den Punkt (x, y, z) gehende Linie beſchrieben denkt, ſo findet für die auf dieſer Linie liegenden Punkte zwiſchen y und x und folglich zwiſchen dy und dx eine gegenſeitige Abhängigkeit ſtatt, ſo daß man ſetzen kann:

$$dy = y'dx, \quad dz = (p + qy')\,dx,$$

wo y' eine Function von x bezeichnet, welche durch die Geſtalt der erwähnten Curve beſtimmt wird.

Es ſeien ξ, η, ζ die veränderlichen Coordinaten der Tangente der in Rede ſtehenden Curve im Punkte (x, y, z), ſo ſind die Gleichungen dieſer Tangente nach §. 223:

$$\eta - y = y'(\xi - x), \quad \zeta - z = (p + qy')(\xi - x). \qquad (1)$$

Wenn man alſo zwiſchen dieſen Gleichungen y' eliminirt, ſo gehört die reſultirende Gleichung der krummen Fläche an, worauf alle die Tangenten liegen, welche man im Punkte (x, y, z) an alle auf der gegebenen Fläche beſchriebene und durch dieſen Punkt gehende Curven ziehen kann. Die Elimination gibt:

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y), \qquad (2)$$

anwenden, welche, wie leicht aus ihrer Form erhellet, der durch die Umdrehung einer Hyperbel um ihre nicht ſchneidende Axe erzeugten krummen Fläche angehört, welche das Rotationshyperboloid mit einem Fache genannt wird um ſie von dem Rotationshyperboloide mit zwei Fächern, welches durch die Umdrehung einer Hyperbel um ihre ſchneidende Axe erzeugt wird zu unterſcheiden.

Für die Gleichung der Berührungsebene findet man:

$$\frac{x\xi + y\eta}{a^2} - \frac{z\zeta}{b^2} = 1, \qquad (7)$$

und wenn man darin ξ, η, ζ als Conſtanten und x, y, z als die veränderlichen Coordinaten betrachtet, ſo gehört dieſe Gleichung zu einer Ebene, welche das Hyperboloid nach einer Curve durchſchneidet, die der geometriſche Ort der Berührungspunkte des Hyperboloides mit allen durch den Punkt (ξ, η, ζ) gehenden Ebenen iſt. Wenn man eine ähnliche Rechnung auf die allgemeine Gleichung der Fläche des zweiten Grades anwendet, ſo ergibt ſich, daß, wenn man an irgend eine dieſer Flächen von einem außerhalb gegebenen Punkte Berührungsebenen legt, der geometriſche Ort aller Berührungspunkte eine ebene Curve des zweiten Grades iſt. Hieraus folgt, daß die um eine Fläche des zweiten Grades beſchriebene Kegelfläche vom zweiten Grade iſt.

Wenn die Berührungsebene (7) das Hyperboloid zu gleicher Zeit ſchneidet und berührt, ſo werden die Gleichungen der Durchſchnittslinie zwiſchen ξ, η, ζ durch die Verbindung der Gleichung (7) mit der folgenden:

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2} - \frac{\zeta^2}{b^2} = 1. \qquad (8)$$

erhalten. Die Verbindung der Gleichungen (6), (7), (8) gibt aber:

$$\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right)\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2}\right) - \left(\frac{x\xi + y\eta}{a^2}\right)^2 = \left(1 + \frac{z^2}{b^2}\right)\left(1 + \frac{\zeta^2}{b^2}\right) - \left(1 + \frac{z\zeta}{b^2}\right)^2,$$

oder vielmehr:

$$\left(\frac{x\eta - y\xi}{a^2}\right)^2 = \left(\frac{z - \zeta}{b}\right)^2,$$

und dieſe letzte Gleichung zerfällt in die beiden folgenden:

$$\frac{x\eta - y\xi}{a^2} = \frac{z - \zeta}{b}, \quad \frac{x\eta - y\xi}{a^2} = -\frac{z - \xi}{b},$$

Die eine oder die andere dieſer Gleichungen drückt in Verbindung mit der Gleichung (7) eine gerade Linie aus. Die Berührungsebene ſchneidet alſo die krumme Fläche nach zwei durch den Berührungspunkt gehenden geraden Linien, wovon ſich jede mit dem Punkte (x, y, z) verrückt, und folglich kann das Hyperboloid durch jede dieſer beweglichen geraden Linien beſchrieben werden.

Man kann in den Gleichungen (6) und (7) auch $z = 0$ ſetzen, d. h. einen der Punkte des Kreiſes $x^2 + y^2 = a^2$, nach welchem das Hyperboloid von der Ebene der xy geſchritten wird, zum Berührungspunkte nehmen. Die Gleichung (7) reducirt ſich alsdann auf $x\xi + y\eta = a^2$ und drückt offenbar aus, daß die Projectionen der eben erwähnten beweglichen geraden Linien auf der Ebene der xy Tangenten des Kreiſes ſind, welcher durch die Umdrehung des einen oder andern der Scheitel der Hyperbel erzeugt und der Kehlkreis genannt wird.

§. 240. Wenn man die Gleichung einer krummen Fläche auf die Form $z = f(x, y)$ bringt, ſo hat man nach §. 157:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) = f(x,\ y) + p\Delta x + q\Delta y$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{d^2f(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}{dx^2}\Delta x^2 + 2\frac{d^2f(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}{dxdy}\Delta x\Delta y\right.$$
$$\left. + \frac{d^2f(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}{dy^2}dy^2\right],$$

o θ eine zwiſchen Null und der Einheit liegende Zahl bezeichnet. Es ſei:

$$\zeta - z = m(\xi - x) + n(\eta - y) \qquad (2')$$

e Gleichung einer durch den Punkt (x, y, z) gehenden Ebene, ſo wird ihre n Abſciſſen $\xi = x + \Delta x$, $\eta = y + \Delta y$ entſprechende Ordinate ζ ausge- ittelt durch:

$$\zeta = z + m\Delta x + n\Delta y = f(x, y) + m\Delta x + n\Delta y.$$

nglich iſt:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - \zeta = (p-m)\Delta x + (q-n)\Delta y$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{d^2fx+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}{dx^2}\Delta x^2 + 2\frac{d^2f(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}{dxdy}\Delta x\Delta y\right.$$
$$\left. + \frac{d^2f(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}{dy^2}\Delta y^2\right].$$

o Δx, Δy ſehr kleine Größen der erſten Ordnung ſind, und folglich die ifferenz:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - \zeta \qquad (\Delta)$$

iſchen den Ordinaten der krummen Fläche und der Ebene ebenfalls eine ſehr ine Größe der erſten Ordnung iſt, ſo lange die Glieder:

$$(p-m)\Delta x + (q-n)\Delta y,$$

gen welche man den zweiten Theil des Werthes von (Δ) vernachläſſigen n, nicht verſchwinden. Aber wenn $m = p$, $n = q$ iſt, oder wenn die ene (2') mit der Berührungsebene (2) zuſammenfällt, ſo reducirt ſich die fferenz (Δ) auf eine ſehr kleine Größe der zweiten Ordnung. Ferner ht man leicht ein, daß das vom Punkte $(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ auf e Ebene (2') gefällte Perpendikel im Allgemeinen eine Größe von derſelben rdnung wie (Δ) iſt. Man kann alſo die Berührungsebene als eine Ebene trachten, welche ſich der krummen Fläche in der Nähe des Berührungspunktes hr nähert, als jede andere durch denſelben Punkt gehende Ebene (§. 203).

Siebentes Kapitel.

Analytiſche Merkmale der Hauptfamilien der krummen Flächen.

---

§. 241. Bekanntlich führt jeder mathematiſche oder empiriſche Zuſammen- ung zwiſchen den Veränderlichen x, y, z, welcher allgemein durch:

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

ausgedrückt wird, auf die Conſtruction einer krummen Fläche, wenn man x, , z als die drei Coordinaten betrachtet, welche die Lage eines Punktes im

Raume beſtimmen. Allein die ſo conſtruirte Fläche wird im Allgemeinen
geometriſch beſtimmt ſein, und es kommt jetzt nicht blos mehr darauf an,
lytiſche Begriffe räumlich darzuſtellen, ſondern die Analyſis auf die
der Ausdehnung anzuwenden, und wir haben daher hier nur diejenigen
zu betrachten, welche durch geometriſche Eigenſchaften charakteriſirt werde

Zuweilen läßt ſich die geometriſche Definition einer krummen Fläche
mittelbar durch eine Gleichung zwiſchen ihren veränderlichen Coordinaten
drücken. So drückt z. B. die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

unmittelbar das geometriſche Merkmal aus, wodurch man die Oberfläche
Kugel definiren kann, nämlich, daß alle ihre Punkte von einem andern
welcher hier zum Anfangspunkte der Coordinaten genommen iſt, gleich
entfernt ſind. Aber gewöhnlicher beſteht die geometriſche Definition einer
in der Angabe des Geſetzes der Beſchreibung derſelben durch eine Linie,
ſich blos im Raume bewegt, ohne ihre Form zu verändern, oder während
Bewegung auch zugleich ihre Form verändert. In dieſem Falle wird die
chung (1), als durch die Elimination des Parameters α zwiſchen den Gleichu

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad (2$$

welche die einer im Raume beſchriebenen Linie ſind, gegeben angeſehen,
dieſe Linie, welche die Erzeugungslinie genannt wird, ändert entweder
Lage und Form, oder wenigſtens ihre Lage mit dem Parameter α.

Man ſagt auch: die Fläche (1) ſei der geometriſche Ort aller L
welche das Syſtem der Gleichungen (2) gibt, wenn man den Parame
ſich ſtetig ändern läßt.

So iſt z. B. die Oberfläche des in den Elementen der Geometrie be
teten geraden Kegels die Fläche, welche durch eine gerade Linie beſchr
wird, die beſtändig durch einen feſten Punkt geht und ſich ſo bewegt, da
mit einer andern durch denſelben Punkt gehenden geraden Linie einen conſ
Winkel bildet. Man könnte ſich die Kegelfläche aber auch als durch
Kreis beſchrieben denken, deſſen Mittelpunkt ſich auf der Axe des Kegels
bewegt, indem ſeine Ebene ſtets auf dieſer Axe ſenkrecht bleibt und ſein
änderlicher Halbmeſſer der Entfernung der Spitze des Kegels von dem M
punkte des beweglichen Kreiſes proportional iſt.

§. 242. Dieſes führt uns auf die Eintheilung der krummen Flächen
Familien, nach den geometriſchen Analogieen ihrer Beſchreibungsarten,
dieſe ſchon an und für ſich für die Einſicht der Operationen in den Kü
und Gewerben ſo merkwürdige und nützliche Eintheilung hat für uns noch
beſondere Intereſſe, daß ſie ſich unmittelbar an die Theorie der Functio
ſo wie wir ſie betrachtet haben, anſchließt. Man darf dieſe Eintheilung
nicht mit der der algebraiſchen Linien oder Flächen nach dem Grade
Gleichungen verwechſeln, obgleich ſich vermöge des zwiſchen der Geometrie
der Algebra ſtattfindenden Zuſammenhanges oft Analogieen zwiſchen den Li
und Flächen, welche durch Gleichungen von demſelben Grade ausgedrückt
den, herausſtellen (§. 207).

So gehört z. B. der vorhin erwähnte gerade Kegel zu der Familie
Kegelflächen, deren gemeinſchaftliches Merkmal darin beſteht, daß ſie
eine gerade Linie beſchrieben werden, welche beſtändig durch einen feſten Punkt
Ebenſo gehört der gerade Cylinder, welchen man in den Elementen betr
zu der Familie der cylindriſchen Flächen, welche durch eine ſich bewege
gerade Linie erzeugt werden, die ſtets zu ſich ſelbſt parallel bleibt. In be
Fällen kann man für den Kreis, welcher bei dem gewöhnlichen Cylinder

als Richtlinie der Erzeugungslinie bei ihrer Bewegung dient, eine ige algebraiſche, oder transcendente, oder auch eine ganz willkührliche, im e beſchriebene Curve ſubſtituiren. Im Allgemeinen nennt man nämlich nien, auf welche ſich die Erzeugungslinie bei der Beſchreibung einer be- ten Fläche ſtützt, Richtlinien.

Die Eintheilung der Flächen in Familien unterſcheidet ſich von einer ei- hen Klaſſification (§. 18) dadurch, daß dieſelbe Fläche nach den ver- nen Analogieen, welche ihre Beſchreibungsart darbietet, zu verſchiedenen ien gezählt werden kann. So kann man z. B. den gewöhnlichen Kegel ylinder auch als zu der Familie der Rotationsflächen gehörig be- n, deren gemeinſchaftliches Merkmal darin beſteht, daß ſie durch eine Linie, die Meridianlinie, welche ſich um eine in ihrer Ebene liegende reht, erzeugt werden. Dieſe Meridianlinie reducirt ſich in dem Falle des ers oder Kegels auf eine zu der Rotationsaxe parallele oder ſchiefe ge- Linie; aber ſie kann auch eine beliebige, in der Meridianebene beſchrie- Curve ſein.

Man begreift hiernach, daß die Flächen, deren Gleichungen nicht algebraiſch und ſich nicht einmal durch mathematiſche Zeichen ausdrücken laſſen, den- gemeinſchaftliche Eigenſchaften haben und hinſichtlich der gemeinſchaftlichen irungsmerkmale geometriſch unterſucht werden können.

Regelflächen.

§. 243. Unter Regelflächen werden alle diejenigen verſtanden, welche ich auf eine beliebige Weiſe im Raume bewegende gerade Linie erzeugen

Man kehrt auch dieſe Definition wohl um, und ſagt, daß man durch Punkt auf einer Regelfläche immer eine gerade Linie ziehen kann, welche in dieſe Fläche fällt. Die Berührungsebene einer Regelfläche enthält, lle Tangenten der durch den Berührungspunkt auf der Regelfläche gezoge- inien in ihr liegen, auch die durch dieſen Punkt gehende Erzeugungslinie, ine Linie mit ihrer Tangente zuſammenfällt, wenn ſie eine gerade wird.

Wenn die Gleichungen der geraden Erzeugungslinie auf die Form:

$$y = \alpha x + \gamma, \quad z = \beta x + \delta,$$

ht ſind, ſo dürfen ſie nur einen willkührlichen Parameter enthalten, weil ıſt keine Fläche geben könnte, welche der geometriſche Ort aller Erzeu- linien wäre. Man hat alſo:

$$\beta = \varphi\alpha, \quad \gamma = \psi\alpha, \quad \delta = \omega\alpha,$$

ß das Syſtem der beiden Gleichungen:

$$y = \alpha x + \psi\alpha, \quad z = x\varphi\alpha + \omega\alpha, \qquad (3)$$

, ψ, ω beliebige Functionszeichen ſind, eine beliebige Regelfläche aus- n kann.

Die beiden einander unendlich nahe liegenden Erzeugungslinien, für welche eränderliche Parameter die Werthe α und $\alpha + d\alpha$ annimmt, treffen er im Allgemeinen nicht, d. h. es gibt im Raume keine Linie, welche die llungslinie aller geraden Erzeugungslinien wäre (§. 232); denn wenn Umhüllungslinie exiſtirte, ſo müßten ſich ihre Gleichungen durch die Eli- ion von α zwiſchen den Gleichungen (3) und ihren Ableitungen in Be- ug auf α, nämlich:

$$x + \psi'\alpha = 0, \quad x\varphi'\alpha + \omega'\alpha = 0$$

en. Sollen aber dieſe beiden letzten Gleichungen zuſammen ſtattfinden n, ſo muß man folgende Bedingungsgleichung haben:

$$\omega'\alpha = \varphi'\alpha \cdot \psi'\alpha, \qquad (6$$

welche nur zwei der Functionen φ, ψ, ω willkührlich und unabhängig

Wenn dieſe Bedingungsgleichung nicht erfüllt wird, und die gerad zeugungslinien keine Umhüllungslinien haben, ſo wird die Regelfläch windſchiefe Fläche und im entgegengeſetzten Falle eine abwickel Fläche genannt, und zwar aus einem Grunde, welchen wir bald kenn nen werden.

§. 244. Wenn die Functionen φ, ψ, ω gegeben wären, ſo erg die Gleichung der entſprechenden Regelfläche aus der Elimination von ſchen den beiden Gleichungen (3). Man kann alſo in dieſen beiden Gl gen die Veränderlichen α und z als Functionen der beiden unabhängigen änderlichen x, y betrachten. Wenn man von der erſten Gleichung in Be auf jede der unabhängigen Veränderlichen die Ableitung nimmt, ſo erhält

$$\frac{d\alpha}{dx}(x + \psi'\alpha) = -\alpha, \quad \frac{d\alpha}{dy}(x + \psi'\alpha) = 1; \qquad (5$$

und wenn man mit der zweiten Gleichung eben ſo verfährt, ſo findet m

$$\frac{d\alpha}{dx}(x\varphi'\alpha + \omega'\alpha) = p - \varphi\alpha, \quad \frac{d\alpha}{dy}(x\varphi'\alpha + \omega'\alpha) = q. \qquad (6$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d\alpha}{dx} : \frac{d\alpha}{dy} = \frac{p - \varphi\alpha}{q} = \alpha, \qquad (7$$

ſo, daß man auch jede beliebige Regelfläche durch das Syſtem der Gleichungen:

$$y = \alpha x + \psi\alpha, \quad p + \alpha q = \varphi\alpha$$

ausdrücken kann, worin die Ableitungen der erſten Ordnung p, q, ob noch zwei willkührliche Functionszeichen φ und ψ vorkommen. Wenn m zweite dieſer Gleichungen ſucceſſive in Beziehung auf x und auf y diffe ſo erhält man:

$$\frac{d\alpha}{dx}(\varphi'\alpha - q) = r + \alpha s, \quad \frac{d\alpha}{dy}(\varphi'\alpha - q) = s + \alpha t,$$

woraus vermöge der Gleichung (7) folgt:

$$-\alpha = \frac{r + \alpha s}{s + \alpha t}, \text{ oder } \alpha^2 t + 2\alpha s + r = 0. \qquad (8$$

Jede Regelfläche kann alſo auch durch das Syſtem der Gleichungen:

$$y = \alpha x + \psi\alpha, \quad \alpha^2 t + 2\alpha s + r = 0,$$

worin die partiellen Ableitungen der zweiten Ordnung r, s, t vorkommen, nur noch das willkührliche Functionszeichen ψ erſcheint, ausgedrückt w Wenn man endlich die Gleichung (8) ſucceſſive in Beziehung auf x differenzirt, ſo erhält man:

$$2\frac{d\alpha}{dx}(s + \alpha t) = -(\alpha^2 w + 2\alpha u + v),$$

$$2\frac{d\alpha}{dy}(s + \alpha t) = -(\alpha^2 v + 2\alpha w + u),$$

und folglich:

$$\alpha = \frac{\alpha^2 w + 2\alpha u + u}{\alpha^2 v + 2\alpha w + u}, \text{ oder } \alpha^3 v + 3\alpha^2 w + 3\alpha u + u = 0. \quad (9)$$

minirt man nun α zwiſchen den Gleichungen (8) und (9), ſo erhält man e Gleichung mit partiellen Differenzialen der dritten Ordnung, worin kein kührliches Functionszeichen mehr vorkommt, welche dieſelbe Allgemeinheit, das Syſtem der Gleichungen (3) hat, und wie dieſe beliebigen Regelflä- n entſpricht.

Man gelangt unmittelbar zu demſelben Reſultate, wenn man bemerkt, daß drei einander unendlich nahe liegende Berührungsebenen jeder Regelfläche derſelben geraden Linie durchſchneiden, welche eine Erzeugungslinie iſt, die drei einander unendlich nahe liegenden Berührungspunkte auf dieſer ugungslinie ſelbſt liegen. Denn die Gleichung der Berührungsebene:

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

die beiden Ableitungen der erſten Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} dp(\xi - x) + dq(\eta - y) &= 0, \\ d^2p(\xi - x) + d^2q(\eta - y) - (dxdp - dydq) &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

von jede in Verbindung mit der Gleichung der Berührungsebene dieſelbe ade Linie beſtimmen muß, d. h. man muß haben:

$$\frac{dx}{\xi - x} = \frac{dy}{\eta - y} = \frac{dz}{\zeta - z},$$

durch ſich die Gleichungen (10) auf:

$$dpdx + dqdy = 0, \quad d^2qdx + d^2pdy = 0,$$

er vielmehr auf:

$$r + sy' + (s + ty')y' = 0,$$
$$u + 2uy' + wy'^2 + (u + 2wy' + vy'^2)y' = 0$$

uciren. Aus dieſen beiden Gleichungen muß ſich auch derſelbe Werth der ngente y' des Winkels ergeben, welchen die Projection der Erzeugungslinie f der Ebene der xy mit der Axe der x bildet, und in der That unterſcheiden h die beiden vorhergehenden Gleichungen, reſp. von den Gleichungen (8) d (9) nur dadurch, daß y' für α ſteht.

Abwickelbare Flächen.

§. 245. Wenn die geraden Erzeugungslinien eine Umhüllungslinie haben ß der Gleichung (4) genügt wird, ſo verwandeln ſich die Gleichungen (6) rch die Subſtitution des Werthes $\omega'\alpha$ in folgende:

$$\varphi'\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dx}(x + \psi'\alpha) = p - \varphi\alpha, \quad \varphi'\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dy}(x + \psi'\alpha) = q,$$

raus, wegen der Gleichungen (5) folgt:

$$p = \varphi\alpha - \alpha\varphi'\alpha, \quad q = \varphi'\alpha.$$

Wenn die Function φ gegeben wäre, ſo eliminirte man α zwiſchen dieſen letz- n Gleichungen und man erhielte:

$$p = \Pi q. \quad (\Pi)$$

So lange die Function φ willkührlich bleibt, iſt dieſes auch mit der hier- us abgeleiteten Function Π der Fall, und umgekehrt, die Unbeſtimmtheit von Π hat die von φ zur Folge. Die abwickelbaren Flächen werden alſo ſowohl rch das Syſtem der Gleichungen (3) und (4), worin die Coordinaten x,

y, z und drei willkührliche Functionen, wovon zwei unabhängig ſind, vo
men, als durch die Gleichung (*Π*), welche nur die Ableitungen p und q
einem einzigen willkührlichen Functionszeichen enthält, ausgedrückt.

Das Zeichen *Π* wird fortgeſchafft, wenn man zu den Ableitungen
zweiten Ordnung übergeht, und alsdann erhält man, wie auch ſchon im §.
gefunden iſt:

$$rt - s^2 = 0.$$

Die Berührungsebene einer abwickelbaren Fläche berührt dieſelbe na
ganzen Länge der in dieſer Ebene liegenden geraden Erzeugungslinie.
die Bedingung, daß die Berührungsebene durch eine gegebene Erzeugung
gehen muß, gibt für alle auf dieſer Erzeugungslinie liegenden Berührungs
dieſelbe Bedingungsgleichung zwiſchen den Ableitungen p, q, und wenn
damit die Gleichung (*Π*) verbindet, ſo werden die Größen p, q einzeln
ſtimmt und haben für alle dieſe Berührungspunkte dieſelben Werthe.

Aus dieſem Satze über die abwickelbaren Flächen muß man umg
ſchließen, daß für die windſchiefen Flächen die Berührungsebene, welche
die durch den Berührungspunkt gehende Erzeugungslinie enthält, die Ober
nicht berührt und ſie folglich in jedem andern Punkte der geraden Erzeug
linie durchſchneidet.

§. 246. Die abwickelbaren Flächen bekommen dieſen Namen, w
ſich in eine Ebene ausbreiten oder abwickeln laſſen, ohne weder Riſſe,
Falten zu bekommen, oder ohne daß die Elemente irgend einer auf der
beſchriebenen Curve bei dieſer Abwickelung verlängert oder verkürzt w
Denn betrachten wir eine Reihe einander unendlich nahe liegender Erzeug
linien $m\mu$, $m_1\mu_1$, $m_2\mu_2$ .... (Fig. 72), welche ſich je zwei und
durchſchneiden, ſo daß ſie das windſchiefe Vieleck von unendlich vielen kl
Seiten $\mu\mu_1$, $\mu\mu_2$ .... zur Umhüllungslinie haben; ſo kann man das
Element $m\mu_1$ um die gerade Linie $m_1\mu\mu_1$ ſo lange drehen, bis es
Ebene des anliegenden Elementes $m_1\mu_1 m_2$ fällt, worauf man dieſe
nun in derſelben Ebene liegenden Elemente auf die Ebene $m_2\mu_2 m_3$ niederſ
u. ſ. f. In dem folgenden Kapitel werden wir durch andere Betrachtunge
dieſe Eigenſchaft der abwickelbaren Flächen und auf die Folgerungen,
ſich daraus ziehen laſſen, zurückkommen.

Die Linie $\mu\mu_1\mu_2$ ..... oder die Umhüllungslinie der Erzeugungs
$m\mu$, $m_1\mu_1$, $m_2\mu_2$ ..... wird die Rückkehrkante oder die Wendu
curve der abwickelbaren Fläche, welche der geometriſche Ort aller dieſe
zeugungslinien iſt, genannt. Jede Linie von doppelter Krümmung kann f
als die Wendungscurve einer abwickelbaren Fläche betrachtet werden,
durch eine ſich bewegende und an dieſer Linie tangent bleibende gerade
erzeugt wird. Es wird daher zur Vervollſtändigung der Theorie der
von doppelter Krümmung zweckmäßig ſein, ſie an die Theorie der abwickel
Flächen anzuſchließen, wie wir ſpäter thun werden.

Die Rückkehrkante kann ſich auch auf einen Punkt reduciren, wie
bei den Kegelflächen der Fall iſt, welche offenbar abwickelbare Flächen
Wenn ſich der Durchſchnittspunkt aller Erzeugungslinien in's Unendliche en
ſo wird die Fläche eine cylindriſche und bleibt abwickelbar. Wir
dieſe beiden Familien abwickelbarer Flächen nun näher unterſuchen.

Cylindriſche Flächen.

§. 247. Wenn man die Gleichungen der geraden Erzeugungslini
die Form:

$$x = az + \alpha,\ y = bz + \beta \qquad (1$$

ſt, ſo findet zwiſchen den veränderlichen Parametern ein Zuſammenhang:

$$\beta = \varphi\alpha \qquad (\varphi)$$

, woraus folgt:

$$y - bz = \varphi(x - az). \qquad (12)$$

So lange die Coefficienten a, b und die Function φ unbeſtimmt bleiben, richt die Gleichung (12) einer beliebigen cylindriſchen Fläche. Wenn man Coefficienten a, b Zahlenwerthe beilegt, ſo müſſen die Erzeugungslinien den Parallelen zu den Coordinatenaxen beſtimmte Winkel bilden.

Wenn man von der Gleichung (12) in Beziehung auf jede der unabhän- Veränderlichen x, y die Ableitung nimmt und auf die gewöhnliche Weiſe Function φ' eliminirt, ſo erhält man die Gleichung mit partiellen Diffe- alen:

$$ap + bq = 1, \qquad (13)$$

he genau dieſelbe Allgemeinheit hat, als die Gleichung (12), wovon ſie leitet iſt. Nach der geometriſchen Bedeutung der Ableitungen p, q drückt Gleichung (13) aus, daß die Berührungsebene immer zu der geraden Linie $x = az$, $y = bz$ parallel iſt, und man hätte ſich auf dieſe Eigenſchaft der ührungsebene der cylindriſchen Flächen ſtützen können, um die Gleichung) direct zu erhalten.

§. 248. Die Durchſchnittscurve, welche man erhält, wenn man eine cylindriſche Fläche mit einer auf ihren Erzeugungslinien ſenkrechten Ebene durch- idet, wird ein gerader Durchſchnitt genannt.

Um dieſen geraden Durchſchnitt, oder allgemeiner, die in der Gleichung) vorkommende willkührliche Function φ zu beſtimmen, kann man feſtſetzen, die krumme Fläche durch eine gegebene krumme Richtlinie (§. 242) en muß. Es ſeien:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0, \qquad (f)\\ f'(x, y, z) &= 0, \qquad (f')\end{aligned}\right\} \qquad (f, f')$$

Gleichungen der Richtlinie, ſo erhält man, wenn man x, y, z zwiſchen den leichungen (11), (f, f') eliminirt, eine reſultirende Gleichung von der Form:

$$F(\alpha, \beta) = 0, \qquad (F)$$

che mit der Gleichung (φ) identiſch ſein muß, und folglich die Function φ immt. Wenn man in die Gleichung (F) für α und β ihre Werthe als nctionen von x, y, z wieder ſetzt, ſo erhält man:

$$F(x - az, y - bz) = 0, \qquad (14)$$

ches die Gleichung der verlangten cylindriſchen Fläche iſt.

Wenn die Richtcurve in der Ebene der xy beſchrieben wäre und durch die leichung:

$$f(x, y) = 0$$

drückt würde, ſo verwandelte ſich die Gleichung (F) in $f(\alpha, \beta) = 0$ d ſtatt der Gleichung (14) hätte man:

$$f(x - az, y - bz) = 0. \qquad (15)$$

Dieſe letzte Gleichung drückt aus, daß der Durchſchnitt der krummen Fläche t einer zu der Ebene der xy parallelen Ebene, deren Ordinate z iſt, ſich f die der xy nach einer mit der Richtlinie identiſchen Linie projicirt, und elche man erhielte, wenn man die Richtlinie auf der Ebene der xy parallel der geraden Linie forträcken ließe, welche mit der Axe der x einen Winkel

bildet, deſſen Tangente $= \frac{b}{a}$ iſt, ſo daß alle Punkte der Richtlinie par

gerade Linien beſchrieben, deren gemeinſchaftliche Länge $= z\sqrt{a^2 +$ wäre. Die Gleichung (15) hat alſo einen beſtimmten geometriſchen Sinn führt alle Aufgaben, welche man über cylindriſche Flächen ſtellen kann, leichte Conſtructionen zurück, ohne daß man die Allgemeinheit der Funct zu beſchränken braucht, indem man ihr einen mathematiſchen Ausdruck be wogegen die Gleichung (14) an und für ſich ſelbſt keinen Sinn hat, wenn Elimination zwiſchen den Gleichungen (11), (f), (*f*) nicht ausführbar iſt, wenn die Functionen f und *f* keinen mathematiſchen Ausdruck mehr h Sobald jedoch die Richtcurve durch die Zeichnung ihrer Projectionen auf aufeinander ſenkrechte Ebenen gegeben iſt, lehrt die beſchreibende Geometr Durchſchnittscurve der cylindriſchen Fläche mit einer gegebenen Ebene, z mit der der xy, durch Punkte conſtruiren, ſo daß ſich das Syſtem der in ſem Zweige der Geometrie üblichen graphiſchen Operationen an die Th beliebiger ſtetiger Functionen anſchließt und die Stelle unmöglicher analy Eliminationen vertritt.

Wenn die cylindriſche Fläche eine durch eine Gleichung, wie z. B. Gleichung (f), gegebene Fläche berühren muß, wie bei dem Probleme Schatten, wenn ſich der leuchtende Punkt in's Unendliche entfernt; ſo k man aus der Gleichung (f) die Werthe von p, q als Functionen von x, y ab und ſubſtituirt ſie in die Gleichung (13), wodurch man eine zweite G chung (*f*) erhält, welche zu der Berührungslinie des Cylinders mit der Fl (f) gehört. Alsdann kann man dieſe Berührungslinie (f, *f*) zur Richt nehmen und die Auflöſung der Aufgabe wie vorhin vollenden.

Kegelflächen.

§. 249. Die Gleichungen der beweglichen geraden Linie, welche e Kegelfläche beſchreibt, indem ſie beſtändig durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) g laſſen ſich auf folgende Form bringen:

$$x - x_0 = \alpha(y - y_0),\ z - z_0 = \beta(x - x_0), \qquad (16)$$

wobei vorausgeſetzt wird, daß die Parameter α, β durch eine Gleichung, w (φ) mit einander verbunden ſind, und alsdann erhält man:

$$\frac{z - z_0}{x - x_0} = \varphi\left(\frac{x - x_0}{y - y_0}\right). \qquad (17)$$

So lange die Conſtante x_0, y_0, z_0 und die Function φ unbeſtimmt bleib kann dieſe Gleichung eine beliebige Kegelfläche ausdrücken. Das Functionsz chen φ wird durch das gewöhnliche Verfahren eliminirt und man kommt a dann auf die partielle Differenzialgleichung:

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0), \qquad (18)$$

wozu man auch direct gelangt, wenn man bemerkt, daß die Berührungse der Kegelfläche immer durch den Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0) derſelben geh muß. Wenn man dieſen Mittelpunkt zum Anfangspunkte der Coordinaten nim ſo reducirt ſich die Gleichung (17) auf:

$$\frac{z}{x} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

und iſt ihrer Form nach in Beziehung auf die Veränderlichen x, y, z homo gen. Unter denſelben Umſtänden verwandelt ſich die Gleichung (18) in folgend

$$z = px + qy,$$

was mit dem Lehrſatze von den homogenen Functionen (§. 122) übereinſtimmt.

Wenn die Kegelfläche die Linie (f, f) zur Richtcurve hat, ſo eliminirt man x, y, z zwiſchen den Gleichungen (16), (f), (f), wodurch man auf eine Endgleichung (F) kommt, welche die Function φ implicite beſtimmt. Setzt man für α, β ihre Werthe als Functionen von x, y, z, ſo erhält man für die Gleichung der Kegelfläche:

$$F\left(\frac{x-x_0}{y-y_0}, \frac{z-z_0}{x-x_0}\right) = 0. \qquad (19)$$

Wenn die Function f nicht direct gegeben wäre, ſondern durch die Bedingung beſtimmt werden müßte, daß die Kegelfläche die Fläche (f) berühre, welcher Fall bei dem Probleme der Schatten vorkommt, wenn der leuchtende Punkt in einer endlichen Entfernung von dem auf dem Wege der Lichtſtrahlen befindlichen undurchſichtigen Körper liegt; ſo leitete man aus der Gleichung (f) die Werthe von p, q als Functionen von x, y, z ab und ſubſtituirte ſie in die Gleichung (18), wodurch man die Gleichung (f) erhielte.

Windſchiefe Flächen mit einer geraden Richtlinie.

§. 250. Wenn man die Axe der z zur Richtlinie nimmt, ſo genügen die auf die Form:

$$z = x\varphi\alpha + \alpha, \quad z = y\psi\alpha + \alpha, \qquad (20)$$

gebrachten Gleichungen der Erzeugungslinie der Definition der in Rede ſtehenden Flächen, woraus folgt:

$$\frac{x}{y} = \frac{\psi\alpha}{\varphi\alpha}, \text{ oder } \alpha = \omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

Hiernach kann man für das Syſtem der Gleichungen (20) eine der beiden folgenden Gleichungen ſetzen:

$$z = x\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \omega\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (21)$$

$$z = y\psi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \omega\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (22)$$

wo die Function φ_1, ψ_1 durch die Bedingungsgleichung:

$$\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}\psi_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

miteinander verbunden ſind. Nimmt man von der Gleichung (21) in Beziehung auf y und auf x die Ableitungen, ſo erhält man:

$$p = \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\left[\varphi'_1\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}\omega'\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

$$q = \varphi'_1\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}\omega'\left(\frac{y}{x}\right),$$

folglich:

$$\frac{px + qy}{x} = \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (23)$$

und wenn man nochmals die Ableitungen nimmt, um φ_1 zu eliminiren, ſo kommt:

Wenn man das Functionszeichen φ auf die gewöhnliche Weise eliminirt ergibt sich daraus:

$$p(x - az) + q(y - bz) = 0. \qquad (3$$

Der Sinn dieser letzten Gleichung ist der: daß, wenn man durch den P (x, y, z) in der Berührungsebene zu der Ebene der xy eine Parallele z diese die Richtlinie (31) schneidet, und in der That fällt die auf diese E in der Berührungsebene gezogene gerade Linie mit einer Erzeugungslinie sammen.

Wir wollen annehmen, daß die bewegliche gerade Linie außer der ger Linie (31) noch eine andere gerade Linie:

$$x = mz + n, \quad y = m'z + n'$$

zur Richtlinie habe, so wird die Function φ vermittelst einer ähnlichen E nation, wie die bereits vorgenommenen, specialisirt und man erhält die Gleich

$$(mb - am')z^2 + (m' - b)xz - (m - a)yz + (bn - an')z + n'x - ny =$$

der Oberfläche des zweiten Grades, welche das hyperbolische Parabo genannt wird.

Wenn das Conoid ein gerades ist, so hat man $a = 0$, $b = 0$ und Gleichungen (32) und (33) verwandeln sich resp. in:

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad px + qy = 0.$$

Die in der Stereotomie unter dem Namen Kreuzgewölbe beka Fläche ist ein gerades Conoid, für welches die zweite Richtlinie gewöh eine Ellipse ist, deren Ebene und eine Axe vertical sind. Wenn die Glei gen dieser Ellipse folgende Form haben:

$$x = a, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

so findet man für die Gleichung des Conoides:

$$\frac{a^2y^2}{b^2x^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Rotationsflächen.

§. 254. Unter den Oberflächen, deren unterscheidendes Merkmal b besteht, daß sie sich nicht durch die Bewegung einer geraden Linie erze lassen, wollen wir hier nur die sogenannten Rotationsflächen (§. 2 betrachten. Es seien:

$$x - x_0 = a(z - z_0), \quad y - y_0 = b(z - z_0)$$

die Gleichungen der durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) gehenden Rotationsaxe ist die Gleichung der auf dieser Axe senkrechten Ebene:

$$ax + by + z = \alpha,$$

und diese Ebene schneidet die Rotationsfläche nach einem Kreise, welchen als den Durchschnitt einer Ebene und einer Kugel, deren Mittelpunkt der P (x_0, y_0, z_0) ist, betrachten kann. Die Gleichung dieser Kugel ist:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \beta,$$

und der Zusammenhang (φ), dessen Form von der Gestalt der Meridianc abhängt, gibt die Gleichung:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \varphi(ax + by + z), \quad (34$$

welche eine beliebige Rotationsfläche ausdrücken kann, so lange die Constanten x_0, y_0, z_0, a, b, und das Functionszeichen φ unbestimmt bleiben.

Nimmt man die partiellen Ableitungen in Beziehung auf x und auf y, so erhält man:

$$2[x - x_0 + p(z - z_0)] = (a + p) \cdot \varphi'(ax + by + z),$$
$$2[x - y_0 + q(z - z_0)] = (b + q) \cdot \varphi'(ax + by + z),$$

woraus sich durch Elimination von φ' ergibt:

$$p[y - y_0 - b(z - z_0)] - q[x - x_0 - a(z - z_0)] = b(x - x_0) - a(y - y_0). \quad (35)$$

Diese letzte Gleichung drückt aus, daß die Normale der krummen Fläche die Rotationsaxe schneidet. Denn bezeichnen ξ, η, ζ die veränderlichen Coordinaten der Normale im Punkte (x, y, z), so sind die Gleichungen derselben:

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0, \quad \eta - y + q(\zeta - z) = 0,$$

während die Rotationsaxe, auf dieselben Coordinatenaxen bezogen, werden:

$$\xi - x_0 = a(\zeta - z_0), \quad \eta - y = b(\zeta - z_0),$$

und wenn man aus diesen vier Gleichungen die Coordinaten ξ, η, ζ fortschafft, so kommt man wieder auf die Gleichung (35).

Wenn man die Rotationsaxe zur Axe der z nimmt oder $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $a = 0$, $b = 0$ setzt, so reducirt sich die Gleichung (35) auf:

$$py - qx = 0, \quad (36)$$

und die Gleichung (34) verwandelt sich in folgende:

$$x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = \varphi z),$$

oder, was wegen der Unbestimmtheit der Function φ dasselbe ist, in:

$$x^2 + y^2 = \varphi z, \quad \text{oder } z = \psi(x^2 + y^2),$$

und z ist alsdann die Ordinate der Meridiancurve, deren Abscisse $= \sqrt{x^2 + y^2}$ ist.

Vermittelst des bereits bei den cylindrischen und Kegelflächen angegebenen Eliminationsverfahrens kann man leicht die Gleichung der durch eine gegebene Curve (f, f) gehenden Rotationsfläche finden.

§. 255. Wir wollen das Gesagte auf die Bestimmung der Fläche anwenden, welche durch die Umdrehung der geraden Linie:

$$x = mz + n, \quad y = m'z + n' \quad (37)$$

um die Axe der z erzeugt wird, so haben wir diese beiden Gleichungen mit den Gleichungen:

$$z = \alpha, \quad x^2 + y^2 = \beta,$$

zu verbinden, woraus folgt:

$$(m\alpha + n)^2 + (m'\alpha + n')^2 = \beta$$

und wenn wir für α, β ihre Werthe setzen:

$$(mz + n)^2 + (m'z + n')^2 = x^2 + y^2.$$

Wenn man die kürzeste Entfernung der Rotationsaxe von der geraden Linie (37) zur Axe der x nimmt, so wird die gerade Linie (37) zu der Ebene der yz parallel und man muß $m = 0$, $n' = 0$ setzen, wodurch sich die Gleichung der krummen Fläche in folgende verwandelt:

$$x^2 = y^2 - m'^2 z^2 = n^2,$$

welche mit der Gleichung (6) in §. 239 übereinstimmt. Die erzeugte Fläche ist folglich die unter dem Namen Rotationshyperboloid mit einem Fache bekannte Regelfläche.

$$\frac{d^3F}{d\alpha^3} = 0 \qquad (F''')$$

verbindet, ſo kann man α fortſchaffen, und die Coordinaten x, y, z eines auf der Rückkehrkante liegenden Punktes, welcher im Allgemeinen ein ſingulärer Punkt derſelben iſt, einzeln beſtimmen.

§. 258. Betrachten wir nun die Gleichung einer Fläche:

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \qquad [F]$$

worin zwei willkührliche Parameter α, β vorkommen, ſo kann man nicht annehmen, daß ſich dieſe beiden Parameter gleichzeitig und unabhängig von einander ändern, weil dieſes zu keiner geometriſchen Folgerung führen würde; allein man kann offenbar annehmen, daß zwiſchen α und β eine Relation $\beta = \varphi\alpha$ ſtattfindet, vermöge welcher ſich die vorhergehende Gleichung in folgende verwandelt:

$$F(x, y, z, \alpha, \varphi\alpha) = 0.$$

Nun kann man den Parameter α ſich ändern laſſen, wodurch eine Reihe umhüllter Flächen und eine correſpondirende Umhüllungsfläche entſteht. Da die Function φ willkührlich iſt, ſo beſtimmt jede ihr beigelegte Form ein Syſtem umhüllter Flächen, welches ſeine beſondere Umhüllungsfläche hat.

Da übrigens die Gleichung [F] zwei unabhängige Veränderliche x, y enthält, ſo kann man ſie in Beziehung auf jede dieſer Veränderlichen differenziren, wodurch man die beiden folgenden Gleichungen erhält:

$$\frac{dF}{dx} + p\frac{dF}{dz} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + q\frac{dF}{dz} = 0. \qquad [F']$$

Die Elimination von α, β zwiſchen den Gleichungen [F] und [F'] führt auf die partielle Differenzialgleichung der erſten Ordnung:

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \qquad (f)$$

und alle durch die Gleichung [F] gegebenen umhüllten Flächen, ſo wie alle durch die Elimination von α zwiſchen den beiden Gleichungen:

$$F(x, y, z, \alpha, \varphi\alpha) = 0, \quad \frac{d \cdot F(x, y, z, \alpha, \varphi\alpha)}{d\alpha} = 0, \qquad ((F))$$

gegebenen Umhüllungsflächen haben offenbar die Eigenſchaft, der Gleichung (f) zu genügen.

Hier iſt der Ort, wo der Faden der Analogie zwiſchen der Theorie der Umhüllung ebener Curven und der der Umhüllung krummer Flächen zerreißt. In der That haben wir geſehen, daß die umhüllten Curven und die Umhüllungscurven derſelben Differenzialgleichung mit zwei Veränderlichen, worin der veränderliche Parameter nicht vorkommt, genügen. Aber es gibt für dieſelbe Umhüllungscurve unendlich viele umhüllte Curven und die gemeinſchaftliche Gleichung der umhüllten Curven genügt der Differenzialgleichung auf eine allgemeinere Weiſe, als die Gleichung der Umhüllungscurven. Dagegen genügt die Gleichung [F] der partiellen Differenzialgleichung (f), worin die Parameter α, β nicht vorkommen, mit weniger Allgemeinheit, als das Syſtem der Gleichungen ((F)), weil alle durch die Gleichung [F] gegebenen Flächen von derſelben Art ſind, welche ſich nur durch die Zahlenwerthe der Parameter α, β von einander unterſcheiden, während ſich die durch das Syſtem der Gleichungen ((F)) gegebenen Flächen der Art noch ändern, je nach der Form, welche man der willkührlichen Function φ gibt und nur durch einen Familiencharakter, nämlich den, derſelben partiellen Differenzialgleichung zu genügen, mit einander verbunden ſind.

Wenn man α, β zwiſchen der Gleichung [F] und ihren beiden Ableitun-
in Beziehung auf α und β, nämlich:

$$\frac{dF}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dF}{d\beta} = 0$$

nirt, ſo erhält man eine Gleichung:

$$\Psi(x, y, z) = 0, \qquad (\Psi)$$

n blos x, y, z vorkommen, und welche der Gleichung (f) ebenfalls ge-
, und die Fläche (Ψ) hat die Eigenſchaft, daß ſie nicht blos die umhüllten
hen [F], ſondern auch die Umhüllungsflächen ((F)) berührt oder umſchließt.
e allgemeine und individuell beſtimmte Umhüllungsfläche entſpricht der nach
Theorie der Umhüllung der Curven individuell beſtimmten Umhüllungscurve,
die Gleichung (Ψ), welche der Gleichung (f) genügt, ohne durch eine
liche Beſtimmung der willkührlichen Function φ auf das Syſtem ((F)) zu-
geführt werden zu können, iſt eins der ſingulären Integrale, deren Exiſtenz
§. 167 erwähnt iſt, und worauf wir bei der Integration der partiellen
erenzialgleichungen zurückkommen müſſen.

§. 259. Die Bemerkungen im vorhergehenden §. über die Unbeſtimmtheit
in den Gleichungen ((F)) vorkommenden Function φ, geben den zwiſchen
Theorie der Umhüllung der krummen Flächen und der Eintheilung derſelben
) Familien, welche der ſpecielle Gegenſtand des vorhergehenden Kapitels
, ſtattfindenden Zuſammenhang an, welcher aber durch die folgenden Be-
htungen noch beſſer in die Augen fallen wird.

Statt ſich vorzuſtellen, daß α zwiſchen den Gleichungen ((F)) eliminirt
de, um die Gleichung der Umhüllungsfläche zu erhalten, welche einer be-
dern Form der Function φ entſpricht, wollen wir dieſe Gleichungen gleich-
ig betrachten, ſo daß ſie die dieſer beſondern Form von φ und einem
ndern Werthe von α entſprechende Charakteriſtik ausdrücken. Ferner wollen
die zweite dieſer Gleichungen auf folgende Form bringen:

$$\frac{dF}{d\alpha} + \frac{dF}{d\varphi} \cdot \varphi'\alpha = 0.$$

i die Veränderlichen x, y, z nicht unter den Functionszeichen φ, φ' vor-
mmen, ſo ſieht man, daß die Gleichungen der Charakteriſtik auf dieſelbe
riſe aus x, y, z zuſammengeſetzt ſind, was man auch für eine Form der
nction φ geben mag. Die Charakteriſtik kann folglich als die Erzeugungs-
ie betrachtet werden, welche nach Belieben irgend eine der Umhüllungs-
chen ((F)) beſchreibt, indem ſie ihre Lage im Raume, oder ſelbſt ihre
rm, nach einem für jede Umhüllungslinie durch die Form der Function φ be-
mmten Geſetze ändert, jedoch ſo, daß die Zuſammenſetzung der Gleichungen
r Erzeugungslinie aus x, y, z nicht geändert wird. Hierin liegt der Grund,
shalb Monge der in Rede ſtehenden Linie den Namen Charakteriſtik
geben hat, weil ſie allen in dem Syſteme der Gleichungen ((F)) enthaltenen
ächen, welche die Eigenſchaft haben, der Gleichung (f) zu genügen, einen
milliencharakter aufdrückt.

Aus rein analytiſchem Geſichtspunkte betrachtet, iſt die Beſchreibung einer
äche durch die Erzeugungslinie, deren Gleichungen folgende ſind:

$$F(x, y, z, \alpha, \varphi\alpha) = 0, \; F_1(x, y, z, \alpha, \varphi\alpha) = 0 \qquad (b)$$

ır ein beſonderer Fall der Beſchreibung derſelben durch eine Erzeugungslinie,
ren Gleichungen folgende Form haben:

$$F(x, y, z, \alpha, \varphi\alpha, \varphi'\alpha) = 0, \; F_1(x, y, z, \alpha, \varphi\alpha, \varphi'\alpha) = \text{Ordnung:} \qquad (4)$$

Das zweite Syſtem hat in ſeiner Bedeutung keine weitere Ausdehnung als das andere, weil die Function φ' beſtimmt iſt, ſobald die Function φ gegeben iſt. Nur kann man, wenn die Functionen F, F_1, algebraiſche ſind, aus den Gleichungen (b) die Werthe:

$$\alpha = f(x, y, z), \quad \varphi\alpha = f(x, y, z)$$

und folglich:

$$f(x, y, z) = \varphi[f(x, y, z)]$$

ableiten, wo f, f bekannte Functionen bezeichnen, während die Elimination zwiſchen den Gleichungen (b_1) erſt dann ausführbar wird, wenn man die Function φ particulariſirt hat, ſo daß man alle Flächen derſelben Familie, welche das Syſtem (b_1) wegen der Unbeſtimmtheit des Functionszeichen φ ausdrückt, nicht durch eine einzige Gleichung ausdrücken kann.

Wenn man nun annimmt, daß die Function F die Größe $\varphi'\alpha$ nicht enthält und daß man hat:

$$F_1 = \frac{dF}{d\alpha} + \frac{dF}{d\varphi} \cdot \varphi'\alpha$$

ſo kommt man wieder auf einen beſondern Fall der Beſchreibung, womit wir uns in dieſem Kapitel beſchäftigen, indem die Erzeugungslinie den Namen Charakteriſtik annimmt und vermittelſt des Durchſchnittes zweier einander unendlich nahe liegender umhüllter Flächen beſtimmt wird.

§. 260. Dieſelbe Umhüllungsfläche kann verſchiedene Charakteriſtiken haben, d. h. dieſelbe Fläche kann verſchiedene Erzeugungslinien haben, und folglich in gleicher Zeit verſchiedenen Familien angehören (§. 242).

Aber ohne aus derſelben durch dieſelbe Gleichung mit partiellen Differenzialen charakteriſirten Flächenfamilie herauszugehen, findet man, daß die Umhüllungsfläche unendlich vielen verſchiedenen Syſtemen umhüllter Flächen entſprechen kann, oder daß die Charakteriſtik, durch deren Bewegung die Umhüllungsfläche erzeugt wird, und welche vermittelſt des Durchſchnittes zweier aufeinander folgender umhüllter Flächen gegeben iſt, dieſelbe bleiben kann, obgleich die ſich durchſchneidenden Flächen verſchieden ſind.

Um hiervon ein ſehr einfaches Beiſpiel anzuführen, wollen wir uns eine bewegliche Ebene denken, welche die Umhüllungsfläche beſtändig nach einer Charakteriſtik berührt, ſo erzeugt dieſelbe eine abwickelbare Fläche, in deren Gleichung α und $\varphi\alpha$ vorkommen, ſo daß man, wenn man α ſich ändern läßt, eine Reihe abwickelbarer Flächen erhält, welche die Umhüllungsfläche berühren und wovon zwei beliebige aufeinander folgende ſich nach einer der Charakteriſtiken durchſchneiden. Wenn man folglich annimmt, daß die abwickelbare Fläche vermöge der ſtetigen Veränderung des Parameters α ihre Form und Lage im Raume fortwährend ändert; ſo hat ſie dieſelbe Umhüllungsfläche, d. h. das Syſtem der urſprünglichen umhüllten Flächen. Monge nennt ſie eine abwickelbare umhüllte Fläche, und man könnte ſich unendlich viele verſchiedene umhüllte Flächen denken, welche alle dieſelben Charakteriſtiken und dieſelben Umhüllungsflächen haben.

Dieſes erhellet auch leicht analytiſch. Denn da die Function φ in dem Syſteme der Gleichungen ((F)) auf eine beliebige Weiſe particulariſirt werden kann, ſo kann man z. B. auch ſetzen:

$$\varphi\alpha = a + b\alpha,$$

wo a und b andere beliebige Conſtanten ſind, oder auch:

$$\varphi\alpha = a + \alpha\psi a,$$

derſelben partiel

) ψ irgend eine andere Function bezeichnet. Alsdann kann man α zwiſchen n Gleichungen ((F)) eliminiren und man erhält die Gleichung einer Umllungsfläche von der Form:

$$\Phi(x, y, z, a, \psi a) = 0.$$

an kann man aber der Function ψ eine beliebige Form geben und den Paeter α ſich ſtetig ändern laſſen; ſo erhält man auf dieſe Weiſe wieder eine eihe umhüllter Flächen, welche von der der urſprünglichen umhüllten Flächen rſchieden iſt; aber deren Umhüllungsflächen dennoch die Eigenſchaft haben, ß ſie der Gleichung (f) genügen, was vorausſetzt, daß ſie mit den neuen hüllten Flächen dieſelben Berührungslinien haben, wie mit den urſprüngen umhüllten Flächen.

§. 261. Ein Beiſpiel wird das Geſagte deutlich machen. Wenn man in r Gleichung:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = R^2, \qquad (1)$$

, β als ſtetig veränderliche Parameter betrachtet, ſo gehört ſie zu unendlich elen Kugelflächen, welche alle ihren Mittelpunkt in der Ebene der x, y und ſelben Halbmeſſer R haben. Wird dieſe Gleichung in Beziehung auf die den unabhängigen Veränderlichen x, y differenzirt, ſo erhält man:

$$x-\alpha + pz = 0,\ y-\beta + qz = 0;$$

raus ſich die partielle Differenzialgleichung:

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{R^2}{z^2} \qquad (2)$$

lt, welcher alle durch die Gleichung (1) ausgedrückten Kugelflächen genügen.

Die Parameter α, β bezeichnen hier die Coordinaten des Mittelpunktes Kugelfläche, und wenn man den willkührlichen Zuſammenhang $\beta = \varphi\alpha$ aufit, ſo iſt dieſes daſſelbe, als wenn man in der Ebene der x, y die Curve hnete, welche der Mittelpunkt der beweglichen Kugelfläche beſchreiben muß. e Umhüllungsfläche aller Kugeln von demſelben Halbmeſſer, deren Mittelnkt auf der ſo beſchriebenen Curve liegt, iſt eine Kanalfläche mit einem ſtanten kreisförmigen Durchſchnitte, deren Axe oder Mittellinie die willrlich beſchriebene Curve iſt. Alle Kanalflächen, worunter auch der gerade linder gehört, werden folglich durch das Syſtem der beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} (x-\alpha)^2 + (y-\varphi\alpha)^2 + z^2 &= R^2, \\ x-\alpha + (y-\varphi\alpha)\,\varphi'\alpha &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

gedrückt, und haben die Eigenſchaft, der Gleichung (2) zu genügen, ſowohl die Kugeln, welche ſie umſchließen.

Denn die durch die Gleichung (2) ausgedrückte geometriſche Eigenſchaft cht darin, daß der Coſinus des Winkels, welchen die Normale mit der dinate z bildet, den Werth $\pm\frac{z}{R}$ hat (§. 237), oder vielmehr darin, daß e Normale die Mittellinie der Kanalfläche trifft, was offenbar ein Merkmal e Flächen dieſer Familien iſt.

Das Syſtem der Gleichungen (3) beſtimmt die dem Werthe α des Paeters entſprechende Charakteriſtik, welche durch den Durchſchnitt einer Kugel it einer durch ihren Mittelpunkt gehenden Ebene beſtimmt wird, und folglich größter Kreis der Kugel iſt.

Wenn man mit den Gleichungen (3) noch die Ableitung der zweiten Ordnung:

$$(y-\varphi\alpha)\,\varphi''\alpha - 1 - (\varphi'\alpha)^2 = 0 \qquad (4)$$

verbindet und α zwiſchen den drei Gleichungen eliminirt, nachdem die Fu
tion φ particulariſirt iſt; ſo erhält man die Gleichungen der Wendungscu
der Umhüllungsfläche zwiſchen x, y, z.

Wenn man α, β zwiſchen der Gleichung (1) und ihren Ableitungen
Beziehung auf α und β, nämlich:

$$x-\alpha=0,\ y-\beta=0$$

eliminirt, ſo leiſtet die reſultirende Gleichung $z^2=R^2$ oder $z=\pm R$ a
der Gleichung (2) Genüge. Die Fläche, welche zugleich alle umhüllten F
chen und alle in dem Syſteme der Gleichungen (3) enthaltenen Umhüllun
flächen berührt, oder die allgemeine Umhüllungsfläche aller Fläch
welche der Gleichung (2) genügen, reducirt ſich folglich auf ein Syſtem zw
zu der Ebene der x y paralleler Ebenen, was von vornherein einleuchtend w

Wenn man in den Gleichungen (3) die Function $\varphi\alpha=a\alpha+b$ ſe
und nach der Subſtitution den Parameter α eliminirt, ſo erhält man
Gleichung:

$$\frac{(y-ax-b)^2}{1+a^2}+z^2=R^2 \qquad (5)$$

eines kreisförmigen Cylinders, deſſen Halbmeſſer R iſt und deſſen in der Eb
der x y liegende Axe durch die Gleichung $y=ax+b$ ausgedrückt wird.
der That haben wir ſchon bemerkt, daß ein ſolcher Cylinder zu den Kan
flächen gehört, welche den von einer Kugel von unveränderlichem Halbme
und deren beweglicher Mittelpunkt auf der Ebene der x y irgend eine Li
beſchreibt, durchlaufenen Raum umſchließen können. Man kann ſogar die
des Cylinders ſich in dieſer Ebene ſo bewegen laſſen, daß die Umhüllungsflä
irgend eine der durch das Syſtem der Gleichungen (3) ausgedrückten Kan
flächen oder irgend eine der durch die Gleichung (1) beſtimmten Kugeln
Um den Cylinder ſo zu bewegen, daß die Umhüllungsfläche eine Kugel w
braucht man ſeiner Axe nur eine Rotationsbewegung um einen ihrer als
betrachteten Punkte zu ertheilen, und der Cylinder (5) iſt die weiter o
erwähnte abwickelbare umhüllte Fläche.

§. 262. Wir haben vorhin den zwiſchen den Parametern α, β ſtatt
denden Zuſammenhang durch $\beta=\varphi\alpha$ ausgedrückt; allein wir hätten die
Zuſammenhang auch allgemeiner durch die Gleichung:

$$\omega(\alpha,\beta)=0 \qquad (\omega)$$

ausdrücken können, und alsdann hätten wir ſtatt des Syſtemes der Gleichun
((F)) das Syſtem der vier Gleichungen:

$$F(x,y,z,\alpha,\beta)=0,\ \frac{dF}{d\alpha}d\alpha+\frac{dF}{d\beta}d\beta=0$$

$$\omega(\alpha,\beta)=0,\ \frac{d\omega}{d\alpha}d\alpha+\frac{d\omega}{d\beta}d\beta=0$$

erhalten. Dieſe zuſammengeſetztere Bezeichnung iſt die einzige, welche ſo v
ſtändig iſt, als es die Allgemeinheit der Analyſis erfordert.

Nichts hindert z. B. anzunehmen, daß die Gleichung (ω) zufällig folge
Form annimmt:

$$(\alpha-h)^2+(\beta-k)^2=0 \qquad (\omega_1)$$

wo h, k Conſtanten bezeichnen, in welchem Falle ſich daraus $\alpha=h$, $\beta=$
ergibt, ohne daß es möglich wäre, aus der Gleichung (ω_1) eine Relat
von der Form $\beta=\varphi\alpha$ abzuleiten, wofern man nicht imaginäre Symb

In dem Syſteme der Gleichungen (3) kann man folglich die φ nicht ſo particulariſiren, daß dieſes Syſtem eine der umhüllten en ausdrückt, welche gleichwohl zu den Flächen gehören, die die 't haben, der Gleichung (2) zu genügen. In dieſer Beziehung ın ſagen, daß das Syſtem (3) nicht dieſelbe Allgemeinheit hat, als ung (2) und daß man damit die allgemeine Gleichung der umhüllten erbinden muß, um es zu vervollſtändigen; allein dieſes hat blos in ränkungen ſeinen Grund, welche durch eine Bezeichnungsart eingeführt blos der Kürze wegen angewandt wird, und die Beſchränkungen fallen ıld man den Bezeichnungen die gehörige Allgemeinheit beilegt.
e Bemerkung iſt ſo einfach, daß wir ſie mit Stillſchweigen übergangen rden, wenn dadurch nicht eine Schwierigkeit beſeitigt würde, welche grange für bedeutend gehalten hat. *)

63. Da die Gleichung (f) für beliebige umhüllte Flächen ſtattfindet, ſie auch für den Durchſchnitt zweier ſolcher Flächen ſtatt und kann Differenzialgleichung betrachtet werden, welcher die Coordinaten dieſer igen müſſen. Nachdem man $\beta = \varphi\alpha$ geſetzt hat, unterſcheiden ſich ungen zweier ſich durchſchneidender umhüllter Flächen nur noch durch h des Parameters α, und für die Punkte in der Durchſchnittslinie Werthe von x, y, z dieſelben; aber die Werthe von p, q ändern em Parameter α, oder mit andern Worten, die beiden Flächen haben Punkte der Durchſchnittslinie gegen einander geneigte Berührungs- Aber wenn die Durchſchnittslinie in die Charakteriſtik übergeht, ſo : beiden umhüllten Flächen einander unendlich nahe, die gegenſeitige der beiden Berührungsebenen verſchwindet und man hat:

$$\frac{df}{d\alpha} = 0, \text{ oder } \frac{df}{dp} \cdot \frac{dp}{d\alpha} + \frac{df}{dq} \cdot \frac{dq}{d\alpha} = 0; \qquad (f')$$

ſich die Coordinaten x, y, z auf die den beiden Flächen gemeinſchaft- : beziehen, ſo ändern ſie ſich nicht mit α. Wenn man ferner die ;:

$$dz = pdx + qdy \qquad (c)$$

ung auf α differenzirt, ſo hat man aus demſelben Grunde:

$$0 = \frac{dp}{d\alpha} dx + \frac{dq}{d\alpha} dy \qquad (c')$$

Elimination von $\frac{dp}{d\alpha}$, $\frac{dq}{d\alpha}$ zwiſchen den Gleichungen (f') und (c') gibt :enzialgleichung:

$$\frac{df}{dp} dy - \frac{df}{dq} dx = 0, \qquad (f'')$$

ie Coordinaten der Charakteriſtik mit der Gleichung (f) zugleich ge- iſſen.
dem betrachteten Beiſpiele findet man:

$$\frac{df}{dp} = 2p, \quad \frac{df}{dq} = 2q,$$

ich:

$$pdy - qdx = 0,$$

---

ons sur le Calcul des Fonctions, 2e édit. p. 372 — 374.

woraus folgt, daß die Charakteriſtiken der Kanalflächen zugleich die L
des ſtärkſten Falles dieſer Flächen ſind (§. 126).

Die Gleichungen (c) und (f'') gehören zu einer beliebigen auf
einer Umhüllungsfläche liegenden Charakteriſtik, und die in dieſen Gleich
vorkommenden Größen p, q beſtimmen für jeden Punkt (x, y, z) die
dieſen Punkt gehende Charakteriſtik. Wenn man alſo p, q zwiſchen den
Gleichungen (f), (c) und (f'') eliminirt, ſo gehört die reſultirende Glei
der Curve an, welche von allen Charakteriſtiken berührt wird, oder der
kehrkante der Umhüllungsfläche.

Man findet alſo, daß die Coordinaten der Rückkehrkante oder Wend
curve der Kanalflächen der Differenzialgleichung:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{R^2}{z^2}(dx^2 + dy^2)$$

genügen müſſen. Dieſe Linie kann ſich übrigens auch auf einen Punkt r
ren, oder ſogar imaginär werden. Wir wollen z. B.

$$\varphi\alpha = \sqrt{R_1^2 - \alpha^2}$$

ſetzen, ſo reducirt ſich die Gleichung (4) auf $y = 0$ und die zweite der
chungen (3) verwandelt ſich alsdann in:

$$x\sqrt{R_1^2 - \alpha^2} - \alpha y = 0$$

und es ergibt auch $x = 0$. Werden endlich dieſe Werthe von x und y i
erſte der Gleichungen (3) ſubſtituirt, ſo erhält man für den correſpondir
Werth der Ordinate z:

$$z = \pm\sqrt{R^2 - R_1^2},$$

ſo daß ſich die Wendungscurve auf zwei auf der Are der z liegende P
reducirt, wenn $R > R_1$ iſt, auf einen einzigen Punkt, welcher der Anf
punkt der Coordinaten iſt, für $R = R_1$ und endlich imaginär wird,
$R < R_1$ iſt, in welchem Falle die beſchriebene Fläche ein eigentli
Ring iſt (§. 236).

§. 264. Wir wollen nun zeigen, wie man die willkührliche Functi
ſo beſtimmen kann, daß die durch das Syſtem der Gleichungen ((F))
gedrückte Fläche durch eine gegebene Curve:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0, \qquad (f) \\ f_1(x, y, z) &= 0. \qquad (f_1) \end{aligned}\right\} \qquad (f, f$$

geht. Hierzu iſt erforderlich, daß die Tangente dieſer Curve beſtändig in
Berührungsebene im Punkte (x, y, z) der umhüllten Fläche und der Un
lungsfläche liegt. Es ſei:

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

die Gleichung der Berührungsebene und:

$$\xi - x = \frac{dx}{dz}(\zeta - z), \quad \eta - y = \frac{dy}{dz}(\zeta - z)$$

ſeien die Gleichungen der Tangenten der Curve (f, f_1), ſo ſind p, q Gri
welche vermittelſt der erſten der Gleichungen ((F)) als Functionen von x, y, z, α
gegeben werden, während $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ Functionen von x, y, z ſind, welche
durch Differenzirung der Gleichungen $(f), (f_1)$ ergeben. Dieſes vorausge

ß der durch die ausgesprochene Bedingung zwischen $x, y, z, \alpha, \varphi\alpha$ fest-
stellte Zusammenhang durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$p\,\frac{dx}{dz} + q\,\frac{dy}{dz} = 1, \qquad (d)$$

die sich, nachdem man x, y, z vermittelst der Gleichung der umhüllten
che und der Gleichungen der gegebenen Curve daraus fortgeschafft hat, auf
ende Form reducirt:

$$\omega(\alpha, \varphi\alpha) = 0, \qquad (\omega)$$

folglich die Function φ bestimmt.

Wenn diese Function nach der Bedingung bestimmt werden müßte, daß
correspondirende Umhüllungsfläche die Fläche (f) berührte, so müßte man
der Gleichung (f) die Werthe von $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ als Functionen von x, y, z
eiten, und statt der Gleichung (d) erhielt man:

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \qquad (e)$$

die Werthe von p, q, wie vorhin, durch Differenzirung der Gleichung
umhüllten Fläche als Functionen von $x, y, z, \alpha, \varphi\alpha$ gegeben werden.
rauf müßte man die Gleichung der umhüllten Fläche mit den Gleichungen
) und (e) verbinden und x, y, z zwischen diesen vier Gleichungen elimi-
en, wodurch man die gesuchte Relation (ω) zwischen α und $\varphi\alpha$ erhielte.

Ist die Function φ bestimmt, so erhält man die Function φ' durch Diffe-
nzirung und kann die Werthe von $\varphi\alpha$, $\varphi'\alpha$ als Functionen von α in die
eichungen $((F))$ substituiren und dann α eliminiren, um die Gleichung der
chten Umhüllungsfläche zwischen x, y, z zu erhalten; oder was auf das-
e hinausläuft, man kann mit der Gleichung (ω) ihre Ableitung:

$$\frac{d\omega}{d\alpha} + \frac{d\omega}{d\varphi}\cdot\varphi'\alpha = 0 \qquad (\omega')$$

binden und dann $\alpha, \varphi\alpha, \varphi'\alpha$ zwischen den Gleichungen $((F))$, (ω), (ω')
miniren.

§. 265. Als Anwendung des Vorhergehenden wollen wir die in dem
steme der Gleichungen (3) vorkommende Function φ so zu bestimmen suchen,
ß der Durschnitt der Kanalfläche mit der Ebene der xz die Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad (6)$$

; so wird die Gleichung (d):

$$\frac{x-a}{x} = \frac{b^2}{a^2}$$

d für die Gleichung (ω) hat man:

$$\frac{(\varphi\alpha)^2}{b^2} - \frac{\alpha^2}{a^2-b^2} = \frac{R^2}{b^2} - 1.$$

an kann wieder β für $\varphi\alpha$ setzen, wo α, β alsdann die zu den Axen der
und der y der krummlinigen Axe oder der Mittellinie der Kanalfläche ver-
berlichen parallelen Coordinaten in der Ebene der xy bezeichnen. Die
leichung dieser Linie:

$$\frac{\alpha^2}{b^2 - a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = \frac{R^2}{b^2} - 1 \qquad (6$$

gehört zu einer Ellipse, oder zu einer Hyperbel, je nachdem a < oder > Wir wollen b < R setzen, um die Schwierigkeit zu vermeiden, welche entspringen könnte, daß die Curve (6) nicht in ihrer ganzen Ausdehnung schen den beiden Ebenen $z = \pm R$ bliebe, welche die durch das Syst Gleichungen (3) ausgedrückten Flächen begrenzen.

Uebrigens ist einleuchtend, daß die Curve (6) die Curve (7) nur zwischen den geraden Linien $\beta = \pm R$ liegenden Theile ihres Laufes be oder mit andern Worten: daß sich der Durchschnitt der Umhüllungsflä der Ebene der x z nicht ändert, was für eine Linie der Mittelpunkt d hüllten Kugel auf der Ebene der x y auch beschreiben mag, sobald die fernung dieses Mittelpunktes von der Axe der x größer ist, als der Ha der Kugel. Die Gleichung (6) kann also die willkührliche Function dann in der ganzen Ausdehnung ihres Verlaufes geben, wenn man an daß diese Function φ eine algebraische ist und in ihrem ganzen Ve denselben algebraischen Ausdruck behält, welche Bemerkung der bereit Gelegenheit der Rotationsflächen (§. 256) gemachten analog ist.

§. 266. Man kann annehmen, daß die Gleichung einer umhüllten F drei willkührliche Parameter α, β, γ enthält und, nachdem man $\beta = \gamma = \psi\alpha$ gesetzt hat, folgende Form annimmt:

$$F(x, y, z, \alpha, \varphi\alpha, \psi\alpha) = 0.$$

Das System dieser Gleichung und ihrer Ableitung;

$$\frac{dF}{d\alpha} + \frac{dF}{d\varphi} \cdot \varphi'\alpha + \frac{dF}{d\psi} \cdot \psi'\alpha = 0$$

gehört zu einer Art von Umhüllungsflächen, wovon jede individuell bes ist, sobald die Functionen φ, ψ gegeben sind. Ebenso kann man annehm daß die Gleichung der umhüllten Fläche eine beliebige Anzahl veränder Parameter enthält, welche auf irgend eine Weise mit einander verbunden allein wir werden uns auf die Betrachtung des Falls beschränken, wo umhüllte Fläche eine sich nach irgend einem Gesetze im Raume beweg Ebene ist.

Es sei also:

$$z = \alpha + x\varphi\alpha + y\varphi\alpha \qquad (f$$

die Gleichung der beweglichen Ebene und:

$$1 + x\varphi'\alpha + y\psi'\alpha = 0 \qquad (g$$

ihre Ableitung in Beziehung auf α; so kann das System der Gleichu (g), (g') eine beliebige abwickelbare Fläche ausdrücken. Es ergibt sich da $p = \varphi\alpha$, $q = \psi\alpha$, und folglich:

$$q = \varphi(z - px - qy), \qquad (h) \qquad q = \psi(z - px - qy),$$

oder:

$$\Phi(p, q, z - px - qy) = 0,$$

welches auf die bereits in §. 168 und §. 245 gefundenen Gleichungen:

$$p = \Pi q, \qquad (i) \qquad rt - s^2 = 0$$

führt.

§. 267. Die durch das System der Gleichungen (g), (g') ausgedr Charakteristik ist für jeden Werth von α eine gerade Linie. Man erhält

Differenzialgleichung dieſer Charakteriſtik, wenn man die Gleichung (i) differenzirt, indem man p, q als Veränderliche betrachtet (§. 263), welches $dp = \Pi' q \cdot dq$ gibt, und wenn man dp, dq vermittelſt der Gleichung:

$$dpdx + dqdy = 0 \text{ eliminirt, woraus folgt } pdy - \Pi' qdx = 0. \quad (l)$$

Die Gleichung (l) drückt aus, daß das Verhältniß $\frac{dy}{dx}$ blos eine Function der Größen p, q iſt, was in der That daraus folgt, daß dieſelbe Ebene die abwickelbare Fläche in allen Punkten der Charakteriſtik berührt. Dieſe Gleichung enthält ein willkührliches Functionszeichen; allein, wenn man zu der Differenzialgleichung der zweiten Ordnung übergeht, ſo erhält man eine andere Gleichung der Charakteriſtik, worin das Zeichen Π nicht mehr vorkommt. Denn da die Gleichung (k) der ganzen abwickelbaren Fläche angehört, obgleich ſich die Functionen r, s, t von einer Fläche zur andern ändern, ſo muß man, wenn ſich zwei abwickelbare Flächen nach einer gemeinſchaftlichen Charakteriſtik berühren, für die auf dieſer Linie liegenden Punkte die Relation haben:

$$tdr - 2sds + rdt = 0. \quad (k')$$

Aber vermöge der Gleichungen (g), (g') ändert ſich die Berührungsebene für die auf der Charakteriſtik liegenden Punkte nicht mit den Coordinaten x, y, z. Es iſt alſo:

$$dp = rdx + sdy = 0, \quad dq = sdx + tdy = 0,$$

und vermöge einer neuen Differenzirung:

$$drdx + dsdy = 0, \quad dsdx + dtdy = 0.$$

Wenn man die Differenziale dr, ds, dt vermittelſt dieſer beiden letzten Gleichungen aus der Gleichung (k') eliminirt, ſo erhält man für die Differenzialgleichung der Charakteriſtik:

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0, \quad (m)$$

oder wegen der Gleichung (k) einfacher:

$$\sqrt{r} \cdot dx + \sqrt{t} \cdot dy = 0.$$

Um die Gleichung der Wendungscurve der abwickelbaren Fläche zu erhalten, muß man mit den Gleichungen (g), (g') die Ableitung der zweiten Ordnung:

$$x\varphi''\alpha + y\psi''(\alpha) = 0 \quad (g'')$$

verbinden und dann α eliminiren. Man erhält eine Differenzialgleichung, welcher die Coordinaten derſelben Linie genügen müſſen, wenn man p, q zwiſchen den Gleichungen (i), (l) und der Gleichung $dz = pdx + qdy$ eliminirt. Dieſes führt auf eine Gleichung $\Pi_1(dx, dy, dz) = 0$, w[illegible]e Function Π_1 erſt dann beſtimmt werden kann, wenn die Functi[illegible] von ſie abgeleitet wird, gegeben iſt.

§. 268. Wir wollen nun die Functionen φ u[illegible] f_2) [illegible]umen ſuchen, daß die abwickelbare Fläche durch zwei gegebene Cu[illegible] Richt-

$$f_1(x, y, z) = 0, (f_1) \Big\} (f_1, f_1) \quad f_2(x, y, z) = 0, (f$$
$$f_1(x, y, z) = 0; (f_1) \Big\} (f_1, f_1) \quad f_2(x, y, z) = 0, (f$$

geht, ſo gibt dieſelbe Rechnung, wie die in §. 264, für jede (ω_2) curven wiederholt, zwei Gleichungen von der Form:

$$\omega_1(\alpha, \varphi\alpha, \psi\alpha) = 0, \quad (\omega) \qquad \omega_2(\alpha, \varphi\alpha \text{ und } \psi, \text{ welche in}$$

und wenn man ſie auflöſt, ſo erhält man die Functio[n], daß blos noch α zu die Gleichungen (g), (g') ſubſtituirt werden können.

eliminiren bleibt, um die Gleichung der gesuchten abwickelbaren Fläche zwische
x, y, z zu erhalten. Um aber die Auflösung der Gleichungen (ω_1), (ω_2) z
umgehen, kann man mit denselben ihre Ableitungen:

$$\frac{d\omega_1}{d\alpha} + \frac{d\omega_1}{d\varphi}\cdot\varphi'\alpha + \frac{d\omega_1}{d\psi}\cdot\psi'\alpha = 0, \qquad (\omega'_1$$

$$\frac{d\omega_2}{d\alpha} + \frac{d\omega_2}{d\varphi}\cdot\varphi'\alpha + \frac{d\omega_2}{d\psi}\cdot\psi'\alpha = 0, \qquad (\omega'_2$$

verbinden und die fünf Veränderlichen α, $\varphi\alpha$, $\varphi'\alpha$, $\psi\alpha$, $\psi'\alpha$ zwischen de
Gleichungen (g), (g'), (ω_1), (ω_2), (ω'_1) und (ω'_2) eliminiren.

Wenn die Functionen φ, ψ nach der Bedingung bestimmt werden müßten
daß die abwickelbare Fläche die beiden Flächen (f_1), (f_2) berührte, so müßt
man für jede dieser Flächen die Rechnung in dem angeführten § wiederholen
und man würde auf zwei Gleichungen zwischen x, y, z kommen, welche für
die Gleichungen (f_1), (f_2) genommen werden könnten, worauf die Rechnung
wie im ersten Falle vollendet werden könnte.

§. 269. Wenn ein undurchsichtiger Körper von einem leuchtenden Körper
von endlichen Dimensionen erleuchtet wird, so begrenzen die beiden Fächer
einer abwickelbaren Fläche, welche den undurchsichtigen und den leuchtenden
Körper berührt, bekanntlich im Raume den Schatten und den Halbschatten, und
da diese Anwendung der letzten Aufgabe, wovon wir die Auflösung eben an-
gegeben haben, ein größeres Interesse gibt; so wollen wir hier noch einige
Vereinfachungen mittheilen, welche die Methode in diesem besondern Falle
gestattet.

Die Gleichung der Ebene, welche die Fläche (f_1) im Punkte (x_1, y_1, z_1)
und die Fläche (f_2) im Punkte (x_2, y_2, z_2) berührt, ist:

$$z - z_1 = p_1 (x - x_1) + q_1 (y - y_1), \qquad (n_1)$$

oder:

$$z - z_2 = p_2 (x - x_2) + q_2 (y - y_2), \qquad (n_2)$$

wo p_1, q_1 durch Differenzirung der Gleichung:

$$f_1 (x_1, y_1, z_1) = 0 \qquad (f_1)$$

als Functionen von x_1, y_1, z_1 und p_2 und q_2 durch die Differenzirung der
Gleichung:

$$f_2 (x_2, y_2, z_2) = 0 \qquad (f_2)$$

als Functionen von x_2, y_2, z_2 gegeben werden. Hieraus ergibt sich:

$$z_1 - p_1 x_1 - q_1 y_1 = z_2 - p_2 x_2 - q_2 x_2 \qquad (o)$$

und außerdem hat man:

$$p_1 = p_2, \quad q_1 = q_2. \qquad (p)$$

oder: er Gleichungen (f_1), (f_2), (o), (p) schafft man x_2, y_2, z_2 fort
, als Functionen von x_1, wodurch die Gleichung (n_1) fol-
mmt:

welches auf $z = x\cdot\varphi x_1 + y\cdot\psi x_1 + \omega x_1$.

führt. so nur zwischen dieser Gleichung und ihrer Ableitung in
Parameter x_1 zu eliminiren, um die Gleichung der
Fläche zwischen x, y, z zu erhalten.

§. 267. Di
Charakteristik ist für $x\cdot\varphi' x_1 + y\cdot\psi' x_1 + \omega' x_1$.

Wenn es blos darauf ankommt, auf dem undurchſichtigen Körper, deſſen Oberfläche durch die Gleichung (f_1) ausgedrückt werden mag, die Berührungslinien mit der ihn umſchließenden abwickelbaren Fläche, oder die Linien, welche den Halbſchatten, den Kernſchatten und den vollkommen erleuchteten Theil von einander trennen, zu beſtimmen; ſo braucht man nur x_2, y_2, z_2 aus den Gleichungen (f_2), (o), (p) fortzuſchaffen und alsdann beſtimmt die reſultirende Gleichung:

$$f_1(x_1, y_1, z_1) = 0$$

in Verbindung mit der Gleichung (f_1) das Syſtem der Berührungslinien.

Neuntes Kapitel.

Von den Evoluten im Allgemeinen.

§. 270. In §. 232 haben wir geſehen, daß die geraden Durchſchnittslinien zweier einander unendlich nahe liegender Normalebenen einer Linie von doppelter Krümmung, oder die durch die Krümmungsmittelpunkte dieſer Linie ſenkrecht auf die entſprechenden Krümmungsebenen gezogenen geraden Linien eine Umhüllungslinie haben, welche mit der gegebenen Curve in einer ſolchen Beziehung ſteht, daß ſie ihre Krümmungen in den correſpondirenden Punkten gegenſeitig austauſchen, ſo daß die erſte Krümmung oder Biegung der einen die zweite Krümmung oder Biegung der andern iſt, und umgekehrt. Wir müſſen jetzt hinzufügen, daß dieſe Umhüllungslinie die Rückkehrkante oder Wendungscurve einer abwickelbaren Fläche iſt, welche die bewegliche gerade Linie zur Erzeugungslinie hat, die vermittelſt des Durchſchnittes zweier einander unendlich nahe liegender Normalebenen der gegebenen Curve beſtimmt wird.

Ferner fügen wir hinzu, daß dieſe abwickelbare Fläche der geometriſche Ort aller der unendlich vielen Evoluten iſt, welche die gegebene Curve haben kann.

Denn erinnern wir uns der erſten geometriſchen Begriffe wieder, welche als Grundlage der Theorie der Evoluten dienen, ſo iſt zunächſt einleuchtend, daß durch das bewegliche Ende einer geraden Linie von conſtanter Länge, deren anderer Endpunkt feſt iſt, ein Kreis beſchrieben werden kann, und zwar nicht blos, wenn der feſte Endpunkt mit dem Mittelpunkte des Kreiſes zuſammenfällt, ſondern auch, wenn man zu dieſem feſten Endpunkte irgend einen Punkt des durch den Mittelpunkt des Kreiſes auf ſeiner Ebene errichteten Perpendikels nimmt.

Die gerade Linie, welcher die Punkte angehören, wird die Pollinie genannt.

Gehen wir nun von der Betrachtung des Kreiſes zu der einer beliebigen Curve über. Wir wollen die Evolute der Curve in ihrer Ebene beſchreiben und die cylindriſche Fläche conſtruiren, wovon dieſe Evolute der gerade Durchſchnitt ſein würde; ſo kann ein beliebiger Punkt ν der durch den Punkt μ der Evolute gehenden Erzeugungslinie $\mu\nu$, welcher dem Punkte m der Evolvente entſpricht, als der Pol des Krümmungskreiſes im Punkte m, wovon ein unendlich kleiner Bogen mit dem unendlich kleinen Bogen mm_1 der

Evolvente zuſammenfällt, betrachtet werden. Die gerade Linie $m\nu$ berührt d
Cylinder in ν; denn ihre Projection $m\mu$ auf der Ebene der Evolute berüh
die Evolute in μ. Wenn man die Berührungsebene, worin ſie liegt, ſich
fortbewegen läßt, daß ſie die krumme Fläche fortwährend berührt, ſo trifft d
Verlängerung der geraden Linie $m\nu$ die ſucceſſiven Erzeugungslinien in d
Punkten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ welche den Punkten $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ d
Evolute und den Punkten $m_1, m_2, m_3, \ldots$ der Evolvente entſprech
Auf dieſe Weiſe wird auf der cylindriſchen Fläche eine Curve $\nu\nu_1\nu_2\nu_3\ldots$
beſchrieben, deren Tangenten mit den Erzeugungslinien einen conſtanten Win
bilden und welche ſich in eine gerade Linie verwandelte, wenn die cylindriſ
Fläche in eine Ebene ausgebreitet würde. Nun ſind aber die Punkte $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$
die Pole der Krümmungskreiſe der Evolvente in den Punkten $m_1, m_2, m_3, \ldots$
und die auf dieſen Kreiſen genommenen unendlichen kleinen Bogen fallen m
den unendlich kleinen Bogen der Evolvente zuſammen. Die Bogen mm
$m_1m_2, m_2m_3, \ldots$ können folglich ſucceſſive zuerſt aus dem Punkte ν a
Pol mit dem Halbmeſſer νm, dann aus dem Punkte ν_1 als Pol mit de
Halbmeſſer $\nu_1 m_1$, hierauf aus dem Punkte ν_2 als Pol mit dem Halbmeſſ
$\nu_2 m_2$, u. ſ. f. beſchrieben werden. Wenn man alſo einen vorher auf d
Curve $\nu_1\nu_2\nu_3\ldots$ gewickelten Faden (indem die geradlinige Verlängerun
dieſes Fadens die Evolvente in m trifft und auf dem Elemente mm_1 ſenkre
iſt) abwickelt; ſo beſchreibt der Endpunkt des Fadens die ebene Cur
$mm_1m_2m_3\ldots$ mit einer ſtetigen Bewegung und iſt ſtets auf dem jede
mal beſchriebenen Elemente ſenkrecht. Folglich kann die Linie von doppelt
Krümmung $\nu\nu_1\nu_2\nu_3\ldots$ ebenſowohl als die ebene Curve $\mu\mu_1\mu_2\mu_3\ldots$
als eine Evolute der ebenen Curve $mm_1m_2m_3\ldots$ betrachtet werden.

Die gerade Linie $m\nu$ kann ſo gezogen werden, daß ſie die durch d
Punkt μ gehende Erzeugungslinie in einem beliebigen Punkte und unter ein
beliebigen Winkel durchſchneidet. Eine ebene Curve hat folglich unendlich vi
Evoluten von doppelter Krümmung, welche alle auf der cylindriſchen Flä
liegen, die der geometriſche Ort der Pole der Evolvente iſt und deren gera
Durchſchnitt die ebene Evolute iſt. Alle dieſe Evoluten haben die charakteriſtiſ
Eigenſchaft, die Erzeugungslinien unter einem conſtanten Winkel zu dur
ſchneiden und ſich in gerade Linien zu verwandeln, wenn man die cylindriſ
Fläche in eine Ebene ausbreitet.

§. 271. Betrachten wir endlich eine beliebige Linie von doppelter Krü
mung $mm_1m_2m_3\ldots$ und die abwickelbare Fläche, deren Erzeugungsli
die gerade Durchſchnittslinie zweier einander unendlich nahe liegender Norm
ebenen iſt; ſo berührt die Normalebene m dieſe Fläche nach einer Erzeugung
linie $\mu\nu$, indem der Punkt μ der dem Punkte m entſprechende Krümmun
mittelpunkt der gegebenen Linie iſt. Durch den Punkt m wollen wir willkühr
in der Normalebene der Curve, welche die krumme Fläche berührt, eine ger
Linie ziehen, die die Fläche in einem beliebigen Punkte μ der Erzeugungsli
$\mu\nu$ berührt. Wenn man die Ebene, worin dieſe gerade Linie liegt, ſich fo
bewegen läßt, indem ſie aber ſtets die abwickelbare Fläche berührt und
der gegebenen Curve ſenkrecht iſt; ſo trifft die Verlängerung der gera
Linie $m\nu$ die ſucceſſiven Erzeugungslinien in den Punkten $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$
und legt ſich auf die krumme Fläche nach einer Curve $\nu\nu_1\nu_2\nu_3\ldots$, wel
die Eigenſchaft hat, ſich in eine gerade Linie zu verwandeln, wenn man
abwickelbare Fläche in eine Ebene ausbreitet. Die Punkte $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$
ſind die Pole der Krümmungskreiſe der gegebenen Curve in den entſprechend
Punkten $m_1, m_2, m_3, \ldots$, deren Krümmungsmittelpunkte $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$
ſind, und auf welche ſich die Erzeugungslinien $\nu_1\mu_1, \nu_2\mu_2, \nu_3\mu_3, \ldots$

ehen. Hieraus folgt, wie in dem zuerſt betrachteten beſondern Falle, daß ie Curve $\nu\nu_1\nu_2\nu_3\ldots$ eine Evolute der gegebenen Curve iſt. Man ann den Anfangspunkt ν auf der Erzeugungslinie $\mu\nu$ willkührlich annehmen, nd folglich hat die gegebene Curve unendlich viele Evoluten, welche alle auf er weiter oben definirten abwickelbaren Fläche liegen, die wir aus dieſem runde die Polfläche nennen wollen. Das unterſcheidende Merkmal aller ieſer Evoluten beſteht darin, daß ſie ſich in gerade Linien verwandeln, wenn ie abwickelbare Fläche in eine Ebene ausgebreitet wird.

In §. 233 haben wir geſehen, daß die Linie der Krümmungsmittelpunkte, bgleich ſie auf der Polfläche liegt, keine Evolute iſt, wofern die gegebene urve keine ebene iſt.

§. 273. Um die Gleichung der Polfläche zwiſchen ξ, η, ζ zu erhalten, uß man aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(\xi-x)\,dx+(\eta-y)\,dy+(\zeta-z)\,dz&=0,\\(\xi-x)\,d^2x+(\eta-y)\,d^2y+(\zeta-z)\,d^2z-ds^2&=0,\end{aligned}\right\}\quad(a)$$

ie Größen x, y, z und ihre Differenziale der beiden erſten Ordnungen ver-ittelſt der Gleichungen der gegebenen Curve und ihrer Ableitungen der beiden rſten Ordnungen eliminiren (§. 232). Die Gleichung (κ) in §. 233 drückt us, daß die Tangente der Evolvente im Punkte (x, y, z) die Tangente der volute in dem entſprechenden Punkte (ξ, η, ζ) rechtwinklig durchſchneidet, as übrigens auch ohne alle Rechnung daraus folgt, daß die Normalebene der volvente im Punkte (x, y, z) die Polfläche nach der durch den Punkt (ξ, η, ζ) henden Erzeugungslinie berührt.

Wenn die Veränderlichen ξ, η, ζ die veränderlichen Coordinaten einer r Evoluten bezeichnen, ſo müſſen ſie den Gleichungen (a) genügen und ßerdem durch die Bedingung mit einander verbunden ſein, daß der vom unkte (ξ, η, ζ) der Evolute nach dem entſprechenden Punkte (x, y, z) der volvente gezogene Radius die Evolute berührt, welche Bedingung durch fol-nde Gleichung ausgedrückt wird:

$$\frac{d\xi}{\xi-x}=\frac{d\eta}{\eta-y}=\frac{d\zeta}{\zeta-z}.\qquad(b)$$

Wenn man x, y, z und ihre Differenziale vermittelſt der Gleichungen r Evolvente aus den Gleichungen (a) und (b) entfernt hat, ſo bleiben zwei len Evoluten gemeinſchaftliche Gleichungen zwiſchen ξ, η, ζ, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, nd die Integration dieſer Gleichungen würde zwei willkührliche Conſtanten nführen, deren Werthe jede Evolute particulariſiren (§. 163 und §. 165).

§. 274. Wir wollen die durch die Gleichungen (h) in §. 234 aus-drückte Schraubenlinie zur Evolvente nehmen, ſo verwandeln ſich die Glei-ungen (a) in folgende:

$$\left.\begin{aligned}\xi\sin.\varphi-\eta\cos.\varphi&=a(\zeta-aR\varphi)\\\xi\cos.\varphi+\eta\sin.\varphi&=-a_2R\end{aligned}\right\}\qquad(c)$$

nd geben:

$$\xi^2+\eta^2=a^4R^2+a^2(\zeta-aR\varphi)^2,$$

oraus folgt:

$$\varphi=\frac{1}{aR}\pm\sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2}{a^4R^2}-1}.$$

Wird dieſer Werth von φ in die Gleichung (c) ſubſtituirt, ſo erhält man für ie Gleichung der Polfläche:

$$a^2R + \left(\cos.\frac{\zeta}{aR} + \eta \sin.\frac{\zeta}{aR}\right)\cos.\sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2}{a^4R^2} - 1}$$

$$= \pm\left(\cos.\frac{\zeta}{aR} - \eta \sin.\frac{\zeta}{aR}\right)\sin.\sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2}{a^4R^2} - 1}. \quad (d)$$

In §. 235 haben wir geſehen, daß die Wendungscurve dieſer abwickelbar Fläche, welche in dem gegenwärtigen Falle mit der Linie der Krümmung mittelpunkte der Evolvente identiſch iſt, eine andere Schraubenlinie iſt, welc dieſelbe Weite oder Höhe und dieſelbe Are hat, auf derſelben windſchief Schraubenfläche liegt (§. 253) und deren Gleichungen zwiſchen ξ, η, ζ fo gende ſind:

$$\xi = -a^2R\cos.\varphi,\quad \eta = -a^2R\sin.\varphi,\quad \zeta = aR\varphi. \quad (\eta)$$

Die abwickelbare Fläche, deren Rückkehrkante oder Wendungscurve ei Schraubenlinie iſt, wird die abwickelbare Schraubenfläche genannt.

Die in der Gleichung (d) unter den Zeichen sin. und cos. vorkommen Wurzelgröße wird imaginär, wenn man ſetzt:

$$\xi^2 + \eta^2 < a^4R^2, \quad (e)$$

oder nach den Gleichungen (η), wenn man den Punkt (ξ, η, ζ) innerha des Cylinders annimmt, auf welchen ſich die Wendungscurve der abwickelbar Schraubenfläche wickelt. Nun iſt aber der Sinus eines imaginären Boge auch imaginär, während ſich der Coſinus deſſelben Bogens in eine reelle E ponentialgröße verwandelt (§. 75). Die abwickelbare Schraubenfläche t alſo nicht in den Cylinder, auf welchen ſich ihre Wendungscurve oder Rü kehrkante wickelt, und alle ebene Durchſchnitte dieſer Fläche haben in d Punkten, wo ſie die Wendungscurve treffen, Rückkehrpunkte.

Zehntes Kapitel.

Von der Krümmung der Flächen.

1) Lehrſätze von Meusnier und Euler. — Beſtimmung der Hauptkrümmungshalbmeſ und der Nabelpunkte.

§. 275. Wir wollen uns auf einer krummen Fläche durch denſelb Punkt unendlich viele Linien von einfacher oder doppelter Krümmung gezog denken, ſo haben alle dieſe Curven in dem gemeinſchaftlichen Punkte eben viele verſchiedene Krümmungshalbmeſſer; aber dennoch ſtehen die Werthe die Krümmungshalbmeſſer in einem gegenſeitigen Zuſammenhange und laſſen ſ von einer kleinen Anzahl von Elementen abhängig machen. Wir wollen j dieſe Reduction, welche ein Hauptpunkt der Theorie der krummen Flächen i vornehmen.

Es ſei:

$$z = f(x, y) \quad (z)$$

Die Gleichung der krummen Fläche; (x, y, z) der gemeinſchaftliche Punkt d Linien, welche man ſich auf dieſer Fläche gezogen denkt, s der Bogen irge

einer dieser Linien von einfacher oder doppelter Krümmung, ϱ' der Halbmesser der ersten Krümmung dieser Linie im Punkte (x, y, z), ϱ der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes (§. 237), welcher dieselbe Tangente hat und durch denselben Punkt geht und θ der Winkel, welchen die beiden Krümmungshalbmesser ϱ, ϱ' mit einander bilden, und endlich seien x', y', z', x'', y'', z'' die ersten und zweiten Ableitungen der Coordinaten x, y, z in Beziehung auf den zur unabhängigen Veränderlichen genommenen Bogen s; so erhält man, wenn man die Gleichung (z) zweimal hintereinander differenzirt:

$$z' = px' + qy', \qquad (z')$$

$$z'' = px'' + qy'' + rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2, \qquad (z'')$$

und die Ableitungen x', y', z' sind ferner durch die Bedingungsgleichung:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \qquad (1)$$

miteinander verbunden. Der Krümmungshalbmesser ϱ, welcher mit der Normale der Fläche zusammenfällt, bildet mit den Axen der x, y, z Winkel λ, μ, ν, deren Cosinus nach §. 237 resp. ausgedrückt werden durch:

$$\frac{\pm p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \frac{\pm q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \frac{\mp 1}{\sqrt{1 - p^2 + q^2}}.$$

Ferner bildet der Krümmungshalbmesser ϱ' mit denselben Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinus nach §. 228 resp. ausgedrückt werden durch:

$$\pm \varrho' x'', \ \pm \varrho' y'', \ \pm \varrho' z'',$$

woraus vermöge der Gleichung (z'') folgt, wenn man von dem Zeichen von $\cos.\,\theta$ abstrahirt:

$$\cos.\,\theta = \varrho' \cdot \frac{rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \qquad (2)$$

Die Ableitungen x', y', z' drücken auch, abgesehen vom Zeichen, die Cosinus der Winkel aus, welche die Tangente der Linie, deren Krümmungshalbmesser ϱ' ist, mit den Axen der x, y, z bildet. Folglich ändert sich der Multiplicator von ϱ' in der Gleichung (2) nicht, von welcher Beschaffenheit diese Curve auch sein mag, wofern sie nur durch den betrachteten Punkt der Fläche geht und die Richtung ihrer Tangente in diesem Punkte sich nicht ändert. Mit andern Worten: man kann $\varrho' = K \cos.\,\theta$ setzen, wo K für alle auf der krummen Fläche beschriebene Curven, welche in dem gemeinschaftlichen Punkte dieselbe Tangente haben, eine Constante ist. Wenn aber der Winkel θ verschwindet, so ist $\varrho' = \varrho$, folglich $K = \varrho$ und:

$$\varrho' = \varrho \cos.\,\theta, \qquad (a) \qquad \varrho = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2}. \qquad (b)$$

Der Halbmesser der ersten Krümmung einer beliebigen auf der krummen Fläche beschriebenen Curve hängt also blos noch von dem Krümmungshalbmesser des Normalschnittes ab, welcher dieselbe Tangente als diese Curve und von der Neigung θ hat.

Wenn die erste Curve eben ist, so wird sie ein schiefer Dur[illegible] genannt (§. 237) und ϱ' wird die Projection von ϱ auf die Ebe[illegible] fen Durchschnittes. Der durch die Formel (a) ausgedrückte [illegible] dann der Meusniersche Lehrsatz genannt, und die Bede[illegible] wird verallgemeinert, wenn man sie auf die eben angege[illegible] von doppelter Krümmung erstreckt.

Aus dem Meusnier'ſchen Lehrſatze folgt: wenn man eine Kugel beſchreibt, deren Mittelpunkt und Halbmeſſer der Mittelpunkt und Halbmeſſer eines Normalſchnittes iſt, ſo haben alle ſchiefe Durchſchnitte, welche dieſelbe Tangente als der Normalſchnitt haben, in dem gemeinſchaftlichen Punkte die kleinen Kreiſe, welche die Durchſchnitte der Kugel mit den reſp. Ebenen dieſer Kreiſe ſind, zu ihren Krümmungskreiſen.

§. 276. Um die Unterſuchung der Krümmungshalbmeſſer der Normalſchnitte zu vereinfachen, wollen wir zunächſt annehmen, daß die Ebene der x y zu der Berührungsebene der krummen Fläche in dem gemeinſchaftlichen Punkte der Normaldurchſchnitte parallel ſei, ſo iſt $p = 0$, $q = 0$, die Formel (b) verwandelt ſich in:

$$\varrho = \frac{1}{rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2},$$

und wenn man, wie dieſes vermöge der Gleichung (1) geſtattet iſt, ſetzt:

$$x' = \cos.\varphi,\ y' = \sin.\varphi,\ \text{tang.}\,\varphi = \alpha;$$

ſo kann man ſetzen:

$$\varrho = \frac{1}{r\cos.^2\varphi + 2s\sin.\varphi\cos.\varphi + t\sin.^2\varphi} \qquad (3)$$

oder:

$$\varrho = \frac{1+\alpha^2}{r + 2s\alpha + t\alpha^2}: \qquad (4)$$

wo φ alsdann den Winkel bezeichnet, welchen der Normaldurchſchnitt mit einer durch die Normale parallel zu der Ebene der x z gelegten Ebene bildet.

Die größten und kleinſten Werthe des Krümmungshalbmeſſers ϱ erhält man, wenn man die Werthe von α ſucht, welche die Ableitung:

$$\frac{d\varrho}{d\alpha} = \frac{2[s\alpha^2 + (r-t)\alpha - s]}{(r + 2s\alpha + t\alpha^2)^2}$$

verſchwinden oder unendlich machen, und wenn man den Nenner dieſer Ableitung gleich Null ſetzt; ſo erhält man die Werthe:

$$\alpha = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t} \qquad (5)$$

welche nur dann reell ſind, wenn $s^2 - rt > 0$ iſt und welche einem Krümmungshalbmeſſer $= \infty$ oder einer Krümmung $= 0$ entſprechen. Die eigentlichen Maxima und Minima werden alſo ausſchließlich durch die Gleichung:

$$\alpha^2 + \frac{r-t}{s}\alpha - 1 = 0 \qquad (\alpha)$$

gegeben, woraus folgt:

$$\alpha = \frac{t - r \pm \sqrt{(t-r)^2 + 4s^2}}{2s}.$$

von t.

dieſe Nenner reelle Ausdruck zeigt uns: 1) daß es auf jeder krummen Fläche vornehmen. nicht ſinguläre Punkte, für welche die partiellen Ableitungen

Es ſei: 3 Functionen zweier unabhängiger Veränderlichen ohne Unter-

keit beſtimmt werden können, unter den Normaldurchſchnitten

Die Gleichung der Knitte gibt, für welche die Krümmung einen größten,

Linien, welche man ſich hat; und 2) daß die Ebenen der Hauptdurchſchnitte auf-

ander ſenkrecht ſind, weil das Product der Wurzeln der Gleichung (α) ich — 1 iſt.

§. 277. Wir können folglich die Ebenen der x z und der y z, deren chtung wir bis jetzt unbeſtimmt gelaſſen hatten, zu den Ebenen der Haupt-rchſchnitte parallel annehmen, ſo daß von den beiden Wurzeln der Glei-ng (α) die eine Null und die andere unendlich iſt; d. h. wir können die chtung dieſer Coordinatenebenen ſo annehmen, daß $s = 0$ wird. Alsdann rwandelt ſich der Werth von ϱ in:

$$\varrho = \frac{1}{r \cos.^2 \varphi + t \sin.^2 \varphi};$$

d wenn man die beiden Hauptkrümmungshalbmeſſer, welche reſp. t Werthen $\sin. \varphi = 0$, $\cos. \varphi = 0$ entſprechen, mit R_1, R_2 bezeichnet; hat man:

$$R_1 = \frac{1}{r}, \quad R_2 = \frac{1}{t},$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R_1} \cos.^2 \varphi + \frac{1}{R_2} \sin.^2 \varphi. \qquad (b_1)$$

eſe ſehr merkwürdige Formel verdankt man Euler. Sie gibt die Krüm-ngshalbmeſſer aller Normaldurchſchnitte, und folglich auch die aller ſchiefen rchſchnitte als Function der Hauptkrümmungshalbmeſſer und der Winkel φ, θ, lche die Lage der Durchſchnittsebenen gegen die Ebenen der Hauptdurchſchnitte timmen.

Wenn man mit ϱ_1, ϱ_2 die Werthe von ϱ für zwei beliebige aufeinander krechte Durchſchnitte bezeichnet, ſo ergibt ſich aus der Gleichung (b_1) die gante Relation:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = r + t. \qquad (c)$$

Wenn die beiden Hauptkrümmungshalbmeſſer R_1, R_2 einander gleich ſind d daſſelbe Zeichen haben, d. h. auf derſelben Seite der Berührungsebene gen; ſo wird der Werth von ϱ von dem Winkel φ unabhängig und iſt für le Normaldurchſchnitte derſelbe. Die Kugelfläche iſt die einzige, welche in len ihren Punkten dieſe Eigenſchaft darbietet; aber es kommen auf andern lächen ſinguläre Punkte vor, welche dieſelbe Eigenſchaft haben und welche konge Nabelpunkte genannt hat.

§. 278. Wenn die Ableitungen r, t einerlei Zeichen haben, ſo haben die auptkrümmungshalbmeſſer R_1, R_2 auch einerlei Zeichen und das Zeichen von ϱ ndert ſich nicht, ſo daß die krumme Fläche ganz um den Berührungspunkt rum ihre Convexität in Beziehung auf die Berührungsebene nach demſelben inne kehrt.

Wir wollen nun annehmen, daß die Hauptkrümmungshalbmeſſer verſchie-ne Zeichen haben; z. B. daß R_1 poſitiv und R_2 negativ iſt, ſo gibt es ormaldurchſchnitte, welche über der Berührungsebene und andere, welche ter derſelben liegen. Wenn man R_2 in $-R_2$ verwandelt, um nur poſi-ve Zahlen zu betrachten zu haben; ſo verwandelt ſich die Formel (b_1) in gende:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R_1} \cos.^2 \varphi - \frac{1}{R_2} \sin.^2 \varphi,$$

woraus erhellet, daß der veränderliche Krümmungshalbmeſſer ρ anfangs po… iſt und von R_1 an bis in's Unendliche zunimmt, wenn man den Winkel … von Null an zunehmen läßt. Dieſer letzte Werth von ρ entſpricht:

$$\frac{1}{R_1}\cos.^2\varphi = \frac{1}{R_2}\sin.^2\varphi, \quad \text{oder } \alpha = \pm\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = \pm\sqrt{-\frac{r}{t}},$$

welches genau der Werth von (α) iſt, welchen die Gleichung (5) gibt, … dem man darin $s = 0$ geſetzt hat.

Wenn man alſo dieſen beſonderen Werth von φ mit φ_0 bezeichnet … in der Berührungsebene zwei gerade Linien zieht, welche mit einer Paral… zu der Axe der x gleiche Winkel $\pm\varphi_0$ bildet; ſo haben alle Normalsch… ſchnitte, deren Tangenten in die Winkelräume fallen, worin φ einen klein… Zahlenwerth als φ_0 annimmt, poſitive Krümmungshalbmeſſer, und die, … Tangenten in die Ergänzungswinkel der erſten fallen, haben negative Krü… mungshalbmeſſer. R_1 iſt der kleinſte poſitive Krümmungshalbmeſſer, und … demſelben Grunde iſt R_2 der kleinſte Zahlenwerth der negativen Krümmu… halbmeſſer, d. h. $-R_2$ iſt ein algebraiſches Maximum von ρ.

Wenn t, oder r verſchwindet, ſo verſchwindet s vermöge der Lage … Axen auch, der eine Hauptkrümmungshalbmeſſer iſt unendlich, während … andere folglich einen kleinſten Zahlenwerth und daſſelbe Zeichen, wie alle üb… gen Krümmungshalbmeſſer hat.

§. 279. Wir wollen noch bemerken, daß man vermöge der Gleichung … die Größe $\sqrt{\rho}$ durch den Radiusvector eines auf ſeinen Mittelpunkt bez… nen Kegelſchnittes geometriſch darſtellen kann, indem φ den Winkel bezeic… welchen der Radiusvector mit der Axe der x bildet. Aus dieſer Construc… würde ſich ohne alle Rechnung nach der bekannten Unterſuchung der Ke… ſchnitte alles vorhin über die Krümmungshalbmeſſer der Normalſchnitte Ge… ſofort ergeben. Bekanntlich iſt der Kegelſchnitt eine Ellipſe, wenn $rt - s^2 >$ … iſt, und da in dieſem Falle alle Radienvectoren der Hülfscurve endlich … reell ſind, ſo ſind auch alle Krümmungshalbmeſſer endlich und müſſen mit d… ſelben Zeichen genommen werden. Wenn dagegen $rt - s^2 < 0$ iſt, ſo … man für die Ellipſe zwei conjugirte Hyperbeln annehmen, wovon die eine … imaginären Werthen des Radiusvectors oder den negativen Werthen des Krü… mungshalbmeſſers entſpricht. Die Halbaxen der Ellipſe oder der beiden co… jugirten Hyperbeln entſprechen der Richtung nach den Hauptdurchſchnitten … der Größe nach den Hauptkrümmungshalbmeſſern. Wenn endlich $rt - s^2 =$ … iſt, ſo geht der Kegelſchnitt in ein Syſtem zweier gleichweit vom Aufp… punkte entfernter paralleler gerader Linien über und das auf denſelben errich… Perpendikel entſpricht hinſichtlich der Richtung einem der Hauptdurchſchnitte … hinſichtlich der Größe dem kleinſten Krümmungshalbmeſſer.

§. 280. Der Euler'ſche Lehrſatz über die Krümmung der Normaldur… ſchnitte erleidet Ausnahmen, welche erſt in der neueſten Zeit von Poiſſon … angegeben ſind, obgleich ſie den Ausnahmen ganz analog ſind, welche die Th… rie der Berührungsebenen erleidet (§. 236). Dieſe Ausnahmefälle fi… ſtatt, wenn die Ableitungen r, s, t für den Berührungspunkt unbeſtim… Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ annehmen, deren Unbeſtimmtheit ſich nur dadurch heben l… daß man zwiſchen den unabhängigen Veränderlichen x, y einen willkührlich… Zuſammenhang annimmt. Alsdann werden r, s, t Functionen des weiter …

*) Journal de l'École polytechnique. 21e cahier. p. 205.

eichneten Verhältniſſes, ſo daß die vorhergehenden Rechnungen, welche
ɜen, daß r, s, t nicht von α abhängig ſind, unſtatthaft werden. Um
ɔiel der in Rede ſtehenden Ausnahmefälle zu haben, braucht man nur
ıe zu betrachten, welche durch eine ſich um ihre Axe drehende Parabel
ɔird, während ſich ihr Parameter nach einem durch irgend eine ſtetige
des Drehungswinkels ausgedrückten Geſetze ändert. Ein ſolches Para-
ıt eine Gleichung von der Form:

$$x^2 + y^2 = 2zf\left(\frac{x}{y}\right),$$

ın die Axe der z zur Rotationsaxe und den Scheitel zum Anfangspunkte
ɔinaten nimmt. Die Normaldurchſchnitte mit den durch die Axe gelegı
ıen ſind nichts anders, als die erzeugenden Parabeln, und der Krümlbmeſſer ändert ſich von einem Durchſchnitte zum andern nach einem
welches von der willkührlichen Function f abhängt. Der Krümmungsr kann folglich abwechſelnd beliebig viele Maxima und Minima
en, aber eben ſo viele Maxima als Minima, damit derſelbe nach
ızen Umdrehung der erzeugenden Parabel ſeinen urſprünglichen Werth
nnimmt.

iſſon hat auch bemerkt, daß der Meusnier'ſche Lehrſatz ſelbſt in
le ſtattfindet, wo der Euler'ſche unrichtig wird, und auch dieſes
ehr einfach aus dem Beweiſe, welchen wir §. 275 von dem Meusen Lehrſatze gegeben haben, der nicht erfordert, daß die Functionen
blos von x, y, z abhängen, ſondern daß man auch annehmen kann,
dieſe Functionen mit der Richtung der Tangente der Curve, deren
ıit s bezeichnet iſt, ändern.

281. Wir wollen die Formel (b) wieder betrachten, welche ſtattfindet,
eine Richtung die Normale gegen die Axen der x, y, z auch haben
ɔie in dieſer Formel vorkommenden Ableitungen x', y' müſſen der
ɜ (1) genügen, welche vermöge der Gleichung (1') in folgende
:

$$(1 + p^2)\,x'^2 + 2pq\,x'y' + (1 + q^2)\,y'^2 = 1, \qquad (6)$$

aus ſich durch Differenzirung ergibt:

$$[(1 + p^2)\,x' + pqy']\,dx' + [(1 + q^2)\,y' + pqx']\,dy' = 0.$$

ıan die Gleichung (b) in Beziehung auf ρ differenzirt, ſo hat man:

$$(rx' + sy')\,dx' + (sx' + ty')\,dy' = 0,$$

ı man dieſe beiden letzten Gleichungen mit einander verbindet:

$$\frac{rx' + sy'}{(1 + p^2)\,x' + pqy'} = \frac{sx' + ty'}{(1 + q^2)\,y' + pqx'}. \qquad (7)$$

ıan alſo mit R einen der Hauptkrümmungshalbmeſſer bezeichnet, ſo erı die Gleichung mit R durch Elimination von x', y' zwiſchen den
gen (6), (7) und der Gleichung:

$$R = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2}. \qquad (8)$$

len der Kürze wegen ſetzen:

$$V = rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2 = \frac{1}{R}\sqrt{1 + p^2 + q^2} \qquad (V)$$

und die beiden Glieder der Brüche zur Linken und Rechten des Glei zeichens der Gleichung (7) resp. mit x' und y' multipliciren und da Summen der Zähler und Nenner bilden; so reducirt sich der resultirende vermöge der Gleichung (6) auf das Polynom V. Man hat folglich:

$$V = \frac{rx' + sy'}{(1+p^2)x' + pqy'} = \frac{sx' + ty'}{(1+q^2)y' + pqx'},$$

oder vielmehr:

$$\left.\begin{aligned}[V(1+p^2) - r]\,x' &= (s - pqV)\,y',\\ [V(1+q^2) - t]\,y' &= (s - pqV)\,x',\end{aligned}\right\}$$

und wenn man die correspondirenden Theile dieser Gleichungen in ei multiplicirt:

$$[V(1+p^2) - r]\,[V(1+q^2) - t] = (s - pqV)^2.$$

Setzt man für V seinen aus der Gleichung (V) als Function von R c teten Werth und ordnet, so erhält man endlich:

$$R^2(rt - s^2) - R[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]\sqrt{1+p^2+} + (1+p^2+q^2)^2 = 0.$$

Es seien R_1, R_2 die Wurzeln dieser Gleichung oder die Werthe der Hauptkrümmungshalbmesser, so hat man:

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Bedingung, daß die Hauptkrümmungshalbmesser R_1, R_2 einerlei haben, wird also ausgedrückt durch $rt - s^2 > 0$, welche Richtungen die dinatenaxen auch haben mögen, und die Bedingung, daß einer der Haup mungshalbmesser unendlich wird, wird allgemein durch die Gleichung $rt - s$ ausgedrückt, welche auch die abwickelbaren Flächen charakterisirt.

Die Hauptkrümmungshalbmesser sind für alle Punkte einer krummen der absoluten Größe nach gleich und nach entgegengesetztem Sinne g wenn die Gleichung:

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0$$

für alle Punkte dieser Fläche erfüllt wird. In der Folge werden wir daß die durch diese Gleichung mit partiellen Differenzialen der ersten und ten Ordnung charakterisirten Flächen auch noch eine andere eben so merkw geometrische Eigenschaft haben.

§. 282. Die Hauptkrümmungshalbmesser R_1, R_2, und folglich die mungshalbmesser der Normalschnitte, sind einander gleich und haben en gesetzte Zeichen, wenn folgende Gleichung stattfindet:

$$[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]^2 - 4(1+p^2+q^2)(rt - s^2) =$$

Da sich diese Gleichung auf die Form:

$$\left[(1+p^2)t - (1+q^2)r + 2pq\left(\frac{pqr}{1+p^2} - s\right)\right]^2$$

$$+ 4(1+p^2+q^2)\left(\frac{pqr}{1+p^2} - s\right)^2 = 0$$

bringen läßt, so ist sie gleichbedeutend mit dem Systeme:

$$\frac{pqr}{1+p^2} - s = 0, \quad (1+p^2)\,t - (1+q^2)\,r = 0, \qquad (e)$$

er:

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}. \qquad (f)$$

Dieſe letzten Gleichungen würde man direct erhalten haben, wenn man ausdrückte, daß die Gleichungen (9) für V und folglich für ϱ von x', y' unabhängige Werthe geben.

Die Coordinaten der Punkte, welche man Nabelpunkte genannt hat (S. 277), werden folglich durch das Syſtem der beiden Gleichungen (e) in Verbindung mit der Gleichung der krummen Fläche beſtimmt. Dieſe Punkte ſind iſolirte, wofern die beiden Gleichungen (e) nicht zufällig identiſch werden, welches auf der krummen Fläche die Exiſtenz einer Linie andeuten würde, welche nach der Analogie Nabellinie genannt wird, und welche Monge die Linie der ſphäriſchen Krümmungen genannt hat.

§. 283. Wir wollen das Geſagte auf das Ellipſoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

anwenden, ſo iſt:

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad q = -\frac{c^2 y}{b^2 z},$$

$$r = -\frac{c^4 (b^2 - y^2)}{a^2 b^2 z^3}, \quad s = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3}, \quad t = -\frac{c^4 (a^2 - x^2)}{a^2 b^2 z^3}$$

und der Kürze wegen wollen wir ſetzen:

$$\frac{a^2 (b^2 - c^2)}{b^2 (a^2 - c^2)} = A, \quad \frac{a^2 (a^2 - b^2)}{a^2 - c^2} = B.$$

Außerdem können wir $a > b > c$ ſetzen, ſo daß die Conſtanten A, B poſitiv ſind; ſo haben wir zur Beſtimmung der Coordinaten x, y der Nabelpunkte des Ellipſoides die beiden Gleichungen:

$$xy = 0, \quad x^2 - Ay^2 - B = 0, \qquad (g)$$

deren reelle Auflöſungen folgende ſind:

$$y = 0, \quad x = \pm\sqrt{B} = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}.$$

Das Ellipſoid hat folglich vier Nabelpunkte, welche in der durch ſeine größte und kleinſte Axe gehenden Ebene liegen und folglich auf ſeiner Oberfläche ſymmetriſch vertheilt ſind. In der analytiſchen Theorie der krummen Flächen des zweiten Grades wird ferner bewieſen, daß die Berührungsebenen des Ellipſoides in den vier eben der Lage nach beſtimmten Punkten zu den Ebenen parallel ſind, welche die Eigenſchaft haben, daß ſie das Ellipſoid nach Kreiſen durchſchneiden, welches auf eine andere Definition der Nabelpunkte führt, wovon ſpäter die Rede ſein wird.

Wenn das Ellipſoid zwei gleiche Axen hat, ſo fallen die Nabelpunkte, wie ſich leicht aus den vorhergehenden Formeln ergibt, mit den Scheiteln der Rotationsaxe zuſammen.

2) Krümmungslinien.

§. 284. Wir wollen uns vorstellen, daß man auf einer gegebenen Fläche (S) irgend eine Linie (s) beschrieben und die Regelfläche (Σ) construirt hat, deren Erzeugungslinie durch diese Linie (s) geht und beständig auf der Fläche (S) normal bleibt; so ist die Fläche (Σ) im Allgemeinen eine windschiefe, d. h. ihre Erzeugungslinien haben keine Umhüllungslinien (§. 243), oder zwei durch einander auf der Linie (s) unendlich nahe liegende Punkte gezogene Normalen der Fläche (S) treffen einander nicht. Wenn man dagegen die Linie (s) schicklich bestimmt, so daß die Fläche (Σ) eine abwickelbare wird, so hat sie eine Rückkehrkante oder Wendungscurve (σ), welche von allen durch die Linie (s) gehenden Normalen der Fläche (S) berührt wird, was in der Sprache der Infinitesimalmethode dadurch ausgedrückt wird, daß man sagt, daß sich zwei einander unendlich nahe liegende Normalen in einem auf der Linie (σ) liegenden Punkte treffen.

Da die Gleichungen der Normale der Fläche (S) im Punkte (x, y, z) nach §. 237 folgende sind:

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0, \quad \eta - y + q(\zeta - z) = 0, \qquad (h)$$

so werden die Coordinaten des entsprechenden Punktes (ξ, η, ζ) der Wendungscurve (σ) durch das System der beiden Gleichungen (h) und ihrer Ableitungen:

$$\left.\begin{aligned} -[1 + p(p + qy')] + (\zeta - z)(r + sy') &= 0, \\ -[y' + q(p + qy')] + (\zeta - z)(s + ty') &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (h')$$

gegeben, indem z vermöge der Gleichung der Fläche (S) als eine Function der Veränderlichen x, y und y als eine implicite durch die Zeichnung der Linie (s) oder durch die der Projection dieser Linie auf der Ebene der x, y gegebene Function betrachtet wird. Nun können aber die Gleichungen (h'), welche nur noch die Coordinate ζ enthalten, nicht nebeneinander bestehen, wofern nicht folgende Bedingungsgleichung stattfindet:

$$y'^2[(1 + q^2)s - pqt] + y'[(1 + q^2)r - (1 + p^2)t] - (1 + p^2)s + pqr = 0. \qquad (i)$$

Nachdem man für p, q, r, s, t ihre aus der Gleichung der Fläche (S) abgeleiteten Werthe als Functionen von x, y substituirt hat, ist die Gleichung (i), worin alsdann nur noch die veränderlichen Größen x, y, y' vorkommen, die gemeinschaftliche Differenzialgleichung aller Projectionen der Linien (s) auf die Ebene der xy, welche die Eigenschaft haben, die Flächen (Σ) abwickelbar zu machen, oder nach welchen sich zwei einander unendlich nahe liegende Normalen der Fläche (S) durchschneiden. Wenn man annimmt, daß die Ebene der xy zu der Berührungsebene der Fläche (S) im Punkte (x, y, z) parallel, und folglich $p = 0$, $q = 0$ ist; so verwandelt sich die Gleichung (i) in folgende:

$$y'^2 + \frac{r - t}{s} \cdot y' - 1 = 0$$

und unterscheidet sich von der Gleichung (α) nur dadurch, daß y' für α steht, woraus folgt: 1) daß man durch jeden Punkt der Fläche (S) zwei Linien (s_1), (s_2) ziehen kann, welche sich unter einem rechten Winkel durchschneiden und die weiter oben angegebene Eigenschaft haben, und 2) daß die durch die Tangenten dieser Linien gelegten Normalebenen der Fläche (S) mit den Hauptnormalschnitten zusammenfallen. Aus diesem Grunde hat Monge die Linien (s_1), (s_2) **Krümmungslinien** genannt. Auf jeder krummen Fläche, oder auf jedem Theile einer solchen, deren Ordinaten keine Stetigkeitsunterbrechung

…n der dritten oder von einer niedrigern Ordnung erfährt, kann man nach …m Vorhergehenden nach Belieben zwei Reihen von Krümmungslinien (s_1), (s_2) …chreiben, welche die Fläche in krummlinige Vierecke zertheilen, deren sämmt…he Winkel rechte sind.

Die Elimination von y' zwischen den Gleichungen (h') gibt:

$$(\zeta - x)^2 (rt - s^2) - (\zeta - z)[(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t] + 1 + p^2 + q^2 = 0 \qquad (h'')$$

…d wenn R den Krümmungshalbmesser eines Hauptschnittes bezeichnet, dessen …ittelpunkt der Durchschnittspunkt zweier einander unendlich nahe liegender …rmalen ist: so hat man:

$$R = \pm\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} = \pm(\zeta - z)\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Die Elimination von $\zeta - z$ zwischen diesen beiden Gleichungen gibt die weiter …en durch eine nicht ganz so einfache Rechnung gefundene Gleichung (R) …ieder.

§. 285. Die Krümmungslinien sind in den Punkten, worin sie sich …neiden, Tangenten an den beiden Hauptdurchschnitten; allein letztere sind …ene Curven, deren Ebenen durch die Normale gehen und fallen im Allgemei…en nicht mit den Krümmungslinien zusammen, welche gewöhnlich nicht in …erselben Ebene liegen.

So ist z. B. auf einer Rotationsfläche die eine der Krümmungslinien der Durchschnittskreis der Rotationsfläche mit einer durch den Punkt, durch welchen …e Krümmungslinie gehen muß, senkrecht auf die Rotationsaxe gelegten Ebene; …enn alle durch die auf dem Umfange dieses Kreises liegenden Punkte gezoge…en Normalen der Rotationsfläche treffen die Rotationsaxe in demselben Punkte, …oraus auch folgt, daß der zwischen der Rotationsaxe und der Rotationsfläche …egende Theil der Normale einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser ist. …ber diese Krümmungslinie, obgleich sie in dem betrachteten Falle eben ist, …llt doch nicht mit einem Hauptschnitte zusammen, weil ihre Ebene nicht …urch die Normale geht, wofern diese nicht zufällig auf der Rotationsaxe senk…recht ist.

Die andere Krümmungslinie auf einer Rotationsfläche ist die Meridian…urve, weil die durch die verschiedenen Punkte dieser Linie gezogenen Normalen …er Rotationsfläche alle in der Meridianebene liegen. Außerdem ist die Me…idiancurve ein Hauptdurchschnitt der Rotationsfläche, weil die Ebene dieses …urchschnittes zugleich die Normale und die Tangente einer der Krümmungs…inien enthält. Bei einer Rotationsfläche fällt also einer der Hauptschnitte …it einer der Krümmungslinien zusammen, und dasselbe ist jedesmal der Fall, …enn eine Krümmungslinie eben ist und ihre Ebene durch die Normale der …otationsfläche geht. So fallen z. B. bei den cylindrischen Flächen die Haupt…chnitte, wovon der eine der gerade Durchschnitt und der andere die gerade …rzeugungslinie ist, resp. mit den Krümmungslinien zusammen.

§. 286. Die Gleichung (i) wird identisch und man kann daraus keinen …estimmten Werth von y' mehr ableiten, wenn die drei Gleichungen stattfinden:

$$(1 + p^2) s - pqr = 0, \quad (1 + p^2) t - (1 + q^2) r = 0, \quad (1 + q^2) s - pqt = 0,$$

wovon die dritte eine Folge aus den beiden andern ist, und welche mit dem …ysteme (f) gleichbedeutend sind, so daß die Punkte der krummen Fläche, für …elche dieser Umstand stattfindet, nichts anders als Nabelpunkte sind.

Wenn die Gleichung (i) identisch gemacht wird, so wird die Normale im Punkte (x, y, z) von der durch einen unendlich nahe liegenden Punkt …ehenden Normale immer geschnitten, in welcher Richtung dieser zweite Punkt

auch genommen werden mag; aber daraus darf man nicht ſchließen, daß der Nabelpunkt ein Punkt iſt, worin ſich unendlich viele Krümmungslinien durchkreuzen, oder daß die durch den Nabelpunkt in der Berührungsebene gezogenen geraden Linien alle an den Krümmungslinien tangent ſind. Wir wollen der Kürze wegen die Gleichung (i) auf folgende Form bringen:

$$\varphi \cdot y'^2 + \psi \cdot y' + \omega = 0,$$

wo φ, ψ, ω, Functionen von x, y bezeichnen, welche verſchwinden, wenn der Punkt (x, y, z) ein Nabelpunkt iſt. Die Differenzirung der Gleichung (i) gibt zur Beſtimmung von y' folgende Gleichung des dritten Grades:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}y'\right)y'^2 + \left(\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy}y'\right)y' + \frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dy}y' = 0.$$

Je nachdem dieſe Gleichung lauter reelle Wurzeln hat, oder nicht, gehen durch den Nabelpunkt drei Krümmungslinien, oder nur eine einzige. Wenn dieſe letzte Gleichung für die dem Nabelpunkte entſprechenden Werthe von x, y ebenfalls identiſch gemacht wird, ſo differenzirt man ſie ebenfalls, wodurch man eine Gleichung des vierten Grades von y' erhält, und je nachdem dieſe neue Gleichung vier, oder zwei reelle, oder nur imaginäre Wurzeln hat, iſt der Nabelpunkt ein Durchſchnittspunkt von vier, oder zwei Krümmungslinien, oder es geht gar keine Krümmungslinie durch dieſen Punkt, u. ſ. f. Wenn endlich die dem Nabelpunkte entſprechenden Werthe von x, y die Gleichung (i) und alle ihre Ableitungen identiſch machen, ſo iſt der Nabelpunkt ein Punkt, worin ſich nach allen Richtungen Krümmungslinien durchkreuzen. Dieſer Fall findet bei den Scheiteln der Rotationsflächen ſtatt, welche offenbar, wenn ſie keine vorſpringenden Punkte ſind, die charakteriſtiſche Eigenſchaft der Nabelpunkte darbieten, und worin ſich alle Meridiane, welche Krümmungslinien dieſer Flächen ſind, durchſchneiden.

§. 287. Wir wollen das Vorhergehende auf das in §. 283 erwähnte Ellipſoid anwenden, ſo verwandelt ſich die Gleichung (i) in folgende:

$$Axyy'^2 + (x^2 - Ay^2 - B)y' - xy = 0 \qquad (10)$$

und ihre Ableitung iſt:

$$(2Axy' + x^2 - Ay^2 - B)y'' + Axy'^3 + Ayy'^2 + (x - 2Ay)y' - y = 0,$$

welche Gleichung ſich für die den Nabelpunkten entſprechenden Werthe $y = 0$, $x = \pm\sqrt{B}$ auf $Ay'^3 + y' = 0$ reducirt. Dieſe letzte Gleichung geſtattet nur die eine reelle Wurzel $y' = 0$, weil A einen poſitiven Coefficienten bezeichnet. Es geht alſo nur eine Krümmungslinie durch die Nabelpunkte des Ellipſoides mit drei ungleichen Aren, und dieſe Linie iſt der Durchſchnitt, welcher die größte und kleinſte Axe enthält.

Wenn man $a = b$ ſetzt, in welchem Falle das Ellipſoid ein Rotationsellipſoid um ſeine zur Axe der z genommene kleine Axe wird; ſo hat man $A = 1$, $B = 0$, und die Coordinaten der Nabelpunkte ſind $x = 0$, $y = 0$, weil in der That dieſe Punkte mit den Polen des abgeplatteten Ellipſoides zuſammenfallen. Die Gleichung (10) kann alsdann auf folgende Form gebracht werden:

$$(yy' + x)(xy' - y) = 0,$$

und ſie zerfällt in die beiden folgenden:

$$yy' + x = 0, \quad xy' - y = 0.$$

Für $x = 0$, $y = 0$ iſt der durch die erſte der beiden letzten Gleichungen gegebene Werth von y' imaginär (§. 182) und der Werth, welchen die zweite

Gleichung gibt, iſt wirklich unbeſtimmt, was auch der Fall ſein muß, weil alle Meridiane, welche ſich auf die Ebene der x y nach geraden Linien projiciren, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen, eben ſo viele Krümmungslinien des Ellipſoides ſind.

Wenn man $b = c$ ſetzt, in welchem Falle das Ellipſoid ein Rotationsellipſoid um ſeine zur Axe der x genommene große Axe wird, ſo hat man $A = 0$, $B = a^2$ und die Gleichung (10) zerfällt in die beiden folgenden:

$$y' = \infty\,, \quad (x^2 - a^2)\, y' - xy = 0\,.$$

Wenn man in die Ableitung der vorhergehenden Gleichung die Werthe der Coordinaten der Pole oder der Nabelpunkte, nämlich $x = \pm a$, $y = 0$ einführt, ſo ergibt ſich daraus $y' = 0$, und folglich hat y' in dieſen Punkten nur die beiden Werthe $0, \infty$. In der That projiciren ſich die Meridiane auf die Ebene der x y nach Ellipſen, welche alle die Axe der x ſenkrecht durchſchneiden, mit Ausnahme des Meridianes, deſſen Projection die Axe der x ſelbſt iſt.

§. 288. Wenn die krumme Fläche ſinguläre Punkte hat, für welche r, s, t Functionen von y' werden, wie bereits wiederholt erklärt iſt, ſo bleibt die Gleichung (i) in Beziehung auf die Unbekannte y' für die in Rede ſtehenden ſingulären Punkte keine algebraiſche Gleichung des zweiten Grades mehr und kann eine beliebige Anzahl reeller Wurzeln haben.

§. 289. Den beiden Syſtemen der aufeinander ſenkrechten Krümmungslinien (s_1), (s_2) entſprechen zwei Syſteme abwickelbarer Flächen (Σ_1), (Σ_2) und Rückkehrkanten oder Wendungscurven (σ_1), (σ_2). (§. 284.) Der geometriſche Ort der Rückkehrkanten des erſten Syſtemes iſt eine gewiſſe Fläche und der der Rückkehrkanten des zweiten Syſtemes eine andere Fläche, oder vielmehr, die beiden Syſteme abwickelbarer Flächen haben zuſammengenommen zum geometriſchen Orte ihrer Rückkehrkanten eine Fläche mit zwei Fächern (σ_1, σ_2), wo ſich jedes Fach auf jedes der rechtwinkligen Syſteme bezieht.

Um die Gleichung dieſer Fläche mit zwei Fächern, welche auch der geometriſche Ort der Krümmungsmittelpunkte der Hauptſchnitte der Fläche (S) iſt, zwiſchen ξ, η, ζ zu erhalten, müßte man x, y, z zwiſchen den Gleichungen (h), (h″) und der Gleichung der Fläche (S) eliminiren.

Da jeder Hauptkrümmungshalbmeſſer eine der Rückkehrkanten berührt, ſo berührt derſelbe auch die Fläche, welche der geometriſche Ort aller dieſer Rückkehrkanten iſt. Die Fläche der Hauptkrümmungsmittelpunkte iſt folglich gegen die urſprüngliche Fläche daſſelbe, wie die Evolute einer ebenen Curve gegen die Evolvente.

Da die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte für denſelben Punkt der Fläche (S) auf derſelben Normale liegen, ſo folgt, daß jede Normale der Fläche (S) jedes der beiden Fächer der Fläche (σ_1, σ_2) berührt. Wenn man durch dieſe Normale zwei Berührungsebenen an die beiden Fächer der Fläche (σ_1, σ_2) legt, ſo ſind dieſe beiden Ebenen vermöge der Haupteigenſchaft der Krümmungslinien aufeinander ſenkrecht. Die beiden Fächer der Fläche der Krümmungsmittelpunkte haben alſo ſolche Formverhältniſſe gegen einander, daß ihre ſcheinbaren Umriſſe, von irgend einem Punkte O aus betrachtet, ſich unter rechten Winkeln durchſchneiden. Denn die ſcheinbaren Umriſſe der beiden Fächer der Fläche (σ_1, σ_2) ſind die Berührungslinien dieſer Fächer mit den umſchriebenen Kegelflächen, deren Spitzen im Punkte O liegen. Nun haben aber dieſe beiden Kegelflächen eine gemeinſchaftliche Erzeugungslinie, welche die durch den Punkt O der Fläche (S) gehende Nor-

male iſt und ihre Berührungsebenen nach dieſer Erzeugungslinie ſind aufeinander ſenkrecht.

3) Osculation der krummen Flächen. — Definition und Maß der Krümmung der Flächen.

§. 290. Zwei Flächen:

$$z = f(x, y), \qquad (z) \qquad\qquad z = f_1(x, y), \qquad (z_1)$$

welche einen gemeinſchaftlichen Punkt (x, y, z) haben, haben in dieſem Punkte eine Berührung der erſten Ordnung (§. 203), wenn die Coordinaten x, y, z den Gleichungen:

$$p = p_1, \quad q = q_1 \qquad (11)$$

genügen, oder wenn die beiden Flächen in dem gemeinſchaftlichen Punkte eine gemeinſchaftliche Tangente haben. Wenn außerdem die Gleichungen:

$$r = r_1, \quad s = s_1, \quad t = t_1 \qquad (12)$$

ſtattfinden, ſo findet zwiſchen den beiden Flächen eine Berührung der zweiten Ordnung oder eine Osculation ſtatt. Allgemein, die Berührung heißt von der n^{ten} Ordnung, wenn alle partielle Ableitungen $p, q, r, \ldots$ der Gleichungen der beiden Flächen bis zu der Ableitung von der n^{ten} Ordnung incl. für daſſelbe Syſtem der Werthe der Coordinaten x, y, z dieſelben Werthe annehmen für die beiden betrachteten Flächen.

Wenn die Flächen keine Stetigkeitsunterbrechungen von der $(n+1)^{ten}$ oder von einer niedrigern Ordnung erfahren, und wenn $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ſehr kleine Größen der erſten Ordnung bezeichnen; ſo iſt die Entfernung des Punktes $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, welcher auf der einen Fläche liegt, von der andern Fläche im Allgemeinen eine ſehr kleine Größe von der $(n+1)^{ten}$ Ordnung, wenn die zwiſchen den beiden Flächen ſtattfindende Berührung von der n^{ten} Ordnung iſt. Den Beweis dieſes Lehrſatzes wollen wir der Kürze wegen übergehen, weil er ſich leicht herſtellen läßt, wenn man das im §. 240 Geſagte mit dem, was im §. 203 und folg. geſagt iſt, vergleicht.

Im Intereſſe der geometriſchen Anwendungen genügt es, wenn wir hier blos die Berührungen der beiden erſten Ordnungen, d. h. die einfache Berührung und die Osculation zwiſchen krummen Flächen betrachten. *)

§. 291. Wir wollen an die Fläche (z) in dem Punkte (x, y, z) eine Berührungsebene legen, und die krumme Fläche mit einer auf dieſer Ebene ſenkrechten Ebene durchſchneiden. Der Einfachheit wegen kann man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Berührungspunkt legen und die Ebene der xy mit der Berührungsebene zuſammen fallen laſſen. Es ſei Δz die Ordinate der ſchneidenden Ebene und $\Delta x, \Delta y$ ſeien die Coordinaten in der Ebene der xy der Punkte, worin ſie die krumme Fläche trifft; ſo hat man, wenn man $\Delta x, \Delta y$ als ſehr kleine Größen der erſten Ordnung betrachtet und die ſehr kleinen Größen der dritten Ordnung unberückſichtigt läßt:

$$\Delta z = \tfrac{1}{2} r \Delta x^2 + s \Delta x \Delta y + \tfrac{1}{2} t \Delta y^2. \qquad (13)$$

Wir wollen $\Delta x = \varepsilon \xi$, $\Delta y = \varepsilon \eta$, ſetzen, wo ε eine ſehr kleine Größe der erſten Ordnung bezeichnet, ſo muß man, da Δz nach der Gleichung

*) Wegen der Berührungen höherer Ordnungen vergleiche man eine Abhandlung von Olivier in dem Journal de l'École polytechnique. 25e cahier. p. 123.

(13) von der zweiten Ordnung iſt, $\Delta z = s^2 k$ ſetzen, und alsdann gibt dieſe Gleichung:

$$2k = r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2. \qquad (k)$$

Wenn alſo Δz ohne Ende abnimmt, ſo wird die Durchſchnittscurve der Curve, für welche ξ, η die veränderlichen Coordinaten in Beziehung auf die Axen der x und der y ſind, und deren Gleichung die Gleichung (k) iſt, immer mehr und mehr ähnlich, oder mit andern Worten: die Durchſchnittscurve wird dem in §. 279 erwähnten Hülfskegelſchnitte, deſſen Radienvectoren den Quadratwurzeln aus den Krümmungshalbmeſſern der Normalſchnitte, deren Ebenen die Berührungsebene nach dieſen Radienvectoren durchſchneiden, immer mehr und mehr ähnlich.

Wegen dieſes Umſtandes hat C. Dupin die Durchſchnittscurve der krummen Fläche mit einer in einer unendlich kleinen Entfernung vom Berührungspunkte zur Berührungsebene parallel gelegten Ebene die Indicatrix oder anzeigende Curve genannt. Dieſe Indicatrix iſt eine Ellipſe, wenn die krumme Fläche ihre Krümmung ganz um die Berührungsebene herum nach derſelben Seite kehrt, und im entgegengeſetzten Falle entſpringen die beiden conjugirten Hyperbeln, welche an die Stelle der Ellipſe treten, aus dem Durchſchnitte der krummen Fläche mit zwei einander unendlich nahe liegenden Ebenen, welche beide zu der Berührungsebene parallel ſind und dieſe zwiſchen ſich faſſen.

Die anzeigende Ellipſe wird in den Nabelpunkten ein Kreis, und aus dieſem Grunde ſind die Berührungsebenen in den Nabelpunkten des Ellipſoides zu den Ebenen parallel, welche die Eigenſchaft haben, das Ellipſoid nach Kreiſen zu durchſchneiden (§. 283).

§. 292. Wenn die krumme Fläche (z_1) drei willkührliche Parameter hat, ſo kann man dieſe ſo annehmen, daß die Bedingung $f(x, y) = f_1(x, y)$ und außerdem die Gleichungen (11) erfüllt werden, oder daß zwiſchen den beiden Flächen (z), (z_1) im Punkte (x, y, z) eine einfache Berührung ſtattfindet. Wenn in der Gleichung (z_1) ſechs willkührliche Parameter vorkommen, ſo kann man ſie ſo annehmen, daß auch den Gleichungen (12) genügt wird, oder daß zwiſchen den beiden Flächen eine Osculation ſtattfindet. Man kann alſo im Allgemeinen keine Kugel beſtimmen, welche eine gegebene krumme Fläche in einem gegebenen Punkte osculirt; denn die allgemeinſte Gleichung der Kugelfläche enthält nur vier willkührliche Parameter, nämlich den Halbmeſſer und die drei Coordinaten des Mittelpunktes.

Die Bedingungen der Osculation zwiſchen zwei krummen Flächen (z), (z_1) werden analytiſch durch das Syſtem der Gleichungen (11) und (12) ausgedrückt; allein es iſt zweckmäßiger, dieſe Bedingungen geometriſch auszudrücken, indem man ſagt: daß zwei Flächen einander osculiren, wenn ſie außer einem gemeinſchaftlichen Punkte nicht blos dieſelbe Berührungsebene, ſondern auch ihre Hauptdurchſchnitte in denſelben Normalebenen und dieſelben Hauptkrümmungshalbmeſſer in demſelben Sinne gegen die Berührungsebene haben. Nach allem in dieſem Kapitel Geſagten iſt einleuchtend, daß ſich das Stattfinden dieſer geometriſchen Relationen aus den Gleichungen (11) und (12) ergibt, und wenn ſie ſtattfinden, ſo ſchneidet jede durch den gemeinſchaftlichen Punkt gelegte Ebene die beiden Flächen nach zwei Linien, welche in dieſem Punkte denſelben Krümmungshalbmeſſer haben.

Wenn alſo die beiden Hauptkrümmungshalbmeſſer der Fläche (z) nach demſelben Sinne gerichtet ſind, ſo kann man immer ein Rotationsellipſoid conſtruiren, welches dieſe Fläche im Punkte (x, y, z) osculirt; denn man kann es ſo einrichten, daß einer der Meridiandurchſchnitte des Ellipſoides in die Ebene eines Hauptſchnittes der osculirten Fläche fällt, indem eine der

Axen der Meridianellipſe mit der Normale zuſammenfällt, worauf man die Axen der Meridianellipſe nur ſolche Längen zu geben braucht, daß die Hauptkrümmungshalbmeſſer für die osculirte Fläche und für das Ellipſoid dieſelben ſind, und zwar gibt dieſe Conſtruktion zwei osculirende Ellipſoide, wovon das eine ein längliges und das andere ein abgeplattetes iſt.

Wenn die beiden Hauptkrümmungshalbmeſſer der krummen Fläche nach entgegengeſetztem Sinne gerichtet ſind, ſo kann man für das Osculationsellipſoid ein Rotationshyperboloid mit einem Fache ſubſtituiren, deſſen Kehlkreis (§. 239) in die Ebene eines Hauptſchnittes der Fläche fällt.

Noch einfacher kann man eine Rotationsfläche beſchreiben, welche eine gegebene krumme Fläche osculirt, wenn man den Krümmungskreis eines Hauptſchnittes der krummen Fläche ſich um eine in ſeiner Ebene ſenkrecht auf die Normale gezogene und durch den Krümmungsmittelpunkt des andern Hauptſchnittes gehende Axe drehen läßt. Die osculirende Fläche wird ein gerader Cylinder mit kreisförmiger Baſis, wenn der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes des erſten Hauptſchnittes unendlich wird, wie dieſes bei den abwickelbaren Flächen der Fall iſt (§. 281).

§. 293. Dieſes führt uns auf die Definition und das Maß der Krümmung einer Fläche nach Gauß; denn man hat für dieſe Größe weder eine genaue Definition, noch ein entſprechendes Maß, ſo lange man blos nach den Lehrſätzen von Meusnier und Euler die Relationen angibt, welche zwiſchen den Krümmungen der auf der krummen Fläche beſchriebenen Linien ſtattfinden.

Erinnern wir uns zunächſt in aller Kürze an das Maß der Krümmung ebener Curven wieder. Auf der Curve, deren Krümmung man im Punkte m meſſen will, wollen wir einen durch dieſen Punkt gehenden Bogen Δs nehmen, in den Endpunkten dieſes Bogens zwei Normalen ziehen, und nachdem in der Ebene der Curve ein Kreis von dem Halbmeſſer $= 1$ beſchrieben iſt, zwei Halbmeſſer ziehen, welche reſp. zu den erwähnten Normalen parallel ſind und einen Kreisbogen $\Delta\tau$ zwiſchen ſich faſſen; ſo iſt nach §. 193 das Verhältniß $\frac{d\tau}{ds}$ die Grenze, gegen welche das Verhältniß $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ convergirt, wenn der Bogen Δs ohne Ende abnimmt, dabei aber immer den Punkt m enthält, und dieſe Grenze iſt das Maß der Krümmung der Linie im Punkte m.

Eine ganz ähnliche Conſtruction iſt auf die krummen Flächen anwendbar; denn wir wollen uns auf der krummen Fläche, deren Krümmung im Punkte m gemeſſen werden ſoll, eine geſchloſſene Linie ſo beſchrieben denken, daß der auf der Fläche von dieſer Curve eingeſchloſſene Flächenraum ω den Punkt m enthält, wo, wie im ſechsten Kapitel des fünften Buches ausführlicher gezeigt werden wird, unter der erwähnten Flächengröße die Grenze zu verſtehen iſt, welcher ſich der Inhalt oder die Größe einer in oder um den betrachteten Theil der krummen Fläche beſchriebenen polyedriſchen Fläche ohne Ende nähert, wenn die Anzahl der ebenen Flächen des Polyeders ohne Ende zu- und ihre Dimenſionen ohne Ende abnehmen. Dieſe Definition der Größe ω iſt also der der Größe s in §. 174 ganz analog. Aus einem beliebigen Punkte des Raumes als Mittelpunkt wollen wir uns mit einem Halbmeſſer $= 1$ eine Kugelfläche beſchrieben denken und die Halbmeſſer ziehen, welche zu allen an dem Umfange der Flächengröße ω normal auf der krummen Fläche gezogenen geraden Linien parallel ſind; ſo iſt der geometriſche Ort dieſer Halbmeſſer eine Kegelfläche, welche auf der Kugelfläche ein Flächenſtück θ abſchneidet und die Grenze, gegen welche das Verhältniß $\frac{\theta}{\omega}$ convergirt, wenn die Flä-

ω ohne Ende abnimmt, aber immer den Punkt m enthält, muß nach
zie als Maß der Krümmung der krummen Fläche im Punkte m
werden. Um jede Schwierigkeit zu vermeiden, wollen wir zunächst
, daß von einer krummen Fläche die Rede sei, deren beide Haupt-
halbmesser nach demselben Sinne gerichtet sind, und welche außer-
unkte m keine Stetigkeitsunterbrechungen erfährt.

wie man bei der Messung der Krümmung einer ebenen Curve für
Krümmungskreis, oder jede andere sie osculirende Curve substituiren
ıso kann man bei der Messung der Krümmung einer krummen Fläche
eine andere Fläche substituiren, welche die gegebene in dem Punkte
ür welchen das Maß der Krümmung bestimmt werden soll.

wollen für die osculirende Fläche die nehmen, welche der Kreis von
messer R_2 beschreibt, indem er sich um eine in seiner Ebene senk-
die Normale durch den Mittelpunkt des Kreises von dem Halbmesser
ne gerade Linie dreht. Es sei ds_1 der unendlich kleine Winkel,
e Ebene des beweglichen Kreises in jeder seiner äußersten Lagen mit
des Normalschnittes bildet, worauf sie ursprünglich lag, indem die
der beweglichen Ebene zu beiden Seiten der Ebene des Normal-
dieselbe Amplitude hat. Es sei ferner ds_2 der unendlich kleine
welchen zwei Halbmesser des Kreises von dem Halbmesser R_2 mit der
zu beiden Seiten dieser geraden Linie in der Ebene dieses Kreises
fällt die unendlich klein gewordene Fläche ω mit dem unendlich klei-
tecke zusammen, dessen Seiten $2R_1 ds_1$, $2R_2 ds_2$ sind und dessen
glich gleich $4R_1R_2 ds_1 ds_2$ ist. Ferner wird die entsprechende Fläche θ,
der die unendlich kleinen Größen höherer Ordnungen unberücksichtigt
usgedrückt durch $4ds_1 ds_2$, und man hat folglich:

$$\lim. \frac{\theta}{\omega} = \frac{1}{R_1 R_2}, \qquad (1)$$

Krümmung einer Fläche hat das Product der Krümmun-
r beiden Hauptschnitte zum Maße.

Fläche θ geht in einen Punkt über, wenn die endliche, oder un-
eine Fläche ω auf einer Ebene genommen wird, und sie wird ein
Umfanges eines größten Kreises, wenn die endliche, oder unendlich
che ω einer cylindrischen Fläche angehört. Durch diese Bemerkung
Schwierigkeit beseitigt, welche daraus entspringen könnte, daß nach
el (1) eine abwickelbare Fläche, für welche einer der Krümmungs-
R_1, R_2 immer unendlich ist (§. 281 und §. 292), in allen ihren
ine Krümmung gleich Null hätte, welche Eigenschaft nur der Ebene
n scheint. Die Ebene, die abwickelbaren und die übrigen krummen
nd hinsichtlich der Krümmung ebenso wenig mit einander vergleichbar,
unkt, eine Linie und eine Fläche hinsichtlich der Größe. Man kann
n: daß die Krümmung einer abwickelbaren Fläche ein unendlich Klei-
ersten Ordnung und die einer Ebene ein unendlich Kleines der
Ordnung ist; d. h. die Krümmung einer Fläche ist eine sehr kleine
r ersten, oder zweiten Ordnung, wenn sie nahezu mit einem Cylinder
einer Ebene zusammenfällt. Der Ausdruck für die Krümmung einer
mmt das positive, oder negative Zeichen an, je nachdem die beiden
nmungshalbmesser nach demselben, oder nach entgegengesetztem Sinne
sind. Diese Veränderung des Zeichens ist willkührlich und gestattet
irliche Interpretation, wie bei der Krümmung einer Linie, wenn sich
dieser Krümmung wirklich ändert. Allein dieser Umstand ist gegen
stellende Analogie kein gegründeter Einwurf, sondern vielmehr eine

Beſtätigung derſelben; denn bekanntlich ſind die Regeln zur Interpretatic Zeichen auf Coordinaten, die von einem feſten Anfangspunkte aus g werden, und auf ihre Differenziale anwendbar; aber ſie ſind auf Fl welche durch Producte dieſer Coordinaten oder ihrer Differenzialelementc gedrückt werden, nur vermöge willkührlicher Conventionen anwendbar.

Sophie Germain hat in ihren Unterſuchungen über die elaſ Flächen, und namentlich in einer Abhandlung *), welche das letzte ſchrift riſche Product dieſer merkwürdigen Frau iſt, darzuthun geſucht, daß die mung einer Fläche die Function $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ zum Maße habe; allein Gründe ſind nicht überzeugend und das Maß der Krümmung, welch vorſchlägt, iſt in der That nichts weiter, als eine rein willkührliche Defi während der Satz von Gauß, welcher durch alle geometriſchen Analogie gedeutet und beſtätigt wird, ein wahres Fundamentaltheorem iſt, n wichtige Folgerungen fließen können, und welches ſeiner Eleganz und Ei heit wegen auch in die Elemente aufgenommen zu werden verdient.

*) Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, Band VII., S.

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite	7	Zeile	5	von unten	lies	x ſich ſtatt x
„	10	„	1	„ „	„	Aufgabe ſtatt Aufgaben
„	12	„	3	„ „	„	Schwingungsdauer beſtimmt, d. h. wir betrachten die Veränderung derſelben . . . . .
„	18	„	8	„ „	„	Gliede ſt. Grade
„	22	„	26	„ „	„	anſetzt ſt. verſetzt
„	23	„	14	„ „	„	eine ſt. einer
„	—	„	4	„ „	iſt	„ab" zu ſtreichen
„	24	„	7	von oben	lies	welchen ſt. welchem
„	—	„	25	„ „	„	eine ſt. einer
„	26	„	13	„ „	„	die Ergänzung für die ſt. die
„	28	„	8	von unten	„	Null ſein ſt. Null
„	33	„	8	von oben	„	aus gemeſſen
„	43	„	20	„ „	„	ſind ſt. iſt
„	60	„	13	„ „	„	$\psi(x)\varphi'(x) - \varphi(x)\psi'(x)$
„	61	„	15	von unten	„	die inverſe Function,
„	68	„	15	von oben	„	y ſt. Y
„	72	„	1	von unten	„	$\frac{dx}{dy}$ ſt. $\frac{dy}{dx}$
„	74	„	8	von oben	„	Vergleiche
„	92	„	3	von unten	„	dieſelben ſt. die halben
„	95	„	17	von oben	„	berührt (Fig. 30)
„	97	„	4	„ „	„	$b^{-\frac{1}{x}n'}$ ſt. $b^{-\frac{1}{x}n}$
„	—	„	12	„ „	„	der der ſt. der
„	98	„	1	von unten	„	läßt, zu ſuchen.
„	100	„	17	„ „	„	Ueberdies iſt klar,
„	102	„	19	von oben	„	erwärmt wird,
„	104	„	3	von unten	„	(a) ſt. (G)
„	106	„	14, 15	„ „	„	ψ ſt. φ
„	118	„	8	„ „	„	f ſt. f'
„	123	„	7	„ „	„	$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x\sqrt{-1}} + \frac{1}{1+x\sqrt{-1}}\right]$
„	126	„	7	„ „	„	Unterſuchung ſt. Urſachen
„	132	„	8	„ „	„	ſondern ſt. allein, und dieſe ſt. dieſen
„	136	„	1	„ „	„	Functionen ſt. Function
„	139	„	6	von oben	„	rechtwinklig
„	143	„	24	„ „	„	v zu ſt. zu
„	146	„	14	von unten	„	daß man
„	148	„	10	„ „	„	Gleichungen, wovon zwei identiſch ſind;
„	171	„	8	„ „	„	Verbindung
„	179	„	8, 12	von oben	„	$d[u.d^{n-1}[$ ſt. $[d u.[d^{n-1}$
„	183	„	21	von unten	„	Werth von y''
„	184	„	18	„ „	„	zwiſchen x ſt. x
„	194	„	17	von oben	„	$\xi - x$ ſt. $-x$
„	202	„	2	von unten	„	Hypotenuſe
„	211	„	2	„ „	„	umhüllten
„	—	„	3	„ „	iſt	ſie zu ſtreichen

Seite	214	Zeile	18	von	unten	lies	unausdehnbaren
"	221	"	5	von	oben	"	Pol ſt. Fall
"	230	"	15	"	"	"	Kepler
"	236	"	28	"	"	"	und es
"	243	"	8	"	"	"	ebene ſt. linie
"	246	"	5	"	"	"	bildet
"	—	"	10	"	"	"	andere
"	248	"	3	"	"	"	Curve
"	—	"	22	"	"	"	Lagen ſt. Bögen
"	—	"	35	"	"	"	erſten der
"	258	"	2	"	"	"	mehr blos
"	261	"	11	von	unten	"	von $\omega'\alpha$
"	267	"	11	von	oben	"	der der
"	269	"	13	"	"	"	die der

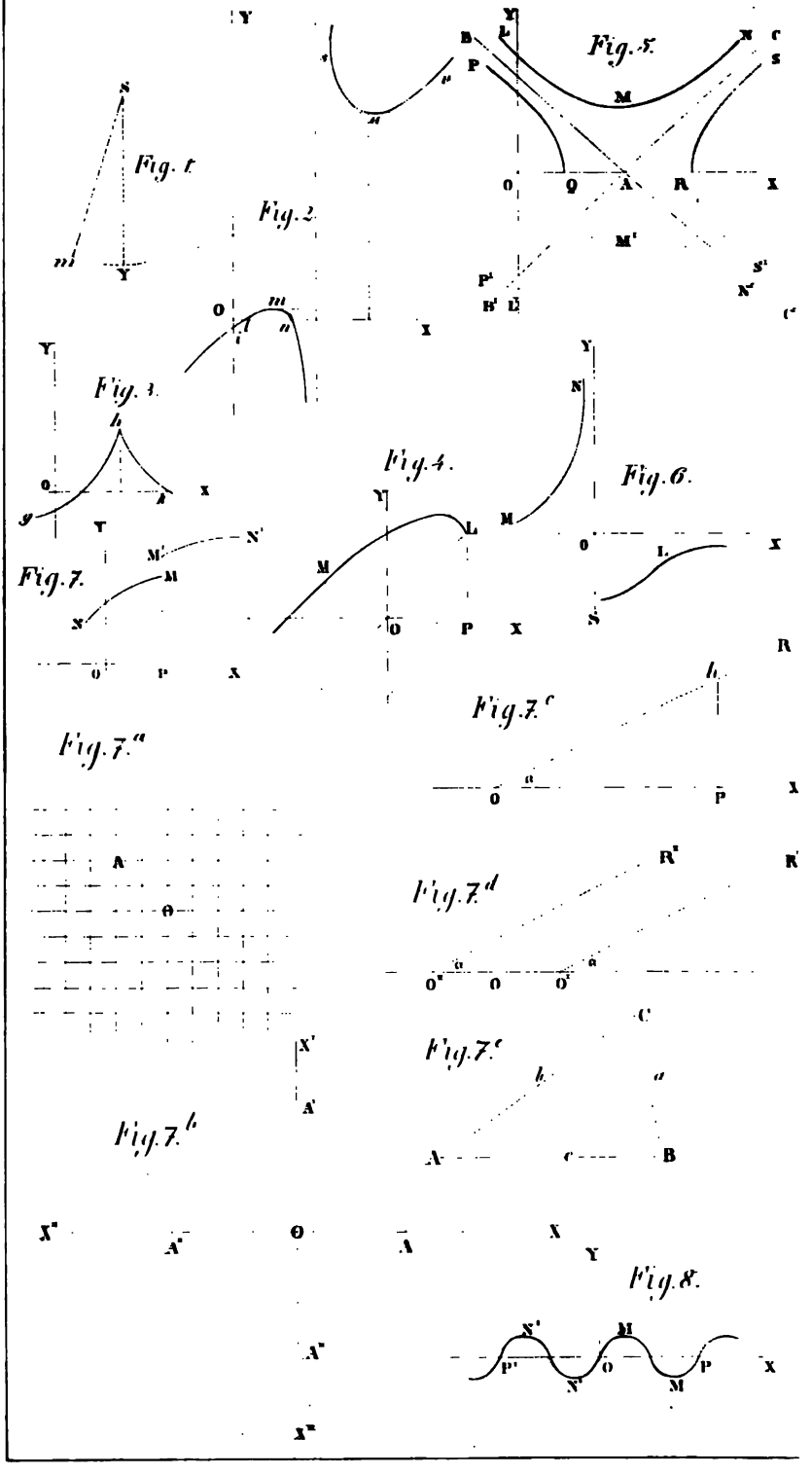


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 7.a
Fig. 7.b
Fig. 7.c
Fig. 7.d
Fig. 7.e
Fig. 8.

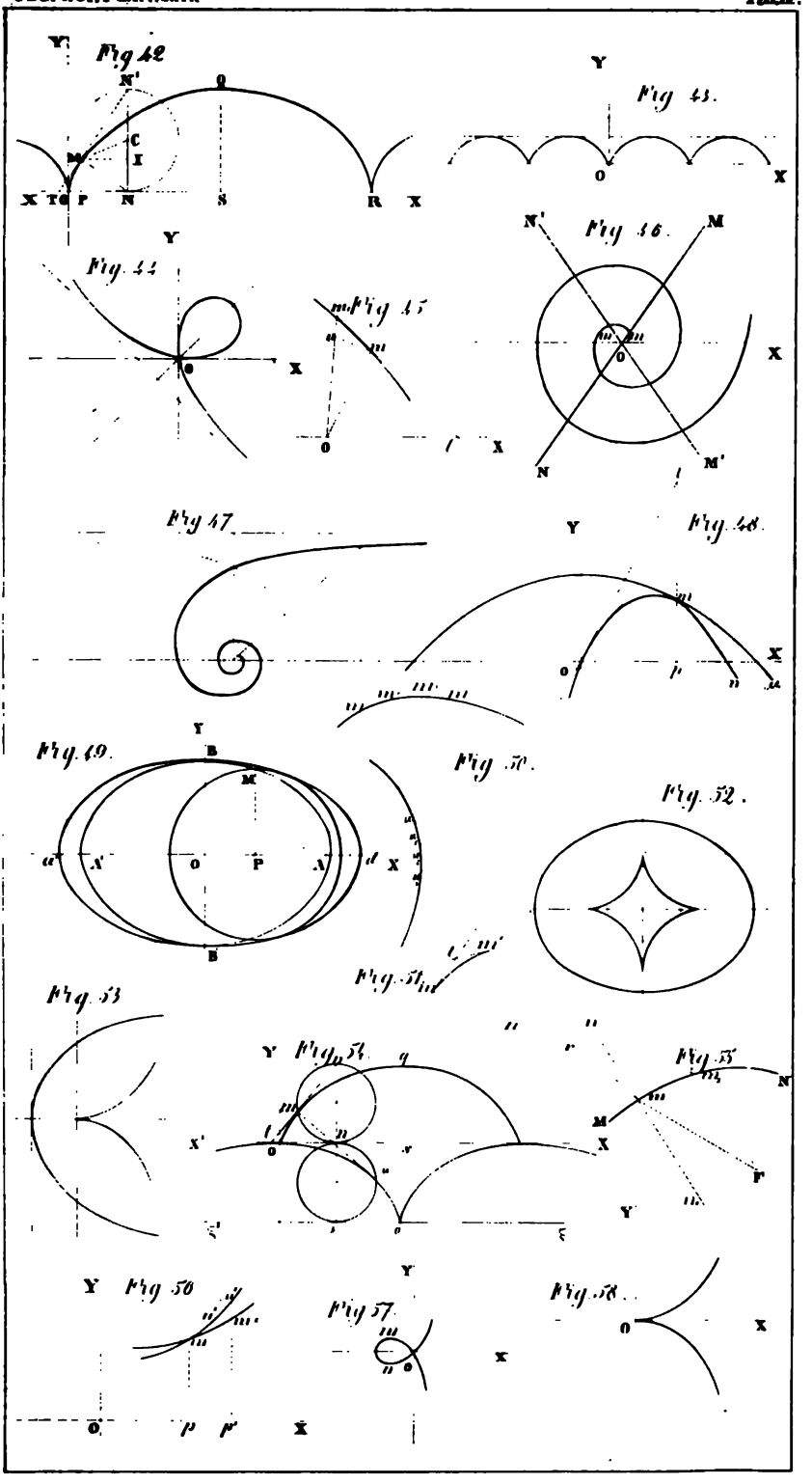
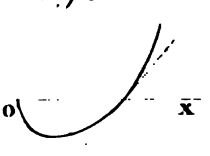


Fig. 42
Fig. 43.
Fig. 44
Fig. 45
Fig. 46.
Fig. 47
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51
Fig. 52.
Fig. 53
Fig. 54
Fig. 55
Fig. 56
Fig. 57
Fig. 58.

Fig. 25.

Fig. 30



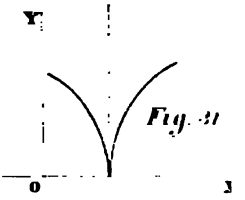


Fig. 26

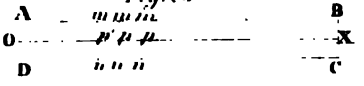


Fig. 32

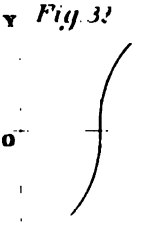


Fig. 34

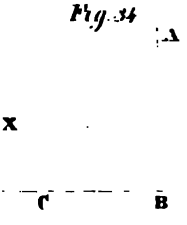


Fig. 27.

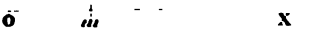


Fig. 28

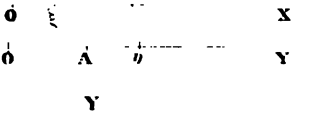


Fig. 33

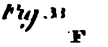
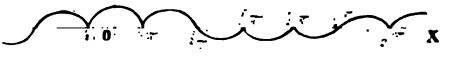


Fig. 29



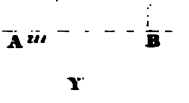


Fig. 35

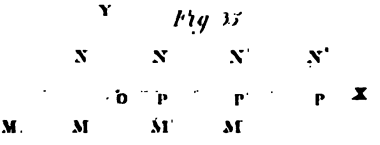


Fig. 36

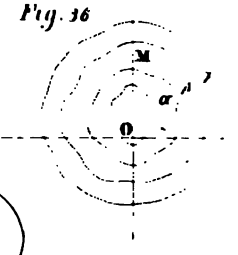


Fig. 37

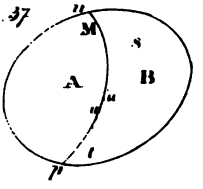
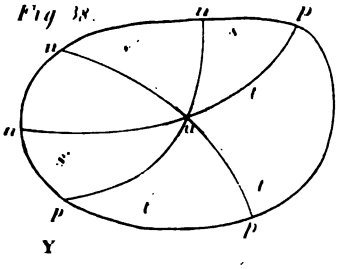


Fig. 38.



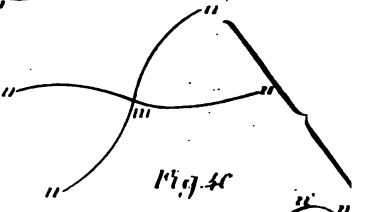


Fig. 41

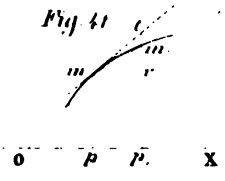


Fig. 39.

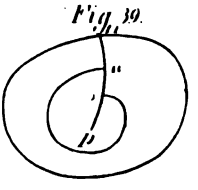
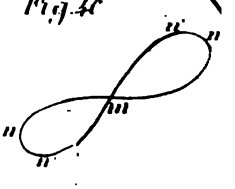


Fig. 40



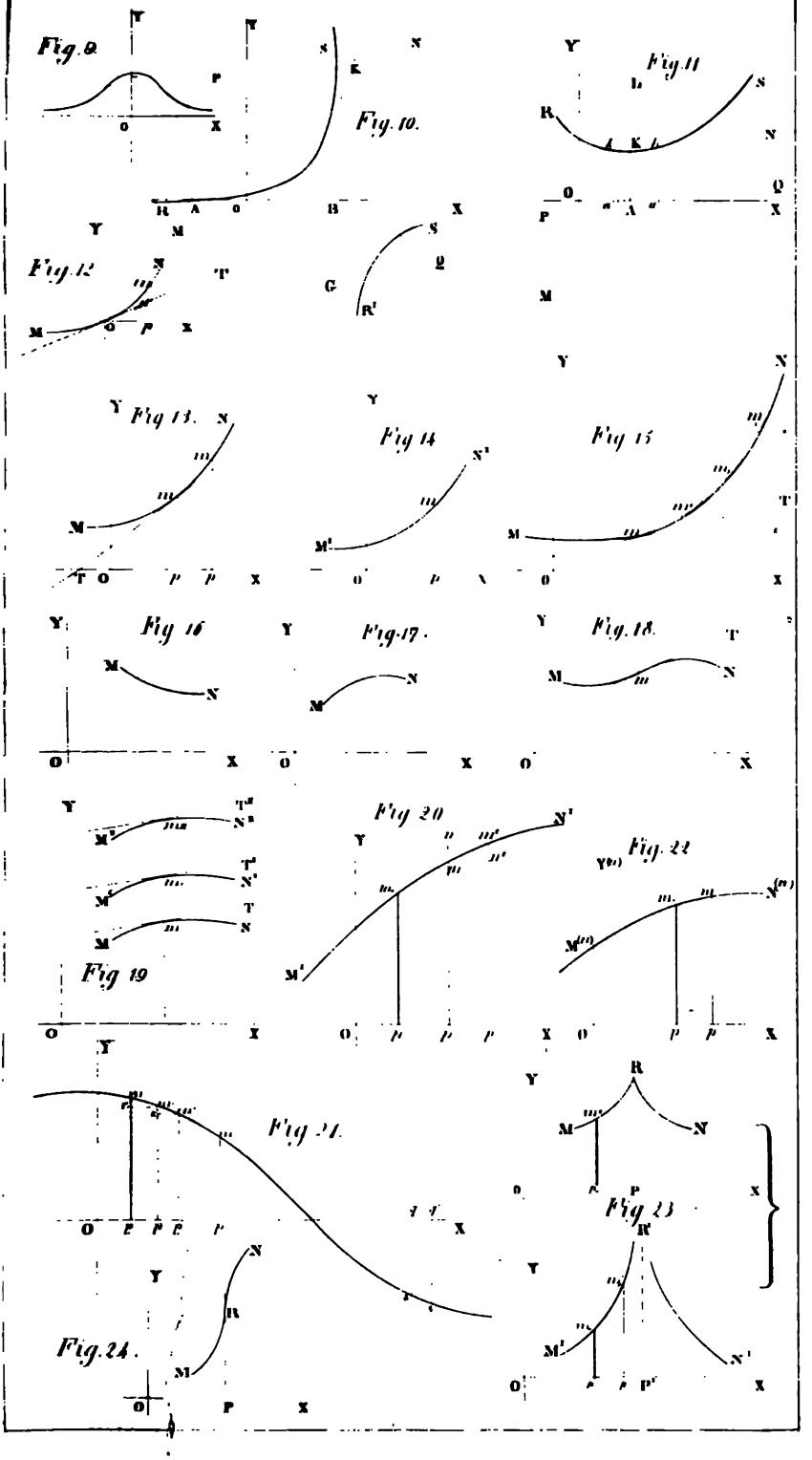


Fig. 9
Fig. 10.
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13.
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 22
Fig. 21.
Fig. 23
Fig. 24.

Fünftes Buch.

Von den Integralen.

Erſtes Kapitel.

Integration der algebraiſchen Functionen.

§. 294. In dem erſten Buche (Kap. 3 und 4) haben wir die Principien der Theorie der Quadraturen und der Integration der Functionen mit einer einzigen veränderlichen Größe angegeben. Die Kenntniß dieſer Grundlehren war uns ſchon dort von Nutzen, ſowohl um uns einen allgemeinen Begriff von der Natur und den Anwendungen der Infiniteſimalanalyſis zu bilden, als zur Erläuterung gewiſſer Lehren, welche man mit der Differenzialrechnung zu verbinden pflegt. Jetzt wollen wir aber in die eigentliche Integralrechnung treten, und es kommt zunächſt darauf an, die Verfahrungsarten näher zu erörtern, vermittelſt welcher man das Integral einer gegebenen Differenzialfunction finden kann, wenn ſich dieſes Integral unter endlicher Form durch die alleinige Anwendung algebraiſcher, oder ſchon bekannter transcendenter Functionen analytiſch ausdrücken läßt.

Wenn man eine Function $\int x dx$, um ſie zu integriren, in mehrere andere zerlegt, deren Integrale bekannt ſind, ſo nennt man dieſes Verfahren die Integration durch Zerlegung.

Beiſpiel. Es iſt:

$$\int \frac{dx}{\sin.^2 x \cos.^2 x} = \int \frac{(\sin.^2 x + \cos.^2 x)dx}{\sin.^2 x \cos.^2 x} = \int \frac{dx}{\cos.^2 x} + \int \frac{dx}{\sin.^2 x}$$
$$= \text{tang. } x - \text{cot. } x + \text{const.}$$

Wenn man ſetzt:

$$x = \varphi t, \quad dx = \varphi' t dt,$$

ſo wird $\int x dx$ eine Differenzialfunction von t von der Form:

$$f(\varphi t) \cdot \varphi' t dt.$$

Nimmt man nun an, daß man dieſe letzte Function integriren kann, ſo braucht man, um das Integral der gegebenen Function zu erhalten, für t nach der Integration nur ſeinen Werth in x zu ſetzen, und dieſes Verfahren wird die Integration durch Subſtitution genannt.

Um z. B. das Integral:

$$\int \frac{x dx}{x^2 + a^2}$$

zu erhalten, ſetze man:

$$x^2 = t, \text{ folglich: } xdx = \frac{1}{2}dt,$$

ſo verwandelt ſich daſſelbe in:

$$\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+a^2} = \frac{1}{2}\log.(t+a^2) + \text{const.} = \frac{1}{2}\log.(x^2+a^2) + \text{const.}$$

Dieſe beiden Integrationsmethoden und die der theilweiſen Integration (§. 55) werden beſtändig angewandt, und durch Uebung lernt man ſie leicht ſo mit einander verbinden, daß man das geſuchte Reſultat auf dem kürzeſten Wege erhält und es werden in dem Folgenden vielfache Beiſpiele davon vorkommen.

I. Integration rationaler Functionen.

§. 295. Eine ganze rationale algebraiſche Function läßt ſich immer in Monome von der Form $ax^m dx$ zerlegen, und es kann folglich immer unter algebraiſcher Form integrirt werden, weil man durch Umkehrung der Differenziationsregeln

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{const.} \qquad (a)$$

hat.

Zuweilen läßt ſich dieſe Operation durch Subſtitutionen abkürzen; denn iſt z. B.

$$dy = (ax+b)^m dx,$$

und ſetzt man: $ax + b = t$, ſo erhält man:

$$y = \frac{1}{a}\int t^m dt = \frac{t^{m+1}}{a(m+1)} + \text{const.} = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + \text{const.} \quad (1)$$

Die Formeln (a) und (1) finden für poſitive oder negative, ganze oder gebrochene, und ſelbſt für irrationale Werthe von m ſtatt; aber ſie werden für den Werth $m = -1$ unbrauchbar, weil alsdann das Glied:

$$\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

unendlich groß wird, und in der That iſt in dieſem Falle bekanntlich:

$$\int\frac{dx}{x} = \log.x + \text{const.} \qquad (b).$$

Geht man zu den beſtimmten Integralen über, ſo hat man:

$$\int_{x_0}^{x} x^m dx = \frac{x^{m+1} - x_0^{m+1}}{m+1}, \qquad (c)$$

und wenn man im zweiten Theil dieſer Gleichung $m = -1$ ſetzt, ſo erſcheint derſelbe unter der Form $\frac{0}{0}$, woraus erhellet, daß der zweite Theil der Gleichung (a) in derſelben Vorausſetzung nicht unendlich, ſondern wegen der willkührlichen Conſtante, welche darin vorkommt, und welche als unendlich angenommen werden muß, ſowohl, als das veränderliche Glied, unbeſtimmt iſt.

Es iſt nun

$$\frac{d(x^{m+1})}{dm} = x^{m+1}\log.x,$$

und wenn man im zweiten Theil der Gleichung (c) die gewöhnliche Regel zu Beſtimmung der unter der unbeſtimmten Form erſcheinenden Werthe anwendet ſo erhält man:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \log. x - \log. x_0,$$

wie ſich aus der Formel (b) unmittelbar ergibt.

Es ſei:

$$dy = \frac{fx}{(ax+b)^m} \cdot dx,$$

wo fx eine ganze algebraiſche Function und m eine ganze poſitive Zahl iſt. Setzt man wie oben $ax + b = t$, ſo iſt das Differenzial dy, nachdem man in fx für x ſeinen Werth in t geſetzt und die Entwickelung nach den Potenzen von t verrichtet hat, eine Summe von Gliedern von der Form:

$$\frac{Nt^n}{t^m} dt = Nt^{n-m} dt,$$

wo N ein conſtanter Coefficient iſt, und folglich iſt die Beſtimmung des Integrales y auf die Integration einer Reihe eingliederiger Differenziale zurückgeführt.

§. 296. Im Allgemeinen beſteht eine rationale, gebrochene algebraiſche Differenzialfunction aus einer Reihe von Gliedern von der Form:

$$\frac{fx}{Fx} dx \qquad (d),$$

wo fx und Fx zwei ganze Polynome bezeichnen, und man kann immer annehmen, daß der Zähler fx von einem niedrigeren Grade als der Nenner Fx iſt; denn wenn dieſes nicht der Fall wäre, ſo könnte man die algebraiſche Diviſion wirklich verrichten, wodurch die gegebene Function ſich in:

$$fx dx + \frac{f_1 x}{Fx} \cdot dx$$

verwandelte, wo fx eine ganze Function und $f_1 x$ eine Function von einem niedrigeren Grade als Fx erſcheint, ſo daß die Integration der Function (d) auf die der Function

$$\frac{f_1 x}{Fx} \cdot dx$$

zurückgeführt wäre.

Dieſes vorausgeſetzt, wollen wir annehmen, daß die algebraiſche Gleichung:

$$Fx = 0 \qquad (F)$$

keine vielfachen Wurzeln habe, und es ſeien:

$$a, a_1, a_2, \ldots, \alpha \pm \beta\sqrt{-1}, \alpha_1 \pm \beta_1\sqrt{-1}, \text{ ꝛc.}$$

ihre reellen und imaginären Wurzeln, ſo kann man ſetzen:

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{M_1 x + N_1}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \text{ ꝛc.} \quad (2),$$

wo die Coefficienten A_i, M_i, N_i conſtant ſind. Nun iſt aber:

$$\int \frac{A_i dx}{x-a_i} = A_i \log. (x-a_i) + \text{const.},$$

$$\int \frac{(M_i x + N_i) dx}{(x-\alpha_i)^2+\beta_i^2} = \int \frac{M_i (x-\alpha_i) dx}{(x-\alpha_i)^2+\beta_i^2} + \int \frac{\frac{M_i \alpha_i + N_i}{\beta_i} \cdot \frac{dx}{\beta_i}}{\left(\frac{x-\alpha_i}{\beta_i}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{M_i}{2} \log.\left[(x-\alpha_i)^2 + \beta_i^2\right] + \frac{M_i\alpha_i + N_i}{\beta_i} \text{ arc. tang. } \left(\frac{x-\alpha_i}{\beta_i}\right) + \text{const.},$$

so daß man das Integral aller Glieder, in welche die Function (d) zerlegt i und folglich das dieser Function ſelbſt erhält.

Man könnte die Coefficienten A_i, M_i, N_i durch die gewöhnlichen algebr ſchen Regeln beſtimmen, indem man in der Gleichung (2), welche identi ſein muß, die Nenner wegſchaffte, und nach der Entwickelung die Factor womit jede einzelne Potenz von x multiplicirt iſt, einzeln $= 0$ ſetzte, wodu man aber ſo viele Gleichungen des erſten Grades zwiſchen den unbekann Größen erhielte, als ſolcher unbekannten Größen beſtimmt werden ſoll Allein man kann die fraglichen Coefficienten durch die folgende Weiſe di berechnen.

Es iſt:

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{A_i}{x-a_i} + \frac{fx \cdot (x-\alpha_i)}{Fx},$$

wo fx eine ganze Function von x bezeichnet, welche man durch die Reduct aller Brüche, außer $\frac{A_i}{x-a_i}$, welche im zweiten Theile der Gleichung (2) kommen, auf denſelben Nenner, erhält. Hieraus folgt:

$$fx = A_i \frac{Fx}{x-a_i} + fx \cdot (x-a_i).$$

Wenn man in dieſer letzten Gleichung $x = a_i$ ſetzt, ſo verſchwindet das G $fx.(x-a_i)$, der Bruch $\frac{Fx}{x-a_i}$ erſcheint unter der Form $\frac{0}{0}$, und ſein wa Werth iſt die endliche und von Null verſchiedene Größe $F'a_i$, weil a_i nach Vorausſetzung eine einfache Wurzel der Gleichung (F) iſt. Man hat alſo

$$A_i = \frac{fa_i}{F'a_i}.$$

Eben ſo ergibt ſich:

$$fx = \frac{(M_i x + N_i) \cdot Fx}{(x-\alpha_i)^2 + \beta_i^2} + fx \cdot \left[(x-\alpha_i)^2 + \beta_i^2\right],$$

folglich:

$$M_i(\alpha_i \pm \beta_i\sqrt{-1}) + N_i = \pm 2\beta_i\sqrt{-1} \cdot \frac{f(\alpha_i \pm \beta_i\sqrt{-1})}{F'(\alpha_i \pm \beta_i\sqrt{-1})}, \qquad (3$$

welche Gleichung wegen der imaginären Wurzelgröße $\sqrt{-1}$ in zwei an zerfällt und folglich zur Beſtimmung der beiden Coefficienten M_i und N_i reichend iſt.

§. 297. Wenn die Gleichung (F) r gleiche reelle Wurzeln, jede $=$ hat, ſo kann man nicht mehr ſetzen:

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{A'}{x-a} + \frac{A''}{x-a} + \ldots + \frac{A^{(r)}}{x-a} + \frac{A_1}{x-a_1} + \text{ꝛc.};$$

denn wegen der Unbeſtimmtheit der Coefficienten A', A'', ꝛc. wäre dieſe G chung nicht verſchieden von

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x-a_1} + \text{ꝛc.}$$

und man hätte zur Aufſtellung der Identität nicht mehr die hinreichende Anzahl von Coefficienten. Aber man ſetzt alsdann:

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{A'}{x-a} + \frac{A''}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A^{(r-1)}}{(x-a)^{r-1}} + \frac{A^{(r)}}{(x-a)^r} + \frac{A_1}{x-a_1} + \text{ꝛc.},$$

woraus folgt:

$$fx = A^{(r)}F_1x + A^{(r-1)}(x-a)F_1x + \ldots + A''(x-a)^{r-2}F_1x + A'(x-a)^{r-1}F_1x + (x-a)^r fx, \qquad (4)$$

wo der Kürze wegen F_1x das ganze Polynom:

$$\frac{Fx}{(x-a)^r}$$

und fx die ganze Function bezeichnet, welche den Zähler der Summe der auf denſelben Nenner gebrachten Brüche:

$$\frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \text{ꝛc.}$$

ausdrückt.

Wenn man die Gleichung (4) hintereinander (r—1) mal differenzirt und dann ſowohl in dieſer Gleichung, als in den daraus abgeleiteten Differenzialgleichungen $x = a$ ſetzt; ſo erhält man:

$$\left.\begin{aligned} fa &= A^{(r)}F_1a \\ f'a &= A^{(r)}F'_1a + A^{(r-1)}F_1a \\ f''a &= A^{(r)}F''_1a + 2A^{(r-1)}F'_1a + 2A^{(r-2)}F_1a, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

und vermittelſt dieſer Gleichungen kann man ſucceſſive die Coefficienten $A^{(r)}$, $A^{(r-1)}$, $A^{(r-2)}$, ... A'', A' beſtimmen. Uebrigens iſt leicht einzuſehen, daß auch jedes Glied von der Form:

$$\frac{A^{(i)}}{(x-a)^i}\,dx$$

nach der Zerlegung der gegebenen gebrochenen Function algebraiſch integrirt werden kann, mit Ausnahme des Gliedes:

$$\frac{A'}{x-a}dx,$$

welches durch Logarithmen integrirt wird.

Wenn die Wurzel a incommenſurabel iſt, ſo hat das Polynom F_1x ſelbſt in dem Falle incommenſurabele Coefficienten, wo das Polynom Fx nur rationale Coefficienten hätte, und es iſt folglich von Nutzen, die Größen F_1a, F'_1a, F''_1a ꝛc., welche in den Gleichungen (5) vorkommen, berechnen zu können, ohne daß man das Polynom F_1x zu bilden braucht.. Da aber nach der Vorausſetzung:

$$Fx = (x-a)^rF_1x$$

iſt; ſo hat man:

$$F^{(i)}x = (x-a)^rF_1{}^{(i)}x + \frac{i}{1}\cdot r(x-a)^{r-1}F_1{}^{(i-1)}x + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}r(r-1)(x-a)^{r-2}F_1{}^{(i-2)}x + \text{ꝛc.},$$

wo die Reihe für $i < r$ bis zu dem Gliede:

$$r(r-1)(r-2)\ldots(r-i+1)(x-a)^{r-i}F_1x,$$

und für Werthe von $i > r$ bis zu dem Gliede:

$$\frac{i(i-1)(i-2)\ldots(i-r+1)}{1.2.3\ldots r} \cdot r(r-1)\ldots 3.2.1\,(x-a)^0 F_1{}^{(i-r)}x$$
$$= i(i-1)(i-2)\ldots(i-r+1)F_1{}^{(i-r)}x$$

fortläuft. Da dieſes letzte Glied das einzige iſt, welches nicht für $x = a$ ſchwindet, ſo kommt:

$$F^{(r)}\,a = r(r-1)(r-2)\ldots 3.2.1.F_1 a$$
$$F^{(r+1)}a = (r+1)r(r-1)\ldots 4.3.2.F'_1 a$$
$$F^{(r+2)}a = (r+2)(r+1)r\ldots 5.4.3.F''_1 a \text{ ꝛc.};$$

und man kann folglich die Größen $F_1 a$, $F'_1 a$, $F''_1 a$ ꝛc. aus den Gleichun (5) fortſchaffen.

§. 298. Wenn die Gleichung (F) vielfache imaginäre Wurzeln und den Factor:

$$[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^r$$

hätte, ſo könnte man ſetzen:

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{M'x + N'}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{M''x + N''}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2} + \ldots + \frac{M^{(r)}x + N^{(r)}}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^r} + \frac{A_1}{x-a_1} + \text{ꝛc.},$$

und man erhielte für die Gleichung (4) folgende:

$$fx = (M^{(r)}x + N^{(r)})F_1 x + (M^{(r-1)})[(x-\alpha)^2+\beta^2]F_1 x + \ldots$$
$$+ (M'x + N')[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{r-1}F_1 x + [(x-\alpha)^2+\beta^2]^r fx.$$

Wenn man von dieſer letzten Gleichung die ſucceſſiven Ableitungen bi und dann $x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ ſetzt, ſo erhält man die zur Beſtimmung Coefficienten $M^{(i)}$, $N^{(i)}$ erforderliche Anzahl von Gleichungen.

Wir wollen annehmen, daß dieſe Rechnung verrichtet ſei, ſo kommt darauf an, eine Reihe von Gliedern von der Form:

$$\frac{(M^{(i)}x + N^{(i)})\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^i}$$

für größere Werthe von i als die Einheit zu integriren. Nun hat man ab

$$\int \frac{(M^{(i)}x + N^{(i)})\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^i} = \int \frac{M^{(i)}(x-\alpha)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^i} + \int \frac{\frac{M^{(i)}\alpha + N^{(i)}}{\beta^{2i-1}} \cdot \frac{dx}{\beta}}{\left[\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2 + 1\right]^i}$$
$$= -\frac{M^{(i)}}{2(i-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{i-1}} + \frac{M^{(i)}\alpha + N^{(i)}}{\beta^{2i-1}} \int \frac{dt}{(t^2+1)^i},$$

wo der Einfachheit wegen $\frac{x-\alpha}{\beta} = t$ geſetzt wird.

Hierauf aber erhält man

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^i} = \int \frac{dt}{(t^2+1)^{i-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^i}. \qquad (6$$

ıd wenn man außerdem auf die Function:

$$\frac{t^2dt}{(t^2+1)^i} = \frac{t}{2}\cdot\frac{2tdt}{(t^2+1)^i}$$

ıs Verfahren der theilweiſen Integration anwendet; ſo ergibt ſich:

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)^i} = -\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{(i-1)(t^2+1)^{i-1}} + \frac{1}{2(i-1)}\int\frac{dt}{(t^2+1)^{i-1}}.$$

Durch Subſtitution dieſes Werthes in die Gleichung (6) erhält man:

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^i} = \frac{t}{2(i-1)(t^2+1)^{i-1}} + \frac{2i-3}{2(i-1)}\int\frac{dt}{(t^2+1)^{i-1}}.$$

ber wenn man daſſelbe Verfahren anwendet; ſo wird das Integral:

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^{i-1}} \text{ von dem Integrale } \int\frac{dt}{(t^2+1)^{i-2}},$$

nd endlich von dem Integrale:

$$\int\frac{dt}{t^2+1} = \text{arc. tang. } t + \text{const.}$$

bhängig gemacht, und man braucht alsdann nur noch für t ſeinen als Function on x ausgedrückten Werth wieder an die Stelle zu ſetzen.

Aus der vorhergehenden Analyſe erhellt, daß die Integration jeder ratiolalen und gebrochenen Differenzialfunction auf die Auflöſung algebraiſcher Gleichungen hinausläuft und daß das Integral einer ſolchen Function ſich immer durch rationale algebraiſche, durch logarithmiſche und durch Kreisfunctionen ausdrücken läßt.

§. 299. Wenn die Differenzialfunction eine irrationale algebraiſche iſt, ſo muß ihr Integral, wenn es unter algebraiſcher Form exiſtirt, alle irreductibeln Wurzelgrößen enthalten, welche in der Differenzialfunction ſelbſt vorkommen; aber es kann keine andern enthalten, d. h. die Fläche einer algebraiſchen Curve muß, als Function ihrer Abſciſſe ausgedrückt, genau eben ſo viele reelle oder imaginäre Werthe haben, als die Ordinate haben kann, oder als die Curve reelle oder imaginäre Zweige hat.

Zwei geſchickte Geometer der gegenwärtigen Zeit, Abel und Liouville, haben Methoden angegeben, vermittelſt welcher ſich erkennen läßt, ob eine irrationale Differenzialfunction ein algebraiſches oder logarithmiſches Integral hat, und dieſes Integral direct zu finden, wenn es möglich iſt; allein wir können hier auf ſo allgemeine Unterſuchungen, welche mehr für die Vervollkommnung der Theorie von Intereſſe, als für die Anwendungen von Nutzen ſind, nicht eingehen.

Da die irrationalen Functionen mit einer quadratiſchen Wurzelgröße bei den Aufgaben der Geometrie und Mechanik am meiſten vorkommen; ſo wollen wir uns mit der Integration der Functionen dieſer Claſſe nun ſpecieller beſchäftigen.

II. Integration der irrationalen Functionen mit einer Quadratwurzel aus einem Ausdrucke des erſten und zweiten Grades.

§. 300. Wenn in der zu integrirenden Function die veränderliche Größe x in rationalen Gliedern und in der Wurzelgröße:

$$R = \sqrt{a+bx}$$

vorkommt, ſo daß, wenn dieſe Function auf die Form:

$$f(x, R) \cdot dx$$

gebracht wird, f eine algebraiſche rationale Function von x und R braucht man nur:

$$\sqrt{a + bx} = t,$$

folglich:

$$x = \frac{t^2 - a}{b}, \qquad dx = \frac{2tdt}{b}$$

zu ſetzen, um die gegebene Function auf die Form Ftdt zurückzuführ Ft eine rationale Function von t bezeichnet.

Wir wollen annehmen, daß ſich das Quadratwurzelzeichen auf ei nom des zweiten Grades erſtreckt, oder daß

$$R = \sqrt{a + bx \pm cx^2}$$

ſei; ſo kann man der Allgemeinheit unbeſchadet $c = 1$ ſetzen, oder, daſſelbe hinausläuft, x in $\frac{x}{\sqrt{c}}$ verwandeln, indem aber die beiden Conſtanten a, b völlig unbeſtimmt bleiben.

Es ſei zuerſt:

$$R = \sqrt{a + bx + x^2}$$

ſo ſetze man:

$$\sqrt{a + bx + x^2} = t - x,$$

folglich:

$$x = \frac{t^2 - a}{2t + b}, \qquad R = \frac{a + bt + t^2}{2t + b}, \qquad dx = \frac{2(a + bt + t^2)}{(2t + b)^2} dt$$

und alsdann wird durch die Subſtitution dieſer Werthe die Function (nal gemacht.

Wenn es darauf ankommt, eine Wurzelgröße von der Form:

$$R = \sqrt{a + bx - x^2},$$

fortzuſchaffen, ſo ſeien α, β die Wurzeln der Gleichung:

$$x^2 - bx - a = 0,$$

welche wir als reell vorausſetzen wollen, weil ſonſt die Wurzelgröße i imaginär bleiben würde, ſo daß alle Elemente des Integrales, und das Integral ſelbſt, imaginär wären.

Alsdann ſetze man:

$$\sqrt{a + bx - x^2} = \sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)} = (x - \alpha)t,$$

folglich:

$$x = \frac{\alpha t^2 + \beta}{t^2 + 1}, \quad R = -\frac{(\alpha - \beta)t}{t^2 + 1}, \qquad dx = \frac{2(\alpha - \beta)t}{(t^2 + 1)^2} dt;$$

ſo wird durch die Subſtitution dieſer Werthe die Irrationalgröße, wie hergehenden Falle, fortgeſchafft.

Die Function läßt ſich auch rational machen, wenn in derſelben zwei Wurzelgrößen:

$$R = \sqrt{a + bx}, \quad R_1 = \sqrt{a_1 + b_1 x}$$

vorkommen, denn vermöge der Gleichungen (7) und (8) hat man:

$$R_1 = \sqrt{\frac{b_1}{b}} \cdot \sqrt{t^2 + \frac{a_1 t}{b_1} - a},$$

wodurch man auf den vorhin betrachteten Fall zurückkommt.

Beiſpiele: 1) Es ſei:

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}},$$

ſo iſt:

$$y = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \log. \left\{ \frac{b}{2\sqrt{c}} + x\sqrt{c} + \sqrt{a + bx + cx^2} \right\} + \text{const.} \quad (9)$$

2) Es ſei:

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}},$$

ſo iſt:

$$y = -\frac{2}{\sqrt{c}} \cdot \text{arc. tang.} \sqrt{\frac{-2cx + b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2cx - b + \sqrt{b^2 + 4ac}}} + \text{const.} \quad (10)$$

Für:

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}},$$

gibt die Formel (9):

$$y = \log. (x + \sqrt{1 + x^2}) + \text{const.},$$

was mit der einen der Gleichungen im §. 68 übereinſtimmt.

Für

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

gibt die Formel (10):

$$y = -\text{arc. tang.} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} + \text{const.}$$

$$= -2 \text{arc. tang.} \frac{\sqrt{1 - x}}{x} + \text{const.} \quad (11)$$

Aber bekanntlich iſt der Werth von y in dieſem Falle auch:

$$y = \text{arc. sin. } x + \text{const.} \quad (12)$$

Die Ausdrücke (11) und (12) müſſen alſo übereinſtimmen, und in der That geben die Gleichungen (11) und (12), wenn man

$$\text{arc. sin. } x = \varphi, \quad \text{oder } x = \text{sin. } \varphi$$

ſetzt, die Ausdrücke:

$$y = -\frac{\pi}{2} + \varphi + \text{const.}, \quad y = \varphi + \text{const.},$$

welche wegen der darin vorkommenden unbeſtimmten Conſtanten gleichbedeutend ſind.

III. Integration der irrationalen Functionen mit einer Quadratwurzel aus einem Polynome des vierten Grades.

§. 301. Wir wollen nun den wichtigen Fall näher unterſuchen, wo die in der Function f vorkommende Wurzelgröße von der Form:

$$R = \sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4} \qquad (f)$$

iſt, und zunächſt bemerken, daß man darauf auch den Fall zurückführen kann, wenn die Function f zwei Wurzelgrößen, wie:

$$\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}, \qquad \sqrt{\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2}$$

enthält; denn nach dem weiter oben Geſagten wird die erſte dieſer beiden Wurzelgrößen fortgeſchafft, wenn man

$$x = \frac{t^2 - \alpha}{2t + \beta}$$

ſetzt, und wenn man dieſen Werth von x in die zweite Wurzelgröße ſubſtituirt, ſo verwandelt ſich dieſe in eine Wurzelgröße von der Form (f).

Zweitens wollen wir bemerken, daß jedes Integral von der Form:

$$\int f(x, R)\, dx,$$

wo f eine algebraiſche Function von x und R bezeichnet, von einem andern Integrale von der Form:

$$\int f \frac{Fx}{R}\, dx,$$

wo F eine rationale Function iſt, abhängig gemacht werden kann. Denn f(x, R) kann nur die Form:

$$\frac{\varphi + R\psi}{\Phi + R\Psi},$$

haben, wo $\varphi, \psi, \Phi, \Psi$ rationale Functionen von x bezeichnen. Wenn man aber den Zähler und Nenner dieſes Bruches mit $\Phi - R\Psi$ multiplicirt, ſo nimmt derſelbe die Form:

$$\frac{\varphi\Phi - R^2\psi\Psi}{\Phi^2 - R^2\Psi^2} - \frac{(\varphi\Psi - \psi\Phi)R^2}{\Phi^2 - R^2\Psi^2} \cdot \frac{1}{R}$$

oder:

$$fx - \frac{Fx}{R}$$

an, wo f, F zwei rationale Functionen von x bezeichnen.

§. 302. Um den Ausdruck der Wurzelgröße R zu vereinfachen, ohne der Allgemeinheit des uns beſchäftigenden Integrationsproblemes Eintrag zu thun, wollen wir mit t eine neue veränderliche Größe bezeichnen, und

$$x = \frac{r + st}{1 + t}$$

ſetzen; ſo können wir die Coefficienten r und s immer ſo annehmen, daß die Coefficienten der ungraden Potenzen von t in dem Polynome R^2 verſchwinden, und es kommt darauf an, zu beweiſen, daß man dieſe doppelte Bedingung immer durch reelle Werthe von r und s erfüllen kann.

Wir wollen daher das Polynom R^2 auf folgende Form bringen:

$$e(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta),$$

o α, β, γ, δ die Wurzeln der Gleichung $R^2 = 0$ ſind. Wenn man für x inen Werth, in t ausgedrückt, ſubſtituirt, ſo erhält man:

$$t^2 = \frac{e[r-\alpha+(s-\alpha)t][r-\beta+(s-\beta)t][r-\gamma+(s-\gamma)t][r-\delta+(s-\delta)t]}{(1+t)^4},$$

nd die ungeraden Potenzen von t werden fortgeſchafft, wenn man:

$$(r-\alpha)(s-\beta)+(r-\beta)(s-\alpha)=0$$
$$(r-\gamma)(s-\delta)+(r-\delta)(s-\gamma)=0,$$

oder vielmehr:

$$2rs-(\alpha+\beta)(r+s)+2\alpha\beta=0$$
$$2rs-(\gamma+\delta)(r+s)+2\gamma\delta=0$$

ſetzt, woraus folgt:

$$r+s=\frac{2(\alpha\beta-\gamma\delta)}{\alpha+\beta-(\gamma+\delta)},$$
$$rs=\frac{\alpha\beta(\gamma+\delta)-\gamma\delta(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta-(\gamma+\delta)}.$$

Nun ſind aber nach der Theorie der Gleichungen des zweiten Grades die Größen r und s reell, wenn die Werthe von $r+s$ und rs ſelbſt reell ſind, nd wenn außerdem:

$$(r+s)^2-4rs>0,$$

oder, wenn man ſubſtituirt, wenn:

$$\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}{[\alpha+\beta-(\gamma+\delta)]}>0 \qquad (13)$$

iſt.

Wenn die vier Wurzeln α, β, γ, δ reell ſind, ſo darf man annehmen, daß ſie nach der Reihenfolge ihrer Größe durch dieſe Buchſtaben ausgedrückt werden. Die dritte Bedingung wird alsdann erfüllt, und die beiden andern werden unabhängig von jeder Vorausſetzung erfüllt.

Wenn zwei Wurzeln imaginär ſind, ſo daß man hat:

$$\alpha=\mu+\nu\sqrt{-1},\quad \beta=\mu-\nu\sqrt{-1},$$

ſo bleiben die Werthe von $r+s$ und rs noch reell, die Ungleichheit (13) verwandelt ſich in:

$$\frac{[(\mu-\gamma)^2+\nu^2][(\mu-\delta)^2+\nu^2]}{[2\mu-(\gamma+\delta)]^2}>0,$$

nd wird folglich erfüllt. Eben ſo leicht ließe ſich darthun, daß noch daſſelbe ſtattfindet, wenn die vier Wurzeln imaginär ſind.

Wenn man $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ ſetzte, ſo würden zwar die Werthe von $r+s$ und rs unendlich; aber man hätte zu gleicher Zeit auch:

$$R^2=e[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta][x^2-(\alpha+\beta)x+\gamma\delta],$$

ſo daß man blos:

$$x=t+\frac{\alpha+\beta}{2}$$

zu ſetzen brauchte, um in R die ungeraden Potenzen von t verſchwinden zu laſſen.

Eine andere Ausnahme würde ſich darbieten, wenn $\alpha=\gamma$ und $\beta=\delta$ wäre; denn alsdann nähmen die Werthe von $r+s$ und rs die Form $\frac{0}{0}$ an; aber in dieſem Falle würde das Polynom R^2 offenbar ein vollſtändiges Quadrat, und die zu integrirende Function wäre rational.

§. 303. Wir wollen alſo annehmen, daß das Integral:

$$\int \frac{Fx\,dx}{R} \qquad (\varepsilon)$$

immer von einem andern Integrale:

$$\int \frac{F_1 t\,dt}{R_1}$$

abhängig gemacht iſt, wo $R_1{}^2$ ein Polynom des vierten Grades von t iſt, worin die ungeraden Potenzen der veränderlichen Größe nicht vorkommen, oder, was auf daſſelbe hinausläuft, wir wollen annehmen, daß die in dem Integrale (ε) vorkommende Wurzelgröße R keine ungeraden Potenzen von x enthält.

Man kann ſogar annehmen, daß die rationale Function Fx ebenfalls eine paare iſt, d. h. keine ungeraden Potenzen der veränderlichen Größe enthält; denn wenn ſie eine impaare wäre, ſo wäre ihre allgemeinſte Form:

$$\frac{\theta + x\omega}{\Theta + x\Omega},$$

wo θ, ω, Θ, Ω paare Functionen von x bezeichnen. Man erhielte alſo durch eine ähnliche Transformation wie die im §. 301:

$$\int \frac{Fx\,dx}{R} = \int \left(\frac{\theta\Theta - \omega\Omega}{\Theta^2 - x^2\Omega^2}\right) \cdot \frac{dx}{R} + \int \left(\frac{\omega\Theta - \theta\Omega}{\Theta^2 - x^2\Omega^2}\right) \cdot \frac{x\,dx}{R}.$$

Nun enthält aber in dem erſten Integrale des zweiten Theiles dieſer Gleichung die mit $\frac{dx}{R}$ multiplicirte Function nur gerade Potenzen von x, und wenn man in dem zweiten Integrale $x^2 = t$ ſetzt; ſo verwandelt ſich die Function unter dem Zeichen $\int$ in eine Function von der Form:

$$\frac{F_1 t\,dt}{\sqrt{a_1 + b_1 t + c_1 t^2}}$$

und kann nach Abſchnitt II. rational gemacht werden.

§. 304. Wir behaupten ferner, daß man, ohne die Allgemeinheit der in Rede ſtehenden Aufgabe, welche in der Beſtimmung des Integrals (ε) beſteht, zu beſchränken, annehmen darf, daß das Polynom R^2 von der Form:

$$R^2 = (1 \pm p^2 x^2)(1 \pm q^2 x^2) \qquad (R)$$

iſt, wo die Glieder p^2x^2, q^2x^2 daſſelbe poſitive oder negative Zeichen haben müſſen.

Denn da R^2 keine ungeraden Potenzen von x enthält und ein Polynom des vierten Grades immer in reelle Factoren des zweiten Grades werden kann, ſo darf man ſetzen:

$$R^2 = (m + nx^2)(m' + n'x^2),$$

wo m, n, m', n' reelle Größen bezeichnen. Wenn man alſo:

$$t = \frac{xR}{m(m' + n'x^2)} = \frac{x}{m}\sqrt{\frac{m + nx^2}{m' + n'x^2}}$$

ſetzt, ſo iſt die veränderliche Größe t mit x zugleich reell. Aus dieſen Gleichungen folgt:

$$x^2 = \frac{n'm^2t^2 - m \pm m\sqrt{1 + 2(2m'n - mn')t^2 + m^2n'^2t^4}}{2n}$$

$$\frac{dx}{R} = \frac{xdx}{mt(m' + n'x^2)} = \frac{mdt}{m + 2nx^2 - n'm^2t^2}$$
$$= \pm \frac{dt}{\sqrt{1+2(2m'n-mn')t^2 + m^2n'^2t^4}}$$

n wir nun:

$$p^2 + q^2 = \pm 2(2m'n - mn'), \quad p^2q^2 = m^2n'^2,$$

mmt:

$$p^2 = \pm(2m'n - mn') + 2\sqrt{m'n(m'n - mn')}$$
$$q^2 = \pm(2m'n - mn') - 2\sqrt{m'n(m'n - mn')},$$

us nach einer bekannten algebraiſchen Formel folgt:

$$p = \sqrt{\pm m'n} + \sqrt{\pm(m'n - mn')}$$
$$q = \sqrt{\pm m'n} - \sqrt{\pm(m'n - mn')}.$$

ı kann das Zeichen ſo wählen, daß die Wurzelgröße: $\sqrt{\pm m'n}$ reell wird, wenn man, wie es erlaubt iſt, annimmt, daß

$$\left(\frac{m'}{n'}\right)^2 > \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

ſo wird die zweite in den Werthen von p und q vorkommende Wurzelgröße falls reell.

Man erhält alſo:

$$x^2 = \frac{n'm^2t^2 - m \pm m\sqrt{(1 \pm p^2t^2)(1 \pm q^2t^2)}}{2n},$$

$$\frac{dx}{R} = \pm \frac{dt}{\sqrt{(1 \pm p^2t^2)(1 \pm q^2t^2)}}.$$

ın man dieſe Werthe in die Function:

$$\frac{F(x^2)dx}{R} \qquad (h)$$

ituirt, ſo wird ſie auf die Form:

$$\frac{F_1(t^2)dt}{\sqrt{(1 \pm p^2t^2)(1 \pm q^2t^2)}}$$

acht, oder, was daſſelbe iſt, man kann annehmen, daß die Wurzelgröße er Function (h) die durch die Gleichung (R) angegebene Form hat.

§. 305. Die Function F kann ganz oder gebrochen ſein, und wir wollen rderſt annehmen, daß ſie ganz iſt, ſo daß es darauf ankommt, eine Summe Integralen von der Form:

$$A_i \int \frac{x^{2i}dx}{R} \qquad (i)$$

rhalten. Setzt man der Kürze wegen:

$$R^2 = (1 \pm p^2x^2).(1 \pm q^2x^2) = 1 + rx^2 + sx^4:$$

at man identiſch:

$$\frac{d \cdot Rx^{2i-3}}{dx} = (2i-3)\,Ra^{2i-4} + \frac{(r + 2sx^2)\,x^{2i-2}}{R}$$

$$= \frac{1}{R}\left[(2i-3)R^2x^{2i-4} + (r+2sx^2)x^{2i-2}\right]$$

$$= \frac{1}{R}\left[(2i-3)x^{2i-4} + (2i-2)rx^{2i-2} + (2i-1)sx^{2i}\right]$$

und folglich:

$$Rx^{2i-3} + \text{const.} = (2i-3)\int\frac{x^{2i-4}dx}{R} + (2i-2)r\int\frac{x^{2i-2}dx}{R}$$

$$+ (2i-2)s\int\frac{x^{2i}dx}{R}.$$

Das Integral (i) iſt folglich von zwei andern Integralen von derſelben Form:

$$\int\frac{x^{2i-2}dx}{R}, \quad \int\frac{x^{2i-4}dx}{R}$$

abhängig gemacht, und da man auf dieſelbe Weiſe weiter fortfahren kann, ſo folgt, daß die Beſtimmung des Integrales (i) für jeden Werth von i zuletzt von der der beiden Integrale:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1\pm p^2x^2)(1\pm q^2x^2)}} \qquad (A)$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1\pm p^2x^2)(1\pm q^2x^2)}} \qquad (B)$$

abhängt.

Wenn die Function $F(x^2)$ eine gebrochene iſt, ſo führt man ſie durch Diviſion zum Theil auf eine ganze zurück, und wenn der Reſt der Diviſion alsdann in Partialbrüche zerlegt wird (l.), ſo hat man blos eine Reihe von Integralen von der Form:

$$A_i\int\frac{dx}{(x^2+a)^iR} \qquad (j)$$

zu beſtimmen.

Nun hat man aber identiſch:

$$\frac{d\left(\frac{Rx}{(x^2+a)^{i-1}}\right)}{dx}$$

$$= \frac{(1+2rx^2+3sx^4)(x^2+a) - 2(i-1)(1+rx^2+sx^4)x^2}{(x^2+a)^iR},$$

und außerdem kann man ſetzen:

$$\frac{(1+2rx^2+3sx^4)(x^2+a) - 2(i-1)(1+rx^2+sx^4)x^2}{(x^2+a)^i}$$

$$= \frac{g}{(x^2+2)^{i-3}} + \frac{h}{(x^2+a)^{i-2}} + \frac{k}{(x^2+a)^{i-1}} + \frac{l}{(x^2+a)^i},$$

wo g, h, k, l Coefficienten ſind, welche man leicht beſtimmt, wenn man die beiden Theile der vorhergehenden Gleichung identificirt, und welche folgende Werthe haben:

$$g = -(2i-5)s, \quad h = -(2i-4)(r-3as),$$
$$k = -(2i-3)(3a^2s - 2ar + 1), \quad l = (2i-2)(a^3r - a^2r + a).$$

$$\frac{Rx}{(x^2+a)^{i-1}} + \text{const.} = g\int\frac{dx}{(x^2+a)^{i-3}R} + h\int\frac{dx}{(x^2+a)^{i-2}R} + k\int\frac{dx}{(x^2+a)^{i-1}R} + l\int\frac{dx}{(x^2+a)^{i}R}.$$

Vermöge dieſer letzten Formel und durch eine ſucceſſive Wiederholung eine ähnlichen Rechnung, wie die eben für das Integral (i) angegebene, wird di Beſtimmung des Integrales (j) auf die der beiden Integrale (A), (B) un eines dritten Integrales:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a)\sqrt{(1\pm p^2x^2)(1\pm q^2x^2)}} \qquad (C)$$

zurückgeführt; folglich läßt ſich endlich die Integration jeder Function, welch aus einem rationalen Theile von x und aus einer Quadratwurzel aus einer Polynome des vierten Grades von x zuſammengeſetzt iſt, auf die Beſtimmun der drei Integrale (A), (B), (C) zurückführen.

Weiter unten werden wir ſehen, welche weitern Transformationen di Analyſten mit dieſen letzten Functionen vorgenommen haben, welche Haupteigen ſchaften ſie beſitzen und wie man hat Tafeln ihrer numeriſchen Werthe berech nen können, welche ſie annehmen, wenn die Integrationsgrenzen numeriſc beſtimmt werden.

IV. Integration irrationaler Binomialfunctionen.

§. 306. Unter irrationalen Binomialfunctionen verſtehen wir Functione von der Form:

$$R = x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} \qquad (R_1)$$

wo p, q ganze und m, n beliebige Zahlen bezeichnen. Wenn m und n ratio nale Zahlen ſind, ſo kann man ſie, wie man ſich leicht überzeugt, als ganz Zahlen betrachten, ohne die Allgemeinheit des Ausdruckes zu beſchränken. Di Functionen von der Form Rdx werden gewöhnlich ganz unſchicklich **binomiſch Differenziale** genannt.

Wenn man

$$a + bx^n = t^q$$

ſetzt, ſo erhält man:

$$x = \left(\frac{t^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},\quad dx = \frac{qt^{q-1}}{nb}\left(\frac{t^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}dt,$$

$$Rdx = \frac{qt^{p+q-1}}{nb}\left(\frac{t^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}dt,$$

und die Differenzialfunction Rdx wird alſo durch dieſe Transformation rationa gemacht, wenn $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl iſt.

Die Gleichung (R_1) läßt ſich folgendermaßen ſchreiben:

$$R = x^{m+\frac{np}{q}-1}(ax^{-n}+b)^{\frac{p}{q}},$$

und folglich wird nach dem eben Geſagten die Differenzialfunction Rdx auc rational gemacht, wenn ſich das Verhältniß:

$$\frac{m+\frac{np}{q}}{n}=\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$$

auf eine ganze Zahl reducirt; aber außer den beiden eben angegebenen Fällen kann die Differenzialfunction Rdx im Allgemeinen nicht von ihrer Irrationalität befreit werden.

Wenn man $x^n=t$ ſetzt, ſo kommt:

$$Rdx=\frac{1}{n}t^{\frac{m}{n}-1}(a+bt)^{\frac{p}{q}}dt,$$

und folglich iſt die Beſtimmung des Integrales $\int Rdx$ auf die des Integrales:

$$\int x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu}dx \qquad (k)$$

zurückgeführt, wo die Conſtanten μ, ν beliebige ganze oder gebrochene und ſelbſt irrationale Werthe haben können. Wir wollen aber nun zeigen, daß die Beſtimmung des Integrales (k) immer auf die eines andern Integrales, worin die Werthe der Conſtanten μ und ν zwiſchen Null und der Einheit liegen, zurückgeführt werden kann.

§. 307. Denn durch theilweiſe Integration erhält man:

$$\int x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu}dx=\frac{x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu+1}}{(\nu+1)b}-\frac{\mu-1}{(\nu+1)b}\int x^{\mu-2}(a+bx)^{\nu+1}dx,$$

und außerdem iſt:

$$\int x^{\mu-2}(a+bx)^{\nu+1}dx=a\int x^{\mu-2}(a+bx)^{\nu}dx+b\int x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu}dx.$$

Die Verbindung dieſer beiden Gleichungen gibt:

$$\int x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu}dx=\frac{1}{(\mu+\nu)b}[x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu+1}-a(\mu-1)\int x^{\mu-2}(a+bx)^{\nu}dx], \qquad (l)$$

und wenn folglich die Conſtante μ poſitiv iſt, ſo wird die Beſtimmung des Integrales (k) auf die des Integrales:

$$\int x^{\mu-2}(a+bx)^{\nu}dx, \qquad (k_1)$$

worin der Exponent von x außerhalb der Parentheſe um eine Einheit vermindert iſt, während der Exponent der Parentheſe ſelbſt ungeändert bleibt, zurückgeführt. Wenn dagegen die Conſtante μ negativ iſt, ſo wird die Beſtimmung des Integrales (k_1) auf die des Integrales (k), worin der Zahlenwerth des Exponenten von x außerhalb der Parentheſe um eine Einheit vermindert iſt, zurückgeführt. Die eine oder die andere Operation kann ſo viele Male wiederholen, als erforderlich iſt, um die Beſtimmung des Integrales (k) von der eines andern Integrales von derſelben Form, worin der Werth der Conſtante μ zwiſchen 0 und 1 liegt, abhängig zu machen.

Eine ähnliche Reduction iſt auf den Exponenten ν anwendbar. Denn man hat:

$$\int x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu}dx=a\int x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu-1}dx+b\int x^{\mu}(a+bx)^{\nu-1}dx,$$

und die Formel (l) gibt, wenn man darin μ in $\mu+1$, und ν in $\nu-1$ verwandelt:

$$\int x^{\mu}(a+bx)^{\nu-1}dx = \frac{x^{\mu}(a+bx)^{\nu} - a\mu\int x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu-1}dx}{(\mu+\nu)b}$$

ıd aus der Verbindung dieſer beiden letzten Gleichungen ergibt ſich:

$$\int x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu}dx = \frac{x^{\mu}(a+bx)^{\nu} + a\nu\int x^{\mu-1}(a+bx)^{\nu-1}dx}{\mu+\nu}$$

Endlich könnte man eben ſo die Exponenten μ, ν in dem Integrale:

$$\int (g+hx)^{\mu}(a+bx)^{\nu}dx$$

ıuciren.

Zweites Kapitel.

Integration transcendenter Functionen.

§. 308. Wenn unter endlicher Form das Integral:

$$\int f t dt = Ft + \text{const.}$$

ſo hat man, vermöge des Princips im §. 294, auch:

$$\int f(\log. x)\frac{dx}{x} = F(\log. x) + \text{const.},$$

$$\int f(e^x)\cdot e^x dx = F(e^x) + \text{const.},$$

$$\int f(\sin. x)\cdot \cos. x dx = F(\sin. x) + \text{const.},$$

$$\int f(\cos. x)\cdot \sin. x dx = -F(\cos. x) + \text{const.},$$

$$\int f(\text{tang. } x)\cdot\frac{dx}{1+x^2} = F(\text{tang. } x) + \text{const.},$$

$$\int f(\text{arc. sin. } x)\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = F(\text{arc. sin. } x) + \text{const.},$$

ı es iſt z. B.

$$\int\frac{\cos. x dx}{1+\sin.^2 x} = \text{arc. (tang.} = \sin. x) + \text{const.}$$

Wenn die Function F nicht unter endlicher Form erhalten werden kann, ı läßt ſich die Beſtimmung der vorhergehenden Integrale in dem Falle, wo ie Function f eine algebraiſche iſt, wenigſtens auf die Integration der alge-ıiſchen Function $ftdt$ zurückführen.

Wenn f wieder eine algebraiſche Function bezeichnet, ſo kann man die ınctionen:

$$f(e^{mx})\cdot dx, \quad f(\sin. mx, \cos. mx)\cdot dx$$

algebraiſche verwandeln, wenn man für die erſte $e^{mx} = t$, und für die eite $\sin. mx = t$, oder $\cos. mx = t$ ſetzt, und durch dieſe Subſtitution er-lt man:

$$\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{dt}{t(1+t)}=\log.\left(\frac{t}{1+t}\right)+\text{const.}=\log.\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)+\text{const.},$$

$$\int\frac{dx}{1+\sin.x}=\int\frac{dt}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}=-\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}+\text{const.},$$

$$=-\sqrt{\frac{1-\sin.x}{1+\sin.x}}+\text{const.}$$

$$\int\frac{dx}{1-2a\cos.x+a^2}=-\int\frac{dt}{(1-2at+a^2)\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\frac{2}{1-a^2}\cdot\text{arc. tang.}\left[\frac{1+a}{1-a}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos.x}{1+\cos.x}}\right]+\text{const.}$$

Auch die Function:

$$f(\sin.mx,\cos.mx;\sin.imx,\cos.imx;\sin.i'mx,\cos.i'mx;\ldots)\,dx,$$

wo f eine algebraiſche Function und i, i', ... ganze Zahlen bezeichnen, würde man algebraiſch ausdrücken können, weil ſich in dieſem Falle sin. imx und cos. imx, ... vermittelſt der ganzen Potenzen von sin. mx, cos. mx in einer endlichen Anzahl von Gliedern ausdrücken laſſen (§. 77).

Eine rationale ganze Function des Sinus und Coſinus kann immer integrirt werden, nachdem man durch die bekannten Formeln (§. 78) die Potenzen des Sinus und Coſinus in Sinuſſe und Coſinuſſe vielfacher Bogen, und die Producte der Sinuſſe und Coſinuſſe verſchiedener Bogen in einfache Sinuſſe und Coſinuſſe verwandelt hat. Es iſt z. B.

$$\int\sin.(mx+n)\cos.(px+p)\,dx=\frac{1}{2}\int\sin.[(m+p)x+n+q]\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\int\sin.[(m-p)x+n-q]\,dx$$

$$=-\frac{\cos.[(m+p)x+n+q]}{2(m+p)}-\frac{\cos.[(m-p)x+n-q]}{2(m-p)}+\text{const.}$$

§. 309. Die Beſtimmung des Integrales:

$$\int\sin.^\mu x\cos.^\nu x\,dx \qquad (\mu,\nu)$$

hängt von der Integration einer irrationalen Binomialfunction ab; denn wenn man $\sin.x=\sqrt{t}$ ſetzt, ſo verwandelt ſich dieſes Integral in:

$$\frac{1}{2}\int t^{\frac{\mu-1}{2}}(1-t)^{\frac{\nu-1}{2}}\,dt.$$

Man könnte alſo zur Reduction der Exponenten μ und ν die Formeln in §. 207 anwenden; allein es wird beſſer ſein, dieſe Reduction an der Function (μ,ν) unter ihrer urſprünglichen Form vorzunehmen.

Wenn der Exponent μ poſitiv iſt, ſo wird derſelbe, ohne daß ν vergrößert wird, vermöge der Gleichungen:

$$\int\sin.^\mu x\cos.^\nu x\,dx=\int\sin.^{\mu-1}\cos.^\nu x\cdot\sin.x\,dx$$

$$=-\frac{\sin.^{\mu-1}x\cos.^{\nu+1}x}{\nu+1}+\frac{\mu-1}{\nu+1}\int\sin.^{\mu-2}x\cos.^{\nu+2}x\,dx,$$

$$\int\sin.^{\mu-2}x\cos.^{\nu+2}x\,dx=\int\sin.^{\mu-2}x\cos.^\nu x\,dx-\int\sin.^\mu x\cos.^\nu x\,dx,$$

vermindert, woraus alsdann folgt:

$$\int \sin.^{\mu}x\cos.^{\nu}x\,dx = -\frac{\sin.^{\mu-1}x\cos.^{\nu+1}x}{\mu+\nu}+\frac{\mu-1}{\mu-\nu}\int \sin.^{\mu-2}x\cos.^{\nu}x\,dx\,(\mu)$$

Wenn der Exponent ν positiv ist, so vermindert man denselben, ohne μ zu vergrößern, wenn man die folgende Formel anwendet, welche man durch eine ähnliche Rechnung erhält:

$$\int \sin.^{\mu}x\cos.^{\nu}x\,dx = \frac{\sin.^{\mu+1}x\cos.^{\nu}x}{\mu+\nu}+\frac{\nu-1}{\mu+\nu}\int \sin.^{\mu}x\cos.^{\nu-2}x\,dx \quad (\nu)$$

Aus der Gleichung (μ) folgt:

$$\int \sin.^{\mu-2}\cos.^{\nu}x\,dx = \frac{\sin.^{\mu-1}x\cos.^{\nu+1}x}{\mu+1}+\frac{\mu+\nu}{\mu-1}\int \sin.^{\mu}x\cos.^{\nu}x\,dx,$$

und wenn man μ in $-\mu+2$ verwandelt:

$$\int \frac{\cos.^{\nu}x}{\sin.^{\mu}x}dx = -\frac{\cos.^{\nu+1}x}{(\mu-1)\sin.^{\mu-1}x}+\frac{\mu-\nu-2}{\mu-1}\int \frac{\cos.^{\nu}x}{\sin.^{\mu-2}x}dx \qquad (\mu')$$

Ebenso würde sich aus der Gleichung (ν) ergeben:

$$\int \frac{\sin.^{\mu}x}{\cos.^{\nu}x}dx = \frac{\sin.^{\mu+1}x}{(\nu-1)\cos.^{\nu-1}x}+\frac{\nu-\mu-2}{\nu-1}\int \frac{\sin.^{\mu}x}{\cos.^{\nu-2}x}dx \qquad (\nu')$$

Diese beiden letzten Formeln dienen zur Reduction der Zahlenwerthe der Exponenten μ, ν in dem Integrale (μ, ν), wenn diese Exponenten negativ sind.

Vermittelst der vier Reductionsformeln (μ), (ν), (μ'), (ν') kann man die Bestimmung des Integrales (μ, ν) immer auf die von Integralen von derselben Form, worin die Exponenten μ, ν zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegen, zurückführen, und wenn die ursprünglichen Exponenten μ, ν ganze Zahlen sind, so kann das Integral (μ, ν) auf eins der neun folgenden zurückgeführt werden:

$$\int dx = x+C,\ \int \sin.x\,dx = -\cos.x+C,\ \int \cos.x\,dx = \sin.x+C,$$

$$\int \sin.x\cos.x\,dx = \frac{1}{2}\sin.^2x+C,\ \int \frac{\sin.x}{\cos.x}dx = -\log.\cos.x+C,$$

$$\int \frac{\cos.x}{\sin.x}dx = \log.\sin.x+C,\ \int \frac{dx}{\sin.x\cos.x} = \log.\tang.x+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin.x} = \log.\tang.\frac{x}{2}+C,\ \int \frac{dx}{\cos.x} = \log.\tang.\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+C.$$

§. 310. Statt die Bestimmung des Integrales einer transcendenten Differenzialfunction von der des Integrales einer algebraischen Function abhängig zu machen, kann man auch umgekehrt verfahren, und auf diese Weise für gewisse transcendente Functionen mit algebraischen Differenzialen Ausdrücke von einer einfacheren Form oder einer leichtern Untersuchung erhalten. Dieses ist besonders bei den Integralen (A), (B), (C) im §. 305 anwendbar; denn es sei p^2 der größte von den beiden in der Wurzelgröße:

$$R = \sqrt{(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)},$$

vorkommenden Coefficienten p^2, q^2, und man setze:

$$px = \tang.\varphi,\ \frac{p^2-q^2}{p^2} = c^2,$$

ſo ſind die drei vorhin erwähnten Integrale in der folgenden allgemeinen Formel enthalten:

$$\int\left(\frac{A+B\sin.^2\varphi}{C+D\sin.^2\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} \qquad (1)$$

Wenn dagegen die Wurzelgröße die Form hat:

$$R=\sqrt{(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)},$$

ſo wird ſie für Werthe von x^2, welche zwiſchen $\frac{1}{p^2}$ und $\frac{1}{q^2}$ liegen, imaginär, ſo daß die drei Integrale, worin dieſe Wurzelgröße vorkommt, ſelbſt imaginär ſind, wenigſtens wofern nicht für alle zwiſchen den Integrationsgrenzen liegenden Werthe von x beſtändig $p^2x^2<1$ iſt. Man darf alſo alsdann ſetzen:

$$px=\sin.\varphi,\quad \frac{q^2}{p^2}=c^2,$$

ſo daß der Ausdruck (1) wieder der allgemeine Ausdruck der Integrale (A), (B), (C) iſt, indem c^2 immer eine zwiſchen Null und der Einheit liegende Conſtante iſt.

Aber da dieſe Formel (1) gleichbedeutend iſt mit:

$$A'\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}}+B'\int\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}\cdot d\varphi$$
$$+C'\int\frac{d\varphi}{(1+a\sin.^2\varphi)\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}},$$

wo A', B', C', a neue Coefficienten ſind, welche ſich aus A, B, C, D leicht durch Reduction auf denſelben Nenner und durch Vergleichung der Glieder mit denſelben Potenzen von $\sin.\varphi$ ableiten ließen. Die Berechnung der drei Integrale (A), (B), (C), iſt folglich auf die drei folgenden Integrale, welche man mit Recht als einfache betrachtet, zurückgeführt:

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}}, \qquad (I)$$

$$\int\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}\cdot d\varphi, \qquad (II)$$

$$\int\frac{d\varphi}{(1+a\sin.^2\varphi)\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}}. \qquad (III)$$

§. 311. Von den Integralen, welche ſich auf die Formen (I), (II) zurückführen laſſen, wollen wir die folgenden anführen, welche bei verſchiedenen wichtigen Anwendungen häufig vorkommen:

$$\int\frac{d\psi}{\sqrt{1-2c\cdot\cos.\psi+c^2}},\qquad \int\frac{\cos.\psi d\psi}{\sqrt{1-2c\cdot\cos.\psi+c^2}}.$$

Wenn man die veränderliche Größe vertauſcht, indem man:

$$\sin.(\varphi+\psi)=c\sin.\varphi,$$

ſetzt, ſo erhält man:

$$d\psi=\frac{[c\cdot\cos.\varphi-\cos.(\varphi+\psi)]d\varphi}{\cos.(\varphi+\psi)}=\frac{(c\cdot\cos.\varphi-\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi})d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}},$$

$$\cos.\psi = \sin.\varphi \sin.(\varphi+\psi) + \cos.\varphi \cos.(\varphi+\psi)$$
$$= c \sin.^2\varphi + \cos.\varphi \sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi},$$
$$\sqrt{1-2c\cdot\cos.\psi+c^2} = c\cdot\cos.\varphi - \sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi},$$

d folglich:

$$\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-2c\cdot\cos.\psi+c^2}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}},$$
$$\int \frac{\cos.\psi d\psi}{\sqrt{1-2c\cdot\cos.\psi+c^2}} = c\int \frac{\sin.^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}} + \int \cos.\varphi d\varphi$$
$$= \frac{1}{c}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}} - \frac{1}{c}\int \sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}\cdot d\varphi + \sin.\varphi.$$

§. 312. Es ſei f eine algebraiſche und φ eine transcendente Function on x, deren Ableitung φ' aber eine algebraiſche Function iſt, und wir wollen hen:

$$\int f dx = f_1, \quad \int f_1\varphi'\cdot dx = f_2, \quad \int f_2\varphi'\cdot dx = f_3, \text{ ꝛc.}$$

ergibt ſich durch theilweiſe Integration:

$$\int f\varphi^n\cdot dx = f_1\varphi^n - n\int f_1\varphi'\cdot\varphi^{n-1}\cdot dx$$
$$\int f_1\varphi'\cdot\varphi^{n-1}\cdot dx = f_2\varphi^{n-1} - (n-1)\int f_2\varphi'\cdot\varphi^{n-2}\cdot dx, \text{ ꝛc.,}$$

oraus folgt:

$$\int f\varphi^n\cdot dx = f_1\varphi^n - nf_2\varphi^{n-1} + n(n-1)f_3\varphi^{n-2} - \ldots$$
$$\ldots \pm n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1\cdot f_{n+1},$$

o der Exponent n eine ganze poſitive Zahl iſt. In dieſer Vorausſetzung, nd wenn alle die Integrale $f_1, f_2, \ldots f_{n+1}$ unter endlicher Form erhalten erden können, läßt ſich alſo auch das Integral:

$$\int f\varphi^n\cdot dx \qquad (f,\varphi)$$

ter endlicher Form erhalten.

Wir wollen nun annehmen, daß n eine ganze negative Zahl ſei, oder as daſſelbe iſt, wir wollen das Integral

$$\int \frac{f}{\varphi}\cdot dx, \qquad \left(f, \frac{1}{\varphi}\right)$$

trachten, indem wir n wie eine ganze poſitive Zahl behandeln und der ürze wegen:

$$\frac{f}{\varphi'} = \omega_1, \quad \frac{\omega'_1}{\varphi'} = \omega_2, \quad \frac{\omega'_2}{\varphi'} = \omega_3, \text{ ꝛc.}$$

hen, ſo erhalten wir:

$$\int \frac{f}{\varphi^n}\cdot = dx\int \frac{\omega_1 d\varphi}{\varphi^{n-1}} = -\frac{\omega_1}{(n-1)\varphi^{n-1}} + \frac{1}{n-2}\int \frac{\omega'_1}{\varphi^{n-1}}\cdot dx,$$
$$\int \frac{\omega'_2}{\varphi^{n-1}}\cdot = dx\int \frac{\omega_2 d\varphi}{\varphi^{n-1}} = -\frac{\omega_2}{(n-2)\varphi^{n-2}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\omega'_2}{\varphi^{n-2}}\cdot dx, \text{ ꝛc.}$$

nd folglich:

$$\int \frac{f}{\varphi^n}\cdot dx = -\left[\frac{\omega_1}{(n-1)\varphi^{n-1}} + \frac{\omega_2}{(n-1)(n-2)\varphi^{n-2}} + \text{ ꝛc.}\right]$$
$$+ \frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}\int \frac{\omega'_n}{\varphi}\cdot dx.$$

Die Beſtimmung des Integrales $\left(f, \frac{1}{\varphi}\right)$ iſt alſo auf die der transcendenten Größe:

$$\int \frac{\omega'_n}{\varphi} \cdot dx,$$

zurückgeführt. Wenn der Exponent n keine ganze Zahl wäre, ſo würden die Integrale (f, φ), $\left(f, \frac{1}{\varphi}\right)$ durch die eben angegebene Rechnung in unendliche Reihen entwickelt.

§. 313. Wir wollen z. B.

$$f = x^{a-1}, \quad \varphi = \log. x$$

ſetzen, ſo geben die vorhergehenden Formeln:

$$\int x^{a-1} (\log. x)^n dx = \frac{x^a}{a}\left[(\log. x)^n - \frac{n}{a}(\log. x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{a^2}(\log. x)^{n-2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{a^n}\right] + \text{const.}$$

$$\int \frac{x^{a-1} dx}{(\log) x^n} = -x^a\left[\frac{1}{(n-1)(\log. x)^{n-1}} + \frac{a}{(n-1)(n-2)(\log. x)^{n-2}} + \ldots + \frac{a^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 \log. x}\right] + \frac{a^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1} \int \frac{x^{a-1} dx}{\log. x}.$$

Setzt man $x^a = y$, ſo wird das Integral:

$$\int \frac{x^{a-1} dx}{\log. x} \text{ auf } \int \frac{dy}{\log. y}$$

zurückgeführt, und vermöge der Relation $z = \log. x$ hat man auch:

$$\int x^{a-1} (\log. x)^n dx = \int z^n e^{az} dz, \quad \int \frac{x^{az-1} dx}{(\log. x)^n} = \int \frac{e^{az} dz}{z^n}.$$

Die beiden vorhin erhaltenen Formeln geben alſo ohne alle weitere Rechnung und durch eine bloße Vertauſchung der Buchſtaben z und x:

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}\left[x^n - \frac{n}{a} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{a^2} x^{n-1} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{a^n}\right] + \text{const.} \qquad (a)$$

$$\int \frac{e^{ax} dx}{x^n} = -e^{ax}\left[\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{(n-1)(n-2)x^{n-2}} + \ldots + \frac{a^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot x}\right] + \frac{a^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1} \int \frac{e^{ax} dx}{x}.$$

Da die Integrale:

$$\int x^{a-1} (\log. x)^n dx, \quad \int x^a e^{ax} dx,$$

immer unter endlicher Form erhalten werden können, wenn n eine poſitive Zahl iſt, ſo iſt klar, daß man auch die Integrale:

$$\int fx \cdot (\log. x)^n dx, \quad \int fx \cdot e^{ax} dx$$

unter endlicher Form wird angeben können, wenn fx eine rationale ganze algebraiſche Function bezeichnet.

§. 314. Wenn wir in der Formel (a) die Größe a in $a\sqrt{-1}$ verwandeln, für die imaginäre Exponentialgröße ihren durch Sinus und Cosinus ausgedrückten Werth ſetzen und die reellen, ſo wie die imaginären Glieder der Theile einander gleich ſetzen; ſo erhalten wir:

$$\int x^n \cos. ax \cdot dx =$$

$$\frac{\sin. ax}{a}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{a^2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{a^4}x^{n-4} - \ldots\right]$$

$$+ \frac{\cos. ax}{a}\left[\frac{n}{a}x^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3}x^{n-3} + \ldots\right] + \text{const.}$$

$$\int x^n \sin. ax \cdot dx =$$

$$- \frac{\cos. ax}{a}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{a^2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{a^4}x^{n-4} - \ldots\right]$$

$$- \frac{\sin. ax}{a}\left[\frac{n}{a}x^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3}x^{n-3} + \ldots\right] + \text{const.}$$

Alle dieſe Formeln erhielte man auch direct, wenn man auf die Integrale den erſten Theilen der Gleichungen die Regel der theilweiſen Integration wendete.

Ebenſo könnte man die Beſtimmung der Integrale:

$$\int \frac{\cos. ax \cdot dx}{x^n}, \quad \int \frac{\sin. ax \cdot dx}{x^n}$$

die der einfachern Integrale:

$$\int \frac{\cos. ax \cdot dx}{x}, \quad \int \frac{\sin. ax \cdot dx}{x}.$$

zurückführen.

Die theilweiſe Integration gibt ferner:

$$\int e^{ax} \cos. bx \cdot dx = \frac{e^{ax} \cos. bx}{a} + \frac{b}{a}\int e^{ax} \sin. bx \cdot dx,$$

$$\int e^{ax} \sin. bx \cdot dx = \frac{e^{ax} \sin. bx}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax} \cos. bx \cdot dx,$$

woraus ſich durch Elimination ergibt:

$$\left.\begin{aligned}\int e^{ax} \sin. bx \cdot dx &= \frac{a \sin. bx - b \cos. bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax} + \text{const.} \\ \int e^{ax} \cos. bx \cdot dx &= \frac{a \cos. bx + b \sin. bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax} + \text{const.}\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Aus der Formel (a) ergäben ſich auch die Werthe der Integrale:

$$\int x^n e^{ax} \cos. bx \cdot dx, \quad \int x^n e^{ax} \sin. bx \cdot dx,$$

wenn man darin $a + b\sqrt{-1}$ für a und für die imaginäre Exponentialgröße $e^{bx\sqrt{-1}}$ ihren Werth, durch den Sinus und Cosinus ausgedrückt, ſubſtituirte und endlich die reellen, ſo wie die imaginären Glieder der beiden Theile einzeln einander gleich ſetzte.

Man kann alſo die Integrale:

$$\int fx \cdot e^{ax} \cos. bx \cdot dx, \quad \int fx \cdot e^{ax} \sin. bx \cdot dx,$$

wo fx wieder eine rationale ganze algebraiſche Function bezeichnet, unter endlicher Form erhalten.

Drittes Kapitel.

Integration durch Reihen. — Ueber die merkwürdigen Fälle, welche ſich bei dem Uebergange von den unbeſtimmten zu den beſtimmten Integralen darbieten.

I. Integration durch Reihen.

§. 315. Wenn man eine Differenzialfunction in eine convergirende Reihe entwickeln kann, wovon ſich jedes Glied integriren läßt, ſo erhält man das Integral dieſer Function unter der Form einer Reihe, welche man dadurch vervollſtändigt, daß man eine willkührliche Conſtante hinzufügt, und wenn die durch die Integration erhaltene Reihe zwiſchen gegebenen Grenzen convergent iſt, ſo gibt ſie den Zahlenwerth des beſtimmten, zwiſchen denſelben Grenzen genommenen Integrales der gegebenen Function mit jedem beliebigen Grade von Annäherung.

Wir wollen z. B. das bereits am Ende des vorhergehenden Kapitels angeführte Integral:

$$\int \frac{e^{ax}dx}{x}$$

betrachten, ſo haben wir in einer ſehr convergirenden Reihe:

$$e^{ax} = 1 + \frac{ax}{1} + \frac{a^2x^2}{1\cdot 2} + \frac{a^3x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ꝛc.} \qquad (1)$$

folglich:

$$\int \frac{e^{ax}dx}{x} = \int dx \left\{ \frac{1}{x} + a + \frac{a^2x}{1\cdot 2} + \frac{a^3x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ꝛc.} \right\}, \qquad (2)$$

oder vielmehr:

$$\int \frac{e^{ax}dx}{x} = \text{const.} + \log. x + ax + \frac{a^2x^2}{1\cdot 2\cdot 2} + \frac{a^3x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3} + \text{ꝛc.} \qquad (3)$$

Da die Reihe (1) convergent iſt, ſo iſt leicht einzuſehen, daß die Reihe (3) um ſo mehr für alle Werthe von x convergirt. Man hat alſo für beliebige Werthe der Grenzen x_0, x_1; aber von demſelben Zeichen:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{e^{ax}dx}{x} = \log. \left(\frac{x_1}{x_0}\right) + a(x_1 - x_0) + \frac{a^2}{1\cdot 2\cdot 2}(x_1^2 - x_0^2) + \text{ꝛc.}$$

Die Formel würde unbrauchbar werden, wenn die Werthe der Grenzen entgegengeſetzte Zeichen hätten, weil in dieſem Falle das Glied $\log. \left(\frac{x_1}{x_0}\right)$ imaginär würde. Dieſes rührt davon her, daß die unter dem Integrationszeichen $\int$ ſtehende Function für $x = 0$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erfährt, welchen beſondern Fall wir bereits bei der Auseinanderſetzung der Grundlehren der Theorie der Quadraturen (§. 35 u. 54) angedeutet haben, und auf welchen wir wieder zurückkommen wollen.

Wenn man die Wurzelgröße $\sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi}$ in eine Reihe entwickelt; ſo erhält man:

$$\int \sqrt{1-c^2 \sin.^2\varphi}\cdot d\varphi = \int d\varphi \left[1 - \frac{1}{2}c^2 \sin.^2\varphi - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}c^4 \sin.^4\varphi - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}c^6 \sin.^6\varphi - \text{ꝛc.}\right]$$

$$= \text{const.} + \varphi - \frac{1}{2}c^2 \int \sin.^2\varphi d\varphi - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}c^4 \int \sin.^4\varphi d\varphi - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}c^6 \int \sin.^6\varphi d\varphi - \text{ꝛc.}$$

Jedes einzelne Integral von der Form $\int \sin.^{2i}\varphi d\varphi$, wo i eine ganze Zahl iſt, wird nach den im vorhergehenden Kapitel mitgetheilten Regeln erhalten. Da man ferner $c^2 < 1$ ſetzen kann (§. 310) und man offenbar für beliebige Grenzen φ_0, φ_1

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin.^{2i}\varphi d\varphi < \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi, \quad \text{oder} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin.^{2i}\varphi d\varphi < \varphi_1 - \varphi_0$$

hat, ſo iſt der Werth des beſtimmmten Integrales:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{1-c^2 \sin.^2\varphi}\cdot d\varphi = \varphi_1 - \varphi_0 - \frac{1}{2}c^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin.^2\varphi d\varphi - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}c^4 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin.^4\varphi d\varphi - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}c^6 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin.^6\varphi d\varphi - \text{ꝛc.}$$

in eine Reihe entwickelt, welche ſtets convergirt, und zwar gewöhnlich ſehr ſchnell.

§. 316. Wenn man eine Differenzialfunction, deren Integral unter endlicher Form eine bekannte Function iſt, durch Reihen integrirt; ſo erhält man die Reihenentwicklung dieſer Function oft auf die einfachſte Weiſe, und es iſt z. B.

$$\text{arc. sin. } x = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int dx \left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \text{ꝛc.}\right]$$

$$= \text{const.} + x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \text{ꝛc.} \qquad (4)$$

Wenn man die willkührliche Conſtante durch die Bedingung beſtimmt, daß der Bogen mit dem Sinus zugleich verſchwindet, ſo gibt dieſe Reihe nur die zwiſchen $\pm \frac{1}{2}\pi$ liegende Bogen. Allein man kann auch annehmen, daß die Formel auch die dieſe Grenzen überſchreitenden Bogen gibt, wenn man der willkührlichen Conſtante andere Werthe beilegt, oder wenn man dieſe Conſtante jedesmal verändert, wenn die Function unter dem Zeichen $\int$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erfährt. Die Reihe hat für jeden Werth von x in allen Fällen, und was für einen Werth die Conſtante auch haben mag, nur einen einzigen beſtimmten Werth, während die Function arc. sin. x unendlich viele Werthe haben kann. Die Reihe iſt convergent oder divergent, je nachdem die Zahlenwerthe von x größer oder kleiner als die Einheit ſind.

Die eben durch die Integration vermittelſt der Reihen ſehr einfach erhaltene Reihenentwicklung der Function arc. sin. x nach den Potenzen von x, würde auf ſehr complicirte Rechnungen geführt haben, wenn man die Maclaurin'ſche Formel zu dieſem Zwecke hätte anwenden wollen.

§. 317. Wir wollen nun noch das Integral $\int e^{-x^2}dx$, welches ſehr häufig in der Wahrſcheinlichkeitsrechnung vorkommt, in eine Reihe entwickeln.

Es iſt:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1\cdot 2} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ꝛc.},$$

folglich:

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{x^7}{7} + \text{ꝛc.},$$

eine immer convergirende Reihe.

Die theilweiſe Integration gibt:

$$\int e^{-x^2}\,dx = e^{-x^2}x + 2\int e^{-x^2}x^2\,dx,$$

$$\int e^{-x^2}x^2\,dx = e^{-x^2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\int e^{-x^2}x^4\,dx, \text{ ꝛc.}$$

was auf folgende andere convergirende Reihe führt:

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx = e^{-x^2}x\left[1 + \frac{2x^2}{1\cdot 3} + \frac{(2x^2)^2}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{(2x^2)^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \text{ꝛc.}\right].$$

Endlich gibt die theilweiſe Integration auch:

$$\int e^{-x^2}\,dx = \int\frac{1}{x}\cdot e^{-x^2}x\,dx = -\frac{1}{2x}\cdot e^{-x^2} - \frac{1}{2}\int\frac{e^{-x^2}\,dx}{x^2}$$

$$\int\frac{e^{-x^2}\,dx}{x^2} = \int\frac{1}{x^3}\cdot e^{-x^2}x\,dx = -\frac{1}{2x^3}\cdot e^{-x^2} - \frac{3}{2}\int\frac{e^{-x^2}\,dx}{x^4}, \text{ ꝛc.}$$

folglich:

$$\int e^{-x^2}\,dx = \text{const.} - \frac{e^{-x^2}}{2x}\left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1\cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2x^2)^3} + \text{ꝛc.}\right],$$

und wenn man bemerkt, daß alle Glieder der Reihe für $x = \infty$ verſchwind

$$\int_x^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{e^{-x^2}}{2x}\left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1\cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2x^2)^3} + \text{ꝛc.}\right].$$

Dieſe letzte Reihe wird zuletzt immer divergent, aber ſie bleibt deſto lä convergent, je größer der Zahlenwerth von x iſt, und man darf daher dem convergirenden Theile der Reihe zu numeriſchen Näherungsrechnun Gebrauch machen (§. 25), weil man immer die Grenzen der Werthe Integrale:

$$\int_x^\infty\frac{e^{-x^2}\,dx}{x^2}, \quad \int_x^\infty\frac{e^{-x^2}\,dx}{x^4}, \text{ ꝛc.}$$

und folglich die Grenzen des Fehlers angeben kann, welchen man begeht, w man bei irgend einem Gliede der Reihe ſtehen bleibt. Dieſes iſt der V theil, welchen die Reihenentwicklungen durch ſucceſſive theilweiſe Integratio darbieten.

§. 318. Aus der Maclaurin'ſchen Formel:

$$fx = f(0) + f'(0)\cdot\frac{x}{1} + f''(0)\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + f'''(0)\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ꝛc.}$$

folgt allgemein:

$$\int fx\,dx = \text{const.} + f(0)\cdot\frac{x}{1} + f'(0)\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + f''(0)\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ꝛ}$$

$$\int_0^x fx\,dx = f(0)\cdot\frac{x}{1} + f'(0)\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + f''(0)\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ꝛc.} \quad (a_1)$$

Wenn die Reihe (a) convergent iſt, ſo iſt es die Reihe (a_1) auch; denn wenn man die erſte mit dem Gliede vom i^{ten} Range ſchließt, ſo begeht man einen Fehler, welcher durch:

$$f^{(i)}(\theta x)\cdot\frac{x^i}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i}, \quad (o)$$

ausgedrückt wird, wo θx ein Werth der veränderlichen Größe iſt, welcher zwiſchen 0 und x liegt, und wenn man folglich die zweite Reihe mit dem Gliede von demſelben Range ſchließt, ſo wird die Größe des begangenen Fehlers ausgedrückt durch:

$$f^{(i)}(\theta x)\cdot\int_0^x \frac{x^i dx}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i} = f^{(i)}(\theta x)\cdot\frac{x^{i+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i(i+1)}. \quad (o_1)$$

Sollen die Reihen (a), (a_1) convergent ſein, ſo iſt erforderlich, aber auch zureichend, daß die vernachläſſigten Größen (o), (o_1) für entſprechende Werthe von i und für alle zwiſchen den Integrationsgrenzen liegenden Werthe von x kleiner werden können, als jede gegebene Größe. Wenn dieſe Bedingung aber in Beziehung auf die Größe (o) erfüllt wird, ſo wird ſie es um ſo mehr in Beziehung auf die Größe (o_1).

§. 319. Die theilweiſe Integration gibt:

$$\int fx\,dx = xfx - \int f'x\cdot x\,dx,$$

$$\int f'x\cdot x\,dx = \frac{1}{2}x^2 f'x - \frac{1}{2}\int f''x\cdot x\,dx,$$

$$\int f''x\cdot x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 f''x - \frac{1}{3}\int f'''x\cdot x^3\,dx, \text{ ꝛc.},$$

woraus ſich die folgende von Johann Bernoulli herrührende Reihe ergibt:

$$\int fx\,dx = \text{const.} + fx\cdot\frac{x}{1} - f'x\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + f''x\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \text{ꝛc.} \quad (f)$$

welche man auch direct aus der Taylor'ſchen Reihe:

$$F(x+h) = Fx + F'x\cdot\frac{h}{1} + F''x\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2} + F'''x\cdot\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ꝛc.}$$

ableiten könnte; denn wenn man in dieſer $h = -x$ ſetzt, ſo erhält man:

$$Fx = F(0) + F'x\cdot\frac{x}{1} - F''x\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + F'''x\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \text{ꝛc.}$$

und wenn man $F'x = fx$ ſetzt:

$$\int fx\,dx = F(0) = fx\cdot\frac{x}{1} - f'x\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + f''x\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \text{ꝛc.}$$

Nun iſt aber klar, daß $F(0)$ oder der Werth von $\int fx\,dx$ für $x = 0$ auch der Werth der in der Gleichung (f) vorkommenden willkührlichen Conſtante iſt.

§. 320. Wenn ſich die Function fx nicht in eine hinreichend ſchnell convergirende Reihe entwickeln läßt, oder wenn man den analytiſchen Ausdruck derſelben nicht kannte, ſondern blos eine Reihe von Werthen derſelben hätte,

ſtets einen unendlich kleinen Werth behält, und das Integral (8) die E der Werthe dieſes Differenziales innerhalb der Integrationsgrenzen iſt.

Die Transformation findet in dem Falle nicht ſtatt, wenn $k = 1$ i in dieſem Falle nimmt das Differenzialelement $fxdx$ für $x = \xi$ einen en und unbeſtimmten Werth an, wofern die Function fx nicht plötzlich von Werthe zu einem andern übergeht, wenn x den Werth ξ erreicht. Dem kann dieſes Differenzialelement als die Grenze betrachten, gegen welc beſtimmte Integral:

$$\int_{\xi-\varepsilon\xi_0}^{\xi+\varepsilon\xi_1} fxdx = \int_{\xi-\varepsilon\xi_0}^{\xi+\varepsilon\xi_1} \frac{fx}{x-\xi} dx,$$

convergirt, wenn man für ε eine immer kleinere und kleinere poſitiv nimmt, und wenn ξ_0, ξ_1 beliebige endliche conſtante und poſitive Zahl zeichnen. Bei dem Uebergange zu dieſer Grenze convergirt das Glied f der Vorausſetzung gegen den einzigen endlichen Werth $f\xi$, und m folglich:

$$\lim. \int_{\xi-\varepsilon\xi_0}^{\xi+\varepsilon\xi_1} fxdx = f\xi \cdot \lim. \int_{\xi-\varepsilon\xi_0}^{\xi+\varepsilon\xi_1} \frac{dx}{x-\xi} = f\xi \cdot \log. \left(\frac{\xi_1}{\xi_0}\right)$$

welches wegen der Unbeſtimmtheit der Conſtanten ξ_0, ξ_1 eine unbe Größe iſt.

Allgemein, die Function fx ſei eine algebraiſche oder transcende kann man doch ſetzen:

$$(x-\xi) fxdx = fx,$$

wo ξ wieder den Werth von x bezeichnet, welcher fx unendlich macht, nachdem die Größe $f\xi$ Null, endlich, oder unendlich iſt, hat das Diffe element $fxdx$ einen unendlich kleinen, endlichen oder unbeſtimmten, od mehr einen unendlich großen Werth, und blos im erſten Fall kann das In

$$\int_{x_0}^{x_1} fxdx$$

als eine Summe von Differenzialelementen betrachtet werden.

§. 323. Wenn die Function fx in dem Integrale:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, \varepsilon) dx,$$

nicht unendlich wird für Werthe von x, welche zwiſchen den Grenzen x liegen, was für einen Werth man dem Parameter ε auch beilegen m iſt es gleichgültig, ob man dieſem ε *vor* oder *nach* der Integration beſtimmten Werth, z. B. den Werth Null beilegt. Aber dieſe Eig kommt den beſtimmten Integralen nur ſo lange zu, als ſie eine Sum Differenzialelementen ausdrücken und findet im Allgemeinen nicht meh wenn die Function f zwiſchen den Integrationsgrenzen durch das liche geht.

Wir wollen z. B. das beſtimmte Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\varepsilon dx}{\varepsilon^2+x^2} = \text{arc. tang.} \frac{x_1}{\varepsilon} - \text{arc. tang.} \frac{x_0}{\varepsilon}.$$

nehmen. Wenn die Zahlen x_0, x_1 beide poſitiv ſind, ſo daß die F unter dem Integralzeichen ſelbſt für $\varepsilon = 0$ zwiſchen den Grenzen x_0, x durch das Unendliche geht; ſo gibt dieſe Vorausſetzung einerſeits:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\varepsilon dx}{\varepsilon^2+x^2} = \int_{x_0}^{x_1} 0 \cdot dx = 0,$$

b andererſeits:

$$\text{arc.tang.}\frac{x_1}{\varepsilon} - \text{arc.tang.}\frac{x_0}{\varepsilon} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

daß es in der That gleichgültig iſt, ob man den Werth von ε vor oder ach der Integration ſubſtituirt. Aber wenn die Zahl x_1 poſitiv und die ahl x_0 negativ wäre, ſo würde die erſte Subſtitution den Werth des Inteales immer $= 0$ geben, während die zweite

$$\text{arc.tang.}\frac{x_1}{\varepsilon} - \text{arc.tang.}\frac{x_0}{\varepsilon} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

ibe. Der Grund hiervon liegt darin, daß, indem die Function unter dem ntegralzeichen für $x = 0$ unendlich wird, das dieſem beſondern Werthe entrechende Element einen endlichen Werth annimmt, während alle übrigen Elemte in Folge des der Conſtante ε beigelegten Werthes $= 0$ bleiben.

Daß in der That die übrigen Elemente des Integrales Null ſind, geht raus hervor, daß man den Zahlen x_0, x_1 beliebige endliche und ſelbſt undliche Werthe beilegen, d. h. mit andern Worten, die Grenzen des Inteales beliebig ausdehnen oder zuſammenziehen kann, ohne den Werth deſſelben verändern. Wenn nur die obere Grenze poſitiv und die untere negativ ibt, ſo iſt der Werth des beſtimmten Integrales immer der Conſtante π gleich.

Cauchy hat die beſtimmten Integrale, welche ſich wegen ihrer anomalen genſchaften den gewöhnlichen Regeln der Berechnung der beſtimmten Inteale entziehen, wie das Integral (9), ſinguläre Integrale genannt.

§. 324. Wenn eine der Grenzen des Integrales unendlich, poſitiv oder gativ iſt, oder wenn die eine dieſer Grenzen das poſitive, und die andere s negative Unendliche iſt; ſo muß, damit das Integral $\int f x dx$ einen endjen Werth behalten kann, die Function:

$$xfx = fx$$

: $x = \pm\infty$ verſchwinden. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, ß $-\infty$ und $+\infty$ die Grenzen des Integrales ſind, ſo kann man, wenn ε eder eine unbeſtimmt gegen Null convergirende poſitive Zahl und ξ_0, ξ_1 liebige endliche poſitive Conſtanten bezeichnen, ſetzen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} fxdx = \lim.\left[\int_{-\frac{1}{\varepsilon\xi_0}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} \frac{fxdx}{x} + \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{fxdx}{x} + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon\xi_1}} \frac{fxdx}{x}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} fxdx + \lim.\left[\int_{-\frac{1}{\varepsilon\xi_1}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} \frac{fxdx}{x} + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon\xi_1}} \frac{fxdx}{x}\right].$$

Man muß alſo haben:

$$0 = \lim.\left[\int_{-\frac{1}{\varepsilon\xi_0}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} \frac{fxdx}{x} + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon\xi_1}} \frac{fxdx}{x}\right]$$

$$= f(-\infty)\log.\xi_0 + f(\infty)\log.\left(\frac{1}{\xi_1}\right),$$

und folglich wegen der der Unbeſtimmtheit der Conſtanten ξ_0, ξ_1:

$$f(-\infty)=0, \quad f(\infty)=0$$

§. 325. Wenn die Function fx periodiſch iſt, ſo daß jedem Werthe fx innerhalb einer Periode ein anderer numeriſch gleicher Werth, aber entgegengeſetztem Zeichen, entſpricht; ſo iſt der Werth des beſtimmten Integrals nothwendig unbeſtimmt. So ergibt ſich z. B. aus der Gleichung:

$$\int_0^x \text{sin. mxdx} = \frac{1}{m}(1-\text{cos. mx})$$

der unbeſtimmte Werth:

$$\int_0^\infty \text{sin. mxdx} = \frac{1}{m}(1-\text{cos.}\infty),$$

weil es keine Grenze gibt, gegen welche der Coſinus eines Bogens convergirt, wenn der Bogen ſelbſt immer größer und größer wird; aber denn liegt dieſer unbeſtimmte Werth zwiſchen den Grenzen 0, $\frac{2}{m}$.

Wir wollen nun annehmen, daß die periodiſche Function fx durch eine Function $\varphi(\varepsilon x)$ von ſolcher Beſchaffenheit multiplicirt werde, daß $\varphi(0)=$ iſt, und daß das zwiſchen unendlichen Grenzen genommene Integral $\int \varphi(\varepsilon x)$ einen endlichen Werth behält; ſo iſt daſſelbe um ſo mehr mit dem Integr $\int \varphi(\varepsilon x) \cdot fx dx$ der Fall. Der Werth dieſes Integrales ändert ſich im gemeinen mit dem des Parameters ε, indem er ebenfalls im Allgemeinen ge eine gewiſſe Grenze convergirt, wenn ε immer kleiner und kleiner genomm wird, und da ſich die Grenze des Factors $\varphi(\varepsilon x)$ auf die Einheit reducirt, kann man die Grenze, gegen welche das Integral $\int \varphi(\varepsilon x) fx dx$ converg als den Werth des Integrales $\int fx dx$ betrachten, wodurch die Unbeſtimmtl dieſes letzten Integrales beſeitigt wird.

So iſt z. B. nach den Formeln (b) im §. 314:

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon x} \text{sin. mxdx} = \frac{m}{\varepsilon^2+m^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon x} \text{cos. mxdx} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+m^2},$$

woraus ſich für $\varepsilon=0$ die beſtimmten Gleichungen:

$$\int_0^\infty \text{sin. mxdx} = \frac{1}{m}, \quad \int_0^\infty \text{cos. mxdx} = 0$$

ergeben, welche aber nach der eben getroffenen Convention interpretirt wer müſſen.

Viertes Kapitel.

Principien der Theorie der elliptiſchen Functionen.

§. 326. In den beiden erſten Kapiteln des gegenwärtigen Buches ha wir geſehen, wie die Integration ganzer Claſſen algebraiſcher und trigo metriſcher Differenzialfunctionen auf die Integration der drei Formeln:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi}}, \qquad \text{(I)}$$

$$\int \sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi} \cdot d\varphi, \qquad \text{(II)}$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+a \sin.^2 \varphi)\sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi}} \qquad \text{(III)}$$

zurückgeführt wird, so daß, wenn diese drei Integrale sich unter endlicher Form durch Wurzelgrößen, Logarithmen, Sinus oder Kreisbogen als Functionen von φ ausdrücken ließen, man auch unter endlicher Form die unbestimmten, und folglich die bestimmten Integrale sehr vieler anderer zusammengesetzterer Functionen haben würde.

Allein dieses ist nicht möglich *), sondern die Integrale (I), (II), (III) sind neue transcendente Größen, welche man der Kürze wegen durch besondere Zeichen darstellen kann, eben so, wie man das bestimmte Integral:

$$\int_1^x \frac{dx}{x},$$

der Kürze wegen mit log. x bezeichnet, weil es sich nicht durch einen geschlossenen algebraischen Ausdruck darstellen läßt (§. 70 u. 138).

Legendre hat daher die folgenden Bezeichnungen vorgeschlagen, welche auch allgemein angenommen sind:

$$F(c,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi}},$$

$$E(c,\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi} \cdot d\varphi,$$

$$\Pi(c,a,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+a \sin.^2 \varphi)\sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi}}$$

so daß die unbestimmten Integrale (I), (II), (III) resp. ausgedrückt werden durch:

$$F(c,\varphi)+\text{const.}, \quad E(c,\varphi)+\text{const.}, \quad \Pi(c,a,\varphi)+\text{const.}$$

§. 327. Es sei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung einer auf ihren Mittelpunkt und auf ihre Axen bezogenen Ellipse, so wird, wenn wir

$$\frac{a^2-b^2}{a^2} = c^2$$

setzen, so daß c die Excentricität der Ellipse bezeichnet, die Länge des Bogens Bm (Fig. 77), welcher sich von der Spitze B der kleinen Axe bis zu dem Punkte m, dessen Abscisse x ist, erstreckt, ausgedrückt durch:

sich durch $\int \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2-c^2x^2}{a^2-x^2}} \cdot dx.$ (§. 174)

sie durch diese Integration

man in der Gleichung (

*) $B(0)=0$ ist, so erhält mLiouville im 23. Hefte des Journal de l'École
ponenten μ, welche schon du

Wir wollen

$$x = a \sin. \varphi$$

ſetzen, ſo kommt:

$$\frac{s}{a} = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi} \cdot d\varphi = \mathbf{E}(c, \varphi).$$

Wegen dieſer merkwürdigen Eigenſchaft der Function E, daß ſie die Länge des Bogens einer Ellipſe von der Excentricität c ausdrückt, wenn man den Winkel φ zur unabhängigen veränderlichen Größe und den Scheitel der kleinen Axe zum Anfangspunkte der Bogen nimmt, haben die drei Functionen F, E, Π den Namen elliptiſche Functionen erhalten, und zwar unterſcheidet man ſie reſp. in elliptiſche Functionen der erſten, zweiten und dritten Art.

Die Conſtante c, welche in den elliptiſchen Functionen der zweiten Art die Excentricität einer Ellipſe ausdrückt, wird im Allgemeinen der Modulus genannt, während die Conſtante a, welche nur in den elliptiſchen Functionen der dritten Art vorkommt, und poſitiv oder negativ, reell oder imaginär ſein kann, vorzugsweiſe den Namen Parameter behält.

Die unabhängige Veränderliche φ wird die Amplitude genannt. Wenn man aus dem Punkte O als Mittelpunkt mit dem Halbmeſſer OA einen Kreis beſchreibt, und die Ordinate pm bis zum Durchſchneiden mit dem Kreiſe in n verlängert; ſo iſt $Op = On \sin. BOn$. Die Amplitude φ wird alſo geometriſch durch den Winkel BOn dargeſtellt, wenn die Function $\mathbf{E}(c, \varphi)$ durch den elliptiſchen Bogen Bm dargeſtellt wird.

Die drei elliptiſche Functionen ſind offenbar impaare oder ungerade Functionen von φ (§. 18), weil das Differenzial $d\varphi$ durch die Veränderung von φ in $-\varphi$ das Zeichen verändert, während der Factor, womit $d\varphi$ unter dem Integralzeichen $\int$ multiplicirt iſt, dadurch nicht verändert wird.

Wenn die Amplitude φ einen Viertelkreis beträgt, oder wenn man $\frac{1}{2}\pi$ für die obere Grenze der Integrale nimmt, ſo heißen die elliptiſche Functionen vollſtändige, und man bezeichnet ſie blos durch:

$$\mathbf{F}(c), \quad \mathbf{E}(c), \quad \Pi(c, a).$$

Wenn die Werthe der elliptiſchen Functionen für einen Viertelumkreis, d. h. für alle Werthe von φ zwiſchen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ berechnet ſind, ſo ſind ſie wegen der unter dem Integrationszeichen vorkommenden periodiſchen Function $\sin.^2 \varphi$ auch für alle beliebigen Werthe von φ beſtimmt, und man hat z. B.

$$\mathbf{F}(c, \tfrac{1}{2}\pi + \varphi) = 2\mathbf{F}(c) - \mathbf{F}(c, \tfrac{1}{2}\pi - \varphi),$$
$$\mathbf{F}(c, \pi + \varphi) = 2\mathbf{F}(c) + \mathbf{F}(c, \varphi),$$
$$\mathbf{F}(c, \tfrac{3}{2}\pi + \varphi) = 4\mathbf{F}(c) - \mathbf{F}(c, \tfrac{1}{2}\pi - \varphi),$$
$$\mathbf{F}(c, 2\pi + \varphi) = 4\mathbf{F}(c) + \mathbf{F}(c, \varphi), \quad \text{u. ſ. f.}$$

Der Modulus c muß immer größer als 1 vorausgeſetzt werden (§. 310), und wenn zwei Moduli c, c′ durch die Gleichung $c^2 + c'^2 = 1$ mit einander verbunden ſind, ſo werden ſie Complementarmoduli genannt.

§. 328. Wir wollen mit φ, ψ, μ die drei Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes bezeichnen, worin der der Seite μ gegenüberlie[illegible] M durch die Gleichung $\sin. M = c \sin. \mu$ gegeben wird; ſo [illegible] Functionen. [illegible]r Kürze wegen

$$\cos. M = \sqrt{1 - c^2 \sin.}$$

[illegible]es gegenwärtigen Buches ſetzt, die Grundformel der ſphäriſchen Trigon[illegible]ffen algebraiſcher und tri[illegible]

$$\cos. \mu = \cos. \varphi \cos. \psi + \sin.$$ ation der drei Formeln: (1)

und folglich:

$$1-\frac{1-(\Delta\mu)^2}{c^2}=(\cos.\varphi\cos.\psi+\sin.\varphi\sin.\psi\cdot\Delta\mu)^2$$

gibt. Wenn man dieſe letzte Gleichung in Beziehung auf Δu auflöſt und die Wurzel unberückſichtigt läßt, welche für $\Delta\mu$ einen negativen Werth geben würde, ſo findet man:

$$\Delta\mu(1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi)=-c^2\sin.\varphi\sin.\psi\cos.\varphi\cos.\psi$$
$$+\sqrt{1-c^2(1-\cos.^2\varphi\cos.^2\psi+\sin.^2\varphi\sin.^2\psi-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi)}.$$

Man überzeugt ſich aber leicht, daß ſich die Größe unter dem Wurzelzeichen auf:

$$(1-c^2\sin.^2\varphi)^2(1-c^2\sin.^2\psi)^2=(\Delta\varphi)^2\cdot(\Delta\psi)^2$$

reducirt, wenn $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$ Größen bezeichnen, welche reſp. aus φ und ψ eben ſo zuſammengeſetzt ſind, wie $\Delta\mu$ aus μ. Man hat alſo dieſer Bezeichnung zufolge:

$$\Delta\mu=\frac{\Delta\varphi\cdot\Delta\psi-c^2\sin.\varphi\sin.\psi\cos.\varphi\cos.\psi}{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi}, \qquad (2)$$

und hieraus ergibt ſich nach einigen Transformationen:

$$\sin.^2\mu=\frac{1-(\Delta\mu)^2}{c^2}=\frac{(\sin.\varphi\cos.\psi\Delta\psi+\sin.\psi\cos.\varphi\Delta\varphi)^2}{(1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi)^2},$$

oder:

$$\sin.\mu=\frac{\sin.\varphi\cos.\psi\Delta\psi+\sin.\psi\cos.\varphi\Delta\varphi}{1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi}. \qquad (3)$$

Wenn man dieſe letzte Gleichung differenzirt, indem man φ und ψ als veränderlich und μ als conſtant betrachtet, ſo erhält man:

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\cdot\frac{\Omega(\varphi,\psi)}{(1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi)^2}+\frac{d\psi}{\Delta\psi}\cdot\frac{\Omega(\varphi,\psi)}{(1-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi)^2}=0. \qquad (4)$$

Der Kürze wegen wollen wir die Function:

$$(1+c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi)\cos.\varphi\cos.\psi\Delta\varphi\Delta\psi-\sin.\varphi\sin.\psi$$
$$+c^2\sin.\varphi\sin.\psi(\sin.^2\varphi+\sin.^2\psi-\cos.^2\varphi\cos.^2\psi-c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi)$$

mit $\Omega(\varphi,\psi)$ bezeichnen. Da die Gleichung (3) in Beziehung auf φ und ψ ſymmetriſch iſt, ſo braucht man nur den Coefficienten von $d\varphi$ zu bilden, woraus ſich alsdann der von $d\psi$ ergibt. Man könnte auch der Function $\Omega(\varphi,\psi)$ andere Formen geben, und wir wollen hier blos eine derſelben anführen, woraus die Eigenſchaft dieſer Function, daß ſie in Beziehung auf die beiden Veränderlichen φ, ψ ſymmetriſch iſt, deutlich erhellet.

Die Gleichung (4) reducirt ſich auf:

$$0=\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{d\psi}{\Delta\psi}=\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}+\frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\psi}},$$

woraus ſich durch Integration ergibt:

$$F(c,\varphi)+F(c,\psi)=\text{const.}$$

Um die durch dieſe Integration eingeführte willkührliche Conſtante zu beſtimmen, ſetzt man in der Gleichung (1) $\psi=0$, welches $\varphi=\mu$ gibt, und da $F(c,0)=0$ iſt, ſo erhält man zwiſchen den Veränderlichen φ, ψ und der Conſtanten μ, welche ſchon durch die Gleichung (1) mit einander verbunden

ſind, und die drei Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes bilden, worin der der conſtanten Seite gegenüberliegende Winkel auch conſtant iſt, noch die andere Gleichung:

$$F(c, \varphi) + F(c, \psi) = F(c, \mu). \qquad (5)$$

Wenn man alſo die Werthe der elliptiſchen Function der erſten Art für zwei Amplituden φ, ψ hat, ſo erhält man durch Addition dieſer Werthe den Werth der elliptiſchen Function derſelben Art für eine Amplitude μ, wo μ durch die Gleichung (1) oder durch die Gleichung (3), welche eine Transformation davon iſt, als Function von φ, ψ beſtimmt wird.

§. 329. Wir wollen ſetzen:

$$u = F(c, \varphi), \quad v = F(c, \psi),$$

und um auszudrücken, daß φ die Amplitude iſt, für welche die Function F den Werth u hat, wollen wir mit Jacobi

$$\varphi = \operatorname{am} u$$

ſchreiben, ſo daß die Anfangsbuchſtaben am des Wortes Amplitude die inverſe Function von der bezeichnen, welche durch das Zeichen F angedeutet iſt. Nach dieſer Uebereinkunft ſchreibt man auch:

$$\psi = \operatorname{am} v,$$

$$\Delta\varphi = \Delta \operatorname{am} u, \quad \Delta\psi = \Delta \operatorname{am} v,$$

und folglich gibt die Verbindung der Gleichungen (3) und (5):

$$\sin.\operatorname{am}(u+v) = \frac{\sin.\operatorname{am} u \,.\, \cos.\operatorname{am} v \,.\, \Delta \operatorname{am} v + \sin.\operatorname{am} v \,.\, \cos.\operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} u}{1 - c^2 \sin.^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin.^2 \operatorname{am} v}. \qquad (a)$$

Wenn ſich der Modulus c auf Null reducirt, ſo verwandelt ſich die vorhergehende Gleichung in folgende:

$$\sin.(u+v) = \sin. u \cos. v + \sin. v \cos. u.$$

Ebenſo fände man:

$$\sin.\operatorname{am}(u-v) = \frac{\sin.\operatorname{am} u \,.\, \cos.\operatorname{am} v \,.\, \Delta \operatorname{am} v - \sin.\operatorname{am} v \,.\, \cos.\operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} u}{1 - c^2 \sin.^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin.^2 \operatorname{am} v}$$

$$\cos.\operatorname{am}(u \pm v) = \frac{\cos.\operatorname{am} u \,.\, \cos.\operatorname{am} v \,.\, \mp \sin.\operatorname{am} u \,.\, \sin.\operatorname{am} v \,.\, \Delta \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} v}{1 - c^2 \sin.^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin.^2 \operatorname{am} v},$$

und im Allgemeinen haben alle Formeln, deren ſich die Analyſten häufig zur Transformation der trigonometriſchen Functionen bedienen, ihre analogen für die Transformation der inverſen elliptiſchen Functionen der erſten Art, oder können vielmehr als beſondere Fälle der elliptiſchen Formeln betrachtet werden, in welchen der Modulus gleich Null geſetzt iſt, ſo daß

$$\operatorname{am} u = u, \quad \Delta \operatorname{am} u = 1$$

iſt.

Die Entwickelung dieſer merkwürdigen Analogien iſt der Gegenſtand der ſchönen Unterſuchungen von Abel und Jacobi geweſen, welche von der gelehrten Welt mit vielem Intereſſe aufgenommen wurden. Dieſe beiden Geometer haben beſonders ihren Scharfſinn auf die vollſtändige Unterſuchung der inverſen elliptiſchen Functionen und auf die merkwürdigen Relationen, durch welche ſich

die Analyse der Winkelschnitte an die Theorie der Zahlen und an die höhere Algebra anschließt, gerichtet.

§. 330. Die Function sin. u und alle übrigen trigonometrischen Functionen, welche davon abhängen, sind für reelle Werthe der Veränderlichen u periodisch, aber sie hören auf, periodisch zu sein, wenn man die unabhängige Veränderliche eine Reihe imaginärer Werthe $u\sqrt{-1}$ durchlaufen läßt, weil sie sich alsdann in Exponentialfunctionen verwandeln. Für die Exponentialfunction e^u findet das Umgekehrte statt, und die Function sin. am u hat die Eigenschaft, daß sie periodisch bleibt, man mag die Veränderliche u eine Reihe reeller oder imaginärer Werthe durchlaufen lassen, so daß sie die Haupteigenschaft der gewöhnlichen trigonometrischen Functionen mit der der Exponentialfunctionen in sich vereinigt.

Wir wollen mit $\frac{1}{2}\omega$ den Werth von u bezeichnen, welcher der Amplitude $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ entspricht, oder den Werth der vollständigen Function $\mathbf{F}(c)$, so ist (§. 329):

$$\begin{aligned}\text{sin. am } u &= \text{sin. am } (u + 2\omega) = \text{sin. am } (u + 4\omega)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots = \text{sin. am } (u + 2i\omega),\end{aligned}$$

wo i eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Die Function sin. am u ist also erstens periodisch für reelle Werthe von u.

Setzt man nun:

$$\text{sin. } \varphi = \sqrt{-1} \cdot \text{tang. } \theta, \quad c'^2 = 1 - c^2,$$

so ergibt sich:

$$\text{cos.}^2 \varphi = 1 + \text{tang.}^2 \theta = \frac{1}{\text{cos.}^2 \theta},$$

$$d\varphi = \sqrt{-1} \cdot \frac{d\theta}{\text{cos. } \varphi \text{ cos.}^2 \theta} = \sqrt{-1} \cdot \frac{d\theta}{\text{cos. } \theta},$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \text{ sin.}^2 \varphi}} = \sqrt{-1} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{1 - c'^2 \text{ sin.}^2 \theta}},$$

$$\mathbf{F}(c, \varphi) = \sqrt{-1} \cdot \mathbf{F}(c', \theta);$$

und wenn man:

$$\mathbf{F}(c', \theta) = u, \quad \mathbf{F}(c, \varphi) = u\sqrt{-1}$$

setzt, so folgt (indem man den Modulus zwischen den Parentheſen auf das Zeichen sin. am folgen läßt, um die sich auf verschiedene Moduli beziehenden Amplituden zu unterscheiden):

$$\text{sin. } \theta = \text{sin. am } (u, c'), \quad \text{tang. } \theta = \text{tang. am } (u, c'),$$

$$\text{sin. } \varphi = \text{sin. am } (u\sqrt{-1}, c)$$

und folglich:

$$\text{sin. am } (u\sqrt{-1}, c) = \sqrt{-1} \cdot \text{tang. am } (u, c').$$

Wenn wir den Werth der vollständigen Function $\mathbf{F}(c')$ mit $\frac{1}{2}\omega'$ bezeichnen, so haben wir:

$$\begin{aligned}\text{tang. am } (u, c') &= \text{tang. am } (u + 2\omega', c') = \text{tang. am } (u + 4\omega', c')\\ &\ldots\ldots = \text{tang. am } (u + 2i'\omega', c'),\end{aligned}$$

wo i' eine beliebige ganze Zahl ist, und folglich:

$$\text{sin. am } (u\sqrt{-1}) = \text{sin. am } [(u + 2i'\omega')\sqrt{-1}],$$

wo ſich die Amplituden in dieſer letzten Formel auf den Modulus c beziehen. Es iſt folglich:

$$\text{sin. am}(2i'\omega'\sqrt{-1}) = \text{sin. am}(0) = 1,$$

$$\text{cos. am}(2i'\omega'\sqrt{-1}) = \text{cos. am}(0) = 1, \quad \Delta\,\text{am}(2i'\omega'\sqrt{-1}) = 1.$$

und wenn man in der Formel (a) $v = 2i\omega'\sqrt{-1}$ ſetzt, ſo gibt ſie vermöge dieſer letzten Relationen:

$$\text{sin. am}(u + 2i'\omega'\sqrt{-1}) = \text{sin. am}\,u.$$

Aber wir haben bereits gefunden:

$$\text{sin. am}(u + 2i\omega) = \text{sin. am}\,u,$$

folglich iſt:

$$\text{sin. am}\,u = \text{sin. am}(u + 2i\omega + 2i'\omega'\sqrt{-1}),$$

und dieſe letzte Formel drückt die beabſichtigte doppelte Periodicität aus, wo die eine Periode ein reelles, und die andere ein imaginäres Argument hat.

§. 331. Nach dem Vorhergehenden iſt leicht einzuſehen, wie man für einen gegebenen Werth des Modulus zwiſchen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ der Amplitude eine Tafel der Werthe der Function F berechnen könnte, oder was noch einfacher wäre, eine Tafel der Werthe der inverſen Function sin. am u zwiſchen den Grenzen $u = 0$, $u = \frac{1}{2}\omega$. Wir wollen in der Formel (a) $v = \delta u$ ſetzen und δu ſo klein annehmen, daß man ohne merklichen Fehler

$$\text{sin. am}\,\delta u = \text{sin.}\,\delta u = \delta u,$$

$$\text{cos. am}\,\delta u = \text{cos.}\,\delta u = 1, \quad \Delta(\delta u) = 1$$

ſetzen kann; ſo gibt dieſe Formel:

$$\text{sin. am}(u + \delta u) = \text{sin. am}\,u + \delta u \cdot \text{cos. am}\,u \cdot \Delta\,\text{am}\,u.$$

Setzt man in dieſer letzten Gleichung:

$$u = \delta u, \quad u = 2\delta u, \quad u = 3\delta u, \quad \text{ꝛc.}$$

ſo erhält man die Werthe der Function sin. am u für eine Reihe von Werthen von u, welche eine arithmetiſche Progreſſion von der Differenz δu bilden. Dieſes Verfahren würde ähnliche Vereinfachungen und Verificationen geſtatten, wie die, welche man für die Berechnung der gewöhnlichen trigonometriſchen Tafeln angibt. Uebrigens würde man leicht die Tafel der Werthe der Function sin. am u umkehren können, um daraus die Tafel der Werthe der Function $u = F(c, \varphi)$, welche den Bedürfniſſen der Integralrechnung beſſer entſpricht, zu bilden.

§. 332. Es kommt nun darauf an, zu zeigen, wie man ohne Wiederholung des im vorhergehenden § angegebenen Syſtemes von Operationen, die Function $F(c, \varphi)$ für jeden Werth des Modulus und der Amplitude direct berechnen kann, ohne genöthigt zu ſein, für jeden Modulus eine ſpecielle Tafel zu berechnen. Wir wollen daher mit c, c_1 beliebige Moduli bezeichnen und einen conſtanten Coefficienten k von ſolcher Beſchaffenheit zu beſtimmen ſuchen, daß:

$$F(c, \varphi) = kF(c_1, \varphi_1)$$

oder:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}} = k \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - c_1{}^2 \sin.^2 \varphi_1}} \qquad (6)$$

iſt. Dieſer Gleichung kann auf unendlich viele verſchiedene Arten genügt werden, wenn man zwiſchen den Moduli c, c_1 und den Veränderlichen φ, φ_1

die gehörigen Relationen aufſtellt. Ohne die Aufgabe durch directe Methoden zu behandeln, welche zu weitläufige Entwickelungen erfordern würden, wollen wir annehmen, es werde

$$\sin.^2\varphi(1-c_1^2\sin^2\varphi_1) = k^2\sin.^2\varphi_1(1-\sin.^2\varphi_1), \qquad (7)$$

geſetzt; ſo erhält man durch Differenziation:

$$\frac{\sin.\varphi_1\cos.\varphi_1 d\varphi_1}{\sin.\varphi(1-c_1^2\sin.^2\varphi_1)} = \frac{\cos.\varphi d\varphi}{c_1^2\sin.^2\varphi + k^2(1-2\sin.^2\varphi_1)}.$$

In den erſten Theil dieſer Gleichung wollen wir den aus der Gleichung (7) abgeleiteten Werth von $\sin.\varphi$ und in den zweiten Theil den aus derſelben Gleichung abgeleiteten Werth von $\sin.\varphi_1$ ſetzen, ſo erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{d\varphi_1}{k\sqrt{1-c_1^2\sin.^2\varphi_1}} = \frac{\cos.\varphi d\varphi}{\sqrt{(k+c_1^2\sin.^2\varphi)^2 - 4k^2\sin.^2\varphi}},$$

aus deren Vergleichung mit der Gleichung (6) ſich

$$\frac{d\varphi}{k^2\cos.\varphi\sqrt{1-c^2\sin.^2\varphi}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{(k^2+c_1^2\sin.^2\varphi)^2 - 4k^2\sin.^2\varphi}}$$

oder:

$$k^4(1-\sin.^2\varphi)(1-c^2\sin.^2\varphi) = (k^2+c_1^2\sin.^2\varphi)^2 - 4k^2\sin.^2\varphi;$$

ergibt, und wenn dieſe letzte Gleichung in Beziehung auf φ identiſch ſein ſoll, ſo muß:

$$c_1^4 = k^4c^2, \quad 4-2c_1^2 = k^2(c^2+1),$$

folglich:

$$c_1 = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad k = \frac{c_1}{\sqrt{c}} = \frac{2}{1+c}$$

ſein, und wenn wir dieſe Werthe von c_1 und k in die Gleichung (7) ſubſtituiren; ſo gibt ſie:

$$\sin.(2\varphi_1 - \varphi) = c\sin.\varphi.$$

§. 333. Der auf dieſe Weiſe beſtimmte Werth von c_1 iſt immer größer als c, und wir wollen nun annehmen, daß man eine Reihe, oder, wie man ſich gewöhnlich ausdrückt, eine Scale der Moduli $c_1, c_2, c_3, \ldots$, welche unter ſich und mit dem urſprünglichen Modulus c durch die Gleichungen:

$$c_1 = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad c_2 = \frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1}, \quad c_3 = \frac{2\sqrt{c_2}}{1+c_2}, \quad \text{u.} \qquad (b)$$

verbunden ſind, bis zu einem wenig von der Einheit verſchiedenen Werthe c_n berechnen, und außerdem eine Reihe von Amplituden $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$ vermittelſt der Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\sin.(2\varphi_1 - \varphi) = c\sin.\varphi, \\ &\sin.(2\varphi_2 - \varphi_1) = c_1\sin.\varphi_1, \\ &\sin.(2\varphi_3 - \varphi_2) = c_2\sin.\varphi_2, \\ &\text{u. ſ. w.} \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

beſtimmen; ſo hat man auch:

$$F(c_1,\varphi_1) = \frac{1+c}{2}\cdot F(c,\varphi),$$

$$F(c_2, \varphi_2) = \frac{1+c_1}{2} \cdot F(c_1, \varphi_1) = \left(\frac{1+c_1}{2}\right)\left(\frac{1+c}{2}\right) \cdot F(c, \varphi),$$

$$F(c_3, \varphi_3) = \frac{1+c_2}{2} \cdot F(c_2, \varphi_2) = \left(\frac{1+c_2}{2}\right)\left(\frac{1+c_1}{2}\right)\left(\frac{1+c}{2}\right) \cdot F(c, \varphi),$$

u. ſ. w.

Aber wenn man in der Scale der Moduli bis zu dem wenig von der Einheit verſchiedenen Gliede c_n gelangt iſt (und gewöhnlich braucht man nur eine kleine Anzahl von Gliedern zu berechnen), ſo hat man ſehr nahe:

$$F(c_n, \varphi_n) = \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin.^2 \varphi}} = \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{\cos. \varphi} = \log. \tang \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\varphi_n\right),$$

folglich:

$$F(c, \varphi) = \frac{2}{1+c} \cdot \frac{2}{1+c_1} \cdot \frac{2}{1+c_1} \cdots \frac{2}{1+c_{n-1}} \cdot \log. \tang. \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\varphi_n\right). \quad (d)$$

Nichts hindert, die Reihe (b) rückwärts über c hinaus durch die Glieder c_{-1}, c_{-2}, c_{-3}, ..., welche nach demſelben Geſetze aus einander entſtehen, zu erweitern, ſo daß man hat:

$$c = \frac{2\sqrt{c_{-1}}}{1+c_{-1}}, \quad c_{-1} = \frac{2\sqrt{c_{-2}}}{1+c_{-2}}, \quad c_{-2} = \frac{2\sqrt{c_{-3}}}{1+c_{-3}}, \quad \text{ꝛc.} \quad (b')$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin.(2\varphi - \varphi_{-1}) = c_{-1} \sin. \varphi_{-1}, \\ &\sin.(2\varphi_{-1} - \varphi_{-2}) = c_{-2} \sin. \varphi_{-2}, \\ &\text{u. ſ. w.} \end{aligned}\right\} \quad (c')$$

Man gelangt bald bis zu einem ſehr wenig von der Einheit verſchiedenen Gliede c_{-n}, und alsdann hat man nahezu:

$$F(c_{-n}, \varphi_{-n}) = \int_0^{\varphi_{-n}} d\varphi = \varphi_{-n},$$

folglich:

$$F(c, \varphi) = \frac{1+c_{-1}}{1} \cdot \frac{1+c_{-2}}{2} \cdots \frac{1+c_{-n}}{2} \cdot \varphi_{-n}. \quad (d')$$

Unter den Formeln (d) und (d') wählt man die, welche den Werth von $F(c, \varphi)$ am ſchnellſten gibt, und auf dieſe Weiſe ſind die Tafeln berechnet, welche Legendre in ſeinem großen Werke über die elliptiſchen Functionen mitgetheilt hat.

Wenn man $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ſetzt, ſo geben die Gleichungen (c'):

$$\varphi_{-1} = \pi, \quad \varphi_{-2} = 2\pi, \ldots \varphi_{-n} = 2^n \pi,$$

und wenn man folglich die Grenze, gegen welche das aus unendlich vielen gegen die Einheit convergirenden Factoren beſtehende Product convergirt, mit K bezeichnet, ſo iſt der Werth der vollſtändigen Function $F(c) = K \cdot \frac{\pi}{2}$.

§. 334. Gehen wir nun zu der elliptiſchen Function der zweiten Art:

$$E(c, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi} \cdot d\varphi = \int_0^{\varphi} \frac{(1-c^2 \sin.^2 \varphi) d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

über. Wenn man wieder durch φ, ψ zwei Winkel bezeichnet, welche der Gleichung (l) im §. 328, und folglich der Differenzialgleichung:

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{d\psi}{\Delta\psi}=0 \qquad (8)$$

ügen; ſo hat man:

$$E(c,\varphi)+d\cdot E(c,\psi)=\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{d\psi}{\Delta\psi}-c^2\left(\sin.^2\varphi\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\sin.^2\psi\,\frac{d\psi}{\Delta\psi}\right)$$

$$=c^2(\sin.^2\psi-\sin.^2\varphi)\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

n gibt aber die Gleichung (1):

$$\Delta\mu\; d\cdot\sin.\varphi\sin.\psi=\sin.\varphi\cos.\psi\,d\varphi+\sin.\psi\cos.\varphi\,d\psi,$$

wenn man für $d\psi$ ſeinen aus der Gleichung (8) gezogenen Werth ſub-
irt:

$$\cdot d\cdot\sin.\varphi\sin.\psi=(\sin.\varphi\cos.\psi\Delta\varphi-\sin.\psi\cos.\varphi\Delta\psi)\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}. \qquad (9)$$

ierdem hat man vermöge der Gleichungen (2) und (3):

$$\frac{\sin.\mu}{\Delta\mu}=\frac{\sin.\varphi\cos.\psi\Delta\varphi+\sin.\psi\cos.\varphi\Delta\varphi}{\Delta\varphi\Delta\psi-c^2\sin.\varphi\sin.\psi\cos.\varphi\cos.\psi}; \qquad (10)$$

aus der Verbindung der Gleichungen (9) und (10) ergibt ſich leicht:

$$\sin.\mu\,d\cdot\sin.\varphi\sin.\psi=(\sin.^2\varphi-\sin.^2\psi)\,\frac{d\varphi'}{\Delta\varphi}. \qquad (11)$$

glich iſt:

$$d\cdot E(c,\varphi)+d\cdot E(c,\psi)=-c^2\sin.\mu\,d\cdot\sin.\varphi\sin.\psi,$$
$$E(c,\varphi)+E(c,\psi)=\text{const.}-c^2\sin.\mu\sin.\varphi\sin.\psi,$$

wenn man die willkührliche Conſtante ſo beſtimmt, daß zugleich $\psi=0$, $=\mu$ iſt, ſo hat man:

$$E(c,\varphi)+E(c,\psi)=E(c,\mu)-c^2\sin.\mu\sin.\varphi\sin.\psi. \qquad (12)$$

Vergleicht man dieſe Formel mit der Gleichung (5), welche für die Func-
F die analoge Formel iſt, ſo ſieht man, weßwegen die Geometer, welche
mit der Unterſuchung der elliptiſchen Functionen beſchäftigt haben, die
ction F als die einfachere in den erſten Rang geſetzt haben, obgleich nach
geometriſchen Analogie die Function E, welche einen elliptiſchen Bogen
rückt, erſt auf die ſcheint folgen zu müſſen, welche einen Kreisbogen
rückt.

§. 335. Betrachten wir nun, wie im §. 332, einen Modulus c_1 und Amplitude φ_1, welche mit c und φ durch die Gleichungen:

$$c_1=\frac{2\sqrt{c}}{1+c},\quad \sin.(2\varphi_1-\varphi)=c\sin.\varphi. \qquad (13)$$

unden ſind, ſo ergibt ſich daraus durch Differenziation:

$$d\varphi_1=d\varphi\cdot\frac{c\cos.\varphi+\cos.(2\varphi_1-\varphi)}{2\cos.(2\varphi_1-\varphi)},$$

, wenn man für $\cos.(2\varphi_1-\varphi)$ ſeinen aus der zweiten der Gleichungen
) gezogenen Werth $\Delta\varphi$ ſetzt:

$$d\varphi_1=\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\cdot\frac{c\cos.\varphi+\Delta\varphi}{2}. \qquad (14)$$

Aber die Gleichung (6) gibt:

$$d\varphi_1 = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\sqrt{1-c_1^2 \sin.^2 \varphi}}{k},$$

oder wenn man für k ſeinen Werth wieder ſetzt:

$$d\varphi_1 = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{1+c}{2} \cdot \sqrt{1-c_1^2 \sin.^2 \varphi_1}. \qquad (15)$$

Da die Gleichungen (14) und (15) übereinſtimmen müſſen, ſo muß:

$$(1+c)\sqrt{1-c_1^2 \sin.^2 \varphi_1} = c \cos. \varphi + \Delta\varphi. \qquad (16)$$

ſein.

Wenn wir die correſpondirenden Theile der Gleichungen (14) und (16) in einander multipliciren; ſo kommt:

$$(1+c)\sqrt{1-c_1^2 \sin.^2 \varphi_1} \cdot d\varphi_1 = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{(c \cos. \varphi + \Delta\varphi)^2}{2}$$

$$= \sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi} \cdot d\varphi - \frac{1-c^2}{2} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin.^2 \varphi}} + c \cos. \varphi d\varphi;$$

folglich, wenn man integrirt:

$$(1+c)E(c_1,\varphi_1) = E(c,\varphi) - \frac{1-c^2}{2} \cdot F(c,\varphi) + c \sin. \varphi. \qquad (17)$$

Wir fügen keine willkührliche Conſtante hinzu, weil alle Glieder dieſer Gleichung für $\varphi = 0$ einzeln verſchwinden.

Vermöge der Formel (17) wird die Function $E(c_1, \varphi_1)$ durch zwei elliptiſche Functionen, die eine von der erſten, und die andere von der zweiten Art, welche denſelben Modulus und dieſelbe Amplitude haben, ausgedrückt, und umgekehrt wird die elliptiſche Function der erſten Art durch zwei elliptiſche Functionen der zweiten Art von verſchiedenem Modulus und von verſchiedener Amplitude beſtimmt.

Wenn man $\varphi = \pi$ ſetzt, ſo hat man $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$,

$$E(c,\pi) = 2E(c,\tfrac{1}{2}\pi) = 2E(c),$$
$$F(c,\pi) = 2F(c,\tfrac{1}{2}\pi) = 2F(c),$$

und die Formel (17) gibt zwiſchen den vollſtändigen elliptiſchen Functionen folgende Relation:

$$(1+c)E(c_1) = 2E(c) - (1-c^2)F(c). \qquad (18)$$

§. 336. Wenn man die Scale der Moduli und der Amplituden, deren Geſetz im §. 333 angegeben iſt, verfolgt, ſo findet man:

$$(1+c_1)E(c_2,\varphi_2) = E(c_1,\varphi_1) - \frac{1-c_1^2}{2} \cdot F(c_1,\varphi_1) + c_1 \sin. \varphi_1, \qquad (19)$$

$$F(c_1,\varphi_1) = \frac{1+c}{2} \cdot F(c,\varphi). \qquad (20)$$

Wenn man $F(c, \varphi)$ und $F(c_1, \varphi_1)$ zwiſchen den Gleichungen (17), (19 und (20) eliminirt und dann für c_1 ſeinen durch c ausgedrückten Werth ſubſtituirt; ſo erhält man endlich:

$$\mathbf{E}(c,\varphi) = \frac{(1+c)(3-c)}{1-c}\mathbf{E}(c_1,\varphi_1) - \frac{2(1-c)}{(1-\sqrt{c})^2}\cdot\mathbf{E}(c_2,\varphi_2)$$

$$-c\sin.\varphi + \frac{4\sqrt{c}}{1-c}\cdot\sin.\varphi_1. \qquad (21)$$

n man dieſelbe Rechnung beliebig wiederholen kann, indem man die auf- er abſteigende Scale der Moduli verfolgt, ſo kann man die Function $\mathbf{E}(c,\varphi)$ mer von zwei andern Functionen derſelben Art abhängig machen, für welche r Modulus einen ſehr wenig von Null oder der Einheit verſchiedenen Werth t. Wenn aber der Modulus c_n ſehr wenig von Null oder der Einheit ver- ieden iſt, ſo hat man ohne merklichen Fehler:

$$\mathbf{E}(c_n,\varphi_n) = \int_0^{\varphi_n}\sqrt{1-c_n^2\sin.^2\varphi}\cdot d\varphi = \int_0^{\varphi_n} d\varphi = \varphi_n,$$

er vielmehr:

$$\mathbf{E}(c_n,\varphi_n) = \int_0^{\varphi_n}\cos.\varphi\cdot d\varphi = \sin.\varphi_n.$$

§. 337. In Beziehung auf die elliptiſchen Functionen der dritten Art ollen wir nur einen Lehrſatz anführen, nämlich den analogen von denen, elche in Beziehung auf die elliptiſchen Functionen der erſten und zweiten Art ach die Formeln (5) und (12) ausgedrückt werden. Wenn wir wieder it φ, ψ zwei veränderliche Amplituden bezeichnen, welche den Gleichungen l), (3) und (8) genügen, ſo iſt:

$$d\cdot\Pi(c,a,\varphi) + d\cdot\Pi(c,a,\psi) = a\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\cdot\frac{\sin.\psi - \sin.\varphi}{(1+a\sin.^2\varphi)(1+a\sin.^2\psi)},$$

er vielmehr wegen der Gleichung (11):

$$\cdot\Pi(c,a,\varphi) + d\cdot\Pi(c,a,\psi) = -a\sin.\mu\cdot\frac{d\cdot\sin.\varphi\sin.\psi}{(1+a\sin.^2\varphi)(1+a\sin.^2\psi)}. \qquad (22)$$

Wenn man ſetzt:

$$\sin.\varphi\sin.\psi = \alpha, \quad \sin.^2\varphi + \sin.^2\psi = \beta,$$

verwandelt ſich der zweite Theil der vorhergehenden Gleichung in:

$$-a\sin.\mu\cdot\frac{d\alpha}{1+a\beta+a^2\alpha^2}.$$

Aus der Gleichung (1) folgt:

$$\cos.^2\varphi\cos.^2\psi = \cos.^2\mu - 2\cos.\mu\Delta\mu\sin.\varphi\sin.\psi + (1-c^2\sin.^2\mu)\sin.^2\varphi\sin.^2\psi;$$

nd da

$$\cos.^2\varphi\cos.^2\psi = 1-(\sin.^2\varphi+\sin.^2\psi)+\sin.^2\varphi\sin.^2\psi = 1-\beta+\alpha^2,$$

, ſo kommt:

$$1-\beta+\alpha^2 = \cos.^2\mu - 2\alpha\cos.\mu\Delta\mu + \alpha^2(1-c^2\sin.^2\mu),$$

olglich:

$$\beta = \sin.^2\mu + 2\alpha\cos.\mu\Delta\mu + \alpha^2c^2\sin.^2\mu,$$

nd mithin:

$$\frac{d\alpha}{1+a\beta+a^2\alpha^2} = \frac{d\alpha}{p+2q\alpha+r\alpha^2},$$

wo der Kürze wegen:

$$1 + a \sin.^2 \mu = p, \quad a \cos. \mu \Delta\mu = q, \quad ac^2 \sin.^2 \mu + a^2 = r.$$

geſetzt iſt.

Wenn man folglich das Integral:

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{p + 2q\alpha + r\alpha^2},$$

welches ſich immer durch Logarithmen oder durch Kreisbogen ausdrücken läßt, mit $\Phi(\alpha)$ bezeichnet, ſo gibt die Gleichung (22):

$$\Pi(c,a,\varphi) + \Pi(c,a,\psi) = \text{const.} - a \sin. \mu \cdot \Phi(\sin. \varphi \sin. \psi).$$

Aber für $\psi = 0$ hat man $\varphi = \mu$, $\Pi(c, a, \psi) = 0$, $\Phi(0) = 0$; folglich:

$$\Pi(c,a,\varphi) + \Pi(c,a,\psi) = \Pi(c,a,\mu) - a \sin. \mu \cdot \Phi(\sin. \varphi \sin. \psi).$$

Fünftes Kapitel.

Geometriſche Anwendungen der Berechnung der einfachen beſtimmten Integrale.

I. Quadratur ebener Curven.

§. 338. Wir haben ſchon mehrere Male zu bemerken Gelegenheit gehabt, daß das Integral:

$$u = \int_{x_0}^{x_1} fx \cdot dx$$

die Größe der Fläche ausdrückt, welche von dem Bogen einer Curve, deren rechtwinkelige Coordinaten x und fx ſind, welcher zwiſchen den Coordinaten fx_0, fx_1 liegt, von dieſen Ordinaten ſelbſt und von der Axe x eingeſchloſſen wird. Dieſe Anwendung der Integralrechnung bietet ſich ſo natürlich dar, daß man ſie gleich vom Anfange an die Methode der Quadraturen genannt hat, und noch jetzt verſteht man unter der Quadratur (§. 33) die Operationen, durch welche man den Werth eines beſtimmten Integrales genau oder näherungsweiſe erhält. Ohne hier den Beweis eines Lehrſatzes zu wiederholen, mit welchem wir ſchon vertraut ſind, wollen wir denſelben auf einige der Curven anwenden, welche beſonders unſere Aufmerkſamkeit verdienen.

Wenn die Gleichung der gewöhnlichen Parabel auf die Form:

$$y = \sqrt{2px},$$

gebracht iſt, ſo findet man für die von dem Scheitel aus gemeſſene Fläche dieſer Curve:

$$u = \sqrt{2p} \cdot \int_0^x \sqrt{x} \cdot dx = \frac{2}{3} \sqrt{2p} \cdot x\sqrt{x} = \frac{2}{3} xy.$$

Die Fläche des paraboliſchen Dreieckes Omp (Fig. 78) beträgt folglich $\frac{2}{3}$ von der Fläche des aus der Ordinate und der Abſciſſe des Punktes m conſtruirten Rechteckes Opmq. Dieſer von Archimedes entdeckte Satz iſt der

egenſtand eines Werkchens dieſes großen Geometers, worin er dieſen Satz
f zwei ſehr merkwürdige Arten beweiſt, nämlich einmal durch Sätze aus der
tatik, welche er ebenfalls ſelbſt gefunden hatte, und das andere Mal durch
e Summation einer abnehmenden geometriſchen Progreſſion, worauf alsdann
r Uebergang von dem Endlichen zu dem unendlich Kleinen nach der Art der
lten durch die Zurückführung auf das Abſurde gerechtfertigt wird (§. 49).

Wenn man die auf ihren Mittelpunkt und auf ihre Axen bezogene Ellipſe
trachtet, deren Gleichung alſo

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

, ſo, wird die Fläche des elliptiſchen Trapezes OpmB (Fig. 77) ausgedrückt
rch:

$$u = \frac{b}{a}\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\cdot dx,$$

ıb hieraus könnte man ſofort, wie es auch in den Elementarwerken über die
egelſchnitte geſchieht, das Verhältniß des elliptiſchen Trapezes OpmB zu dem
reistrapeze OpnC ableiten. Um aber durch Anwendung der gewöhnlichen In-
grationsregeln zu demſelben Reſultate zu gelangen, ſetzt man:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = tx, \quad \text{oder} \quad x^2 = \frac{a^2}{1 + t^2},$$

olglich:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\cdot dx = \int txdx = \frac{1}{2}tx^2 - \frac{1}{2}\int x^2 dt$$

$$= \frac{1}{2}tx^2 - \frac{a^2}{2}\,\text{arc. tang. } t + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{1}{2}a^2\,\text{arc. tang.}\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) + \text{const.},$$

nd folglich:

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\cdot dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc. tang.}\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2\,\text{arc. sin.}\,\frac{x}{a};$$

ſo daß man endlich hat:

$$u = \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{ab}{2}\,\text{arc. sin.}\,\frac{x}{a} = \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2}\,\text{arc. sin.}\,\frac{x}{a}.$$

Hieraus folgt, daß die Fläche des elliptiſchen Quadranten OAmB durch $\frac{\pi ab}{4}$
nd die der ganzen Ellipſe folglich durch πab ausgedrückt wird.

Da $\frac{xy}{2}$ die Fläche des Dreieckes Omp ausdrückt, ſo wird die des ellip-
tiſchen Sectors BOm ausgedrückt durch $\frac{ab}{2}\,\text{sin.}\,\frac{x}{a}$.

§. 339. Wenn man die Gleichung der Hyperbel unter der Form

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

anwendet und zur Erleichterung der Rechnung

$$\sqrt{x^2 - a^2} = tx,$$

ſetzt, ſo hat man:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{4} \log. \left[\frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{x - \sqrt{x^2 - a^2}}\right] + \text{const.}$$

oder was daſſelbe iſt:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log. (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + \text{const.},$$

wenn man das Glied:

$$\frac{a^2}{4} \log. a^2 = \frac{a^2}{4} \log. \left[\frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right] + \frac{a^2}{2} \log. (x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

unter der willkürlichen Conſtante mit verſteht.

Man erhält alſo für den Werth der hyperboliſchen Fläche Apm (Fig. 84):

$$u = \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{ab}{2} \log. \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)$$

$$= \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2} \log. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Folglich iſt:

$$\text{Sector OmA} = \frac{ab}{2} \log. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right),$$

woraus folgt, daß die Fläche zwiſchen der Hyperbel und ihren Aſymptoten unendlich iſt.

Die Fläche der Hyperbel hängt ebenſo von einer logarithmiſchen Function ab, wie die Fläche der Ellipſe von einer Kreisfunction. Die zwiſchen der Ellipſe und Hyperbel ſtattfindende geometriſche Analogie entſpricht der Analogie der trigonometriſchen und der Exponentialfunctionen und ihre inverſen Functionen den Kreisbogen und den Logarithmen.

Da die Gleichung der auf ihre Aſymptoten bezogenen gleichſeitigen Hyperbel:

$$xy = \frac{a^2}{2},$$

iſt, ſo wird die Größe der zwiſchen den Ordinaten, welche den Abſciſſen x_0, x, entſprechen, liegenden aſymptotiſchen Fläche ausgedrückt durch:

$$u = \frac{a^2}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \frac{a^2}{2} \log. \left(\frac{x}{x_0}\right); \qquad (1)$$

und wenn man $a = \sqrt{2}$, $x_0 = 1$ ſetzt, ſo hat man blos $u = \log. x$. Die Neper'ſchen Logarithmen können alſo, als durch die Flächen einer gleichſeitigen Hyperbel ausgedrückt, betrachtet werden, aus welchem Grunde man ſie auch ſeit langer Zeit hyperboliſche Logarithmen genannt hat, welche Benennung aber ganz unſchicklich iſt, weil, wenn man der Conſtante a einen ſchicklichen

ch gibt, die durch die Gleichung (1) beſtimmte Function u ebenſo gut jedes dere Logarithmenſyſtem ausdrückt, und in der That ergeben ſich die Loga-hmen für eine beliebige Baſis bekanntlich aus den Neper'ſchen Logarithmen, nn man dieſe durch einen für jede Baſis conſtanten Modulus multiplicirt §. 64).

Nach §. 99 findet die Gleichung (1) nicht mehr ſtatt, wenn der Werth $=0$, welcher den Coefficienten von dx unter dem Integralzeichen $\int$ unend-h macht, zwiſchen die Integrationsgrenzen fällt, und folglich könnte man ch dieſe Formel nicht die Fläche ausdrücken, welche zwiſchen zwei Ordinaten t entgegengeſetzten Zeichen, die alſo beiden Zweigen der Curve angehören, liegt.

Man kann immer mittelſt Additionen oder Subtractionen geradliniger Po-ione zu oder von der Fläche einer auf ein Syſtem geradliniger, ſchiefer oder htwinkliger Coordinaten bezogenen Curve zu der Fläche dieſer auf ein an-es geradliniges Coordinatenſyſtem bezogenen Curve übergehen, und hierin zt der Grund, daß die logarithmiſche Function, welche ſich bei der Berech-ng der Fläche der auf ihre Aſymptoten bezogenen Hyperbel unmittelbar dar-tet, in Folge der verſchiedenen Transformationen wieder erſcheint, wenn n die Hyperbel auf ihre Axen bezieht.

§. 340. Wenn man die Gleichung der logarithmiſchen Linie auf die Form $=e^x$ bringt, ſo hat man:

$$u=\int_0^x e^x\,dx=e^x-1,$$

lcher Werth ſich für $x=-\infty$ auf -1 reducirt. Folglich hat die zwi-en der Ordinate OB (Fig. 79), zwiſchen der auf der Seite der negativen ciſſen ins Unendliche fortlaufenden Curve BM′ und zwiſchen der ebenfalls Unendliche fortlaufenden Aſymptote OX′ liegende Fläche einen endlichen erth und iſt der Fläche des aus der geraden Linie OB conſtruirten Qua-ates gleich.

Wenn die Cycloide, wie im §. 176, durch das Syſtem der beiden leichungen:

$$x=R(\varphi-\sin.\varphi),\quad y=R(1-\cos.\varphi),$$

sgedrückt wird, ſo hat man:

$$u=\int_0^x y\,dx=R^2\int_0^\varphi(1-\cos.\varphi)^2\,d\varphi$$

$$=R^2(\tfrac{3}{2}\varphi-2\sin.\varphi+\tfrac{1}{4}\sin.2\varphi).$$

lan nimmt $\varphi=2\pi$ zur obern Grenze des Integrales, um die zwiſchen nem einzelnen Cycloidenbogen und der Baſis der Cycloide liegende Fläche zu halten, welche man $=a=3\pi R^2$ findet, d. h. ſie iſt dreimal ſo groß, als e Fläche des erzeugenden Kreiſes. Die vorhergehende Formel erſtreckt ſich ch auf beliebige Werthe von φ und auf die Quadratur von einer beliebigen nzahl von Cycloidenbogen eingeſchloſſener Flächen.

§. 341. Die von einer ebenen Curve eingeſchloſſene Fläche iſt eine von m Coordinatenſyſteme, auf welches man die Curve bezieht, unabhängige röße und dieſe Fläche, welche wir mit U bezeichnen wollen, iſt es gewöhn-h, welche man in dem Probleme der Quadratur beſtimmen will. Wenn die rve eine algebraiſche iſt, ſo gibt ihre Gleichung $F(x,y)=0$ wenigſtens ei derſelben Abſciſſe entſprechende Wurzeln $y=f_1x$, $y=f_2x$, und in die-m Falle hat man:

$$U = \int_{x_0}^{x_1} (f_1 x - f_2 x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f_1 x\,dx - \int_{x_0}^{x_1} f_2 x\,dx:$$

wo $f_1 x$ die Ordinate des Bogens $m_0\, n_1\, m_1$ (Fig. 80), $f_2 x$ die des gens $m_0\, n_0\, m_1$ und x_0, x_1 die Abſciſſen der geraden Linien $m_0\, p_0$ p_1 bezeichnen, welche die Curve parallel zu der Axe der y begrenzen. Bogen $m_0\, n_1\, m_1$, $m_0\, n_0\, m_1$ könnten übrigens verſchiedenen algebrai oder nicht algebraiſchen Curven angehören, und in ihrem Verlaufe Stetig unterbrechungen der zweiten oder einer höhern Ordnung erfahren. Das tegral U würde ſich leicht in eine größere Anzahl einzelner Integrale zer laſſen, wenn die geſchloſſene Curve verſchiedene Biegungen darböte, wie in Fig. 81 angegebenen.

Da das Differenzial der Fläche einer durch Polarcoordinaten ausgeд ten Curve

$$du = \tfrac{1}{2} r^2 d\varphi$$

iſt (§. 180) ſo wird die ganze Fläche der Curve durch die Formel:

$$u = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2 d\varphi$$

ausgedrückt, in welche man für r^2 ſeinen durch die Polargleichung der C gegebenen Werth als Function von φ ſubſtituiren muß. Wenn die Curve geſchloſſene iſt und der Pol oder der Anfangspunkt der Radienvectoren i halb derſelben liegt, ſo daß r^2 für jeden zwiſchen 0 und 2π liegenden W von φ einen einzigen reellen Werth hat, ſo iſt:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi.$$

Wenn die Curve wieder geſchloſſen iſt, und der Pol innerhalb derſ liegt, ſo kann es, wenn ſie Biegungen darbietet, geſchehen, daß r^2 für zwiſchen gewiſſen Grenzen liegenden Werthe von φ, drei, fünf, oder ü haupt eine ungerade Anzahl reeller Werthe hat. Wenn dagegen der außerhalb der von der Curve umſchloſſenen Fläche läge, ſo würde r^2 in eine gerade Anzahl reeller Wurzeln haben, und in allen dieſen Fällen ſich das Integral U in verſchiedene einzelne Integrale zerlegen, wovon j ſeine beſondere Grenzen hat.

II. Rectification der Curven.

§. 342. Das Problem der Rectification der Curven iſt eine wid Anwendung der Integralrechnung, und wir glauben daher, hier etwas t in dieſen Gegenſtand eingehen zu müſſen, als es gewöhnlich geſchieht.

Wenn man die Länge des Bogens einer Curve, deren rechtwin Coordinaten x und fx ſind, mit s bezeichnet, ſo hat man (§. 174):

$$ds = \sqrt{1 + (f'x)^2}\cdot dx$$

und folglich:

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + (f'x)^2}\cdot dx,$$

wo x_0 die Abſciſſe des Punktes der Curve iſt, von welchem aus der Bo gemeſſen wird.

Soll der Coefficient von dx unter dem Integralzeichen $\int$ unendlich w den, ſo iſt erforderlich, aber auch zureichend, daß $f'x$ ebenfalls durch das endliche geht; aber ſelbſt in dieſem Falle wird die Formel (s) nicht illuſor

nn fx einen endlichen Werth behält. Denn es ſei ξ der Werth von x, lcher f'x unendlich macht, ſo behält nach dem im §. 322 Geſagten fx den- ch einen endlichen Werth, wenn das Product $(x-\xi)\,f'x$ gegen einen end- hen Werth oder gegen Null convergirt, während ſich x dem Werthe ξ immer hr und mehr nähert. Dieſe Grenze des Werthes von fx iſt aber keine dere, als die des Productes:

$$(x-\xi)\sqrt{1+(f'x)^2},$$

d folglich bleibt die Formel (s) immer anwendbar, wenn die Ordinate der rve einen endlichen Werth behält, obgleich die Tangente derſelben auf der e der x ſenkrecht wird.

Dieſe Formel würde unbrauchbar werden, aber auf eine andere Weiſe, nn fx und f'x für gewiſſe Werthe von x imaginär würden, und die Wur- größe $\sqrt{1+(f'x)^2}$ dennoch reell bliebe. Wenn man z. B.

$$f'x=\sqrt{x^2-1}$$

er (§. 339):

$$fx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\log.(x+\sqrt{x^2-1})+\text{const.}$$

tte, ſo gäbe die Formel (s):

$$s=\int_{x_0}^{x}x\,dx=\frac{1}{2}(x^2-x_0^2)$$

d der Werth von s würde ſogar für kleinere Zahlenwerthe von x als die nheit, welche f'x und fx imaginär machen, reell bleiben.

§. 343. Die Wurzelgröße:

$$\sqrt{1+(f'x)^2}=R$$

ß im Allgemeinen innerhalb der ganzen Ausdehnung der Integration mit mſelben Zeichen genommen werden, damit der Werth des Bogens poſitiv iſt, nn ſeine Endpunkte jenſeits des zum Anfangspunkte der Bogen genommenen nktes liegen und negativ, wenn dieſe Endpunkte des Bogens dieſſeits dieſes nfangspunktes liegen, oder umgekehrt. Wenn alſo das Integral unter end- her Form erhalten werden kann, ſo muß die wieder darin erſcheinende Wur- größe R nicht als mit dem doppelten Zeichen behaftet betrachtet werden (§. 299), gegen die etwa in $(f'x)^2$ vorkommenden Wurzelgrößen, welche von den viel- chen Zweigen der Curve herrühren, in dem Integrale das doppelte Zeichen ben müſſen, damit der Ausdruck für den Bogen der Curve ſeine ganze All- meinheit behält und nicht blos auf einen, ſondern auf alle Zweige der Curve wendbar iſt.

Wenn die Curve in Beziehung auf eine zu der Axe der x parallele gerade nie zwei ſymmetriſche Zweige hätte, ſo hätte f'x zwar zwei gleiche und ent- gengeſetzte Zahlenwerthe; aber das Quadrat $(f'x)^2$, welches in dem Inte- rale (s) vorkommt, würde nur einen einzigen Werth haben. Wenn ſich in eſem Falle die beiden Curvenzweige in einem zum Anfangspunkte der Bogen nommenen Punkte m_0 (Fig. 82) vereinigten, ſo müßte die Wurzelgröße R it dem doppelten Zeichen genommen werden, damit derſelben Abſciſſe $Op=x$ ei Bogen $m_0\,m$, $m_0\,m^1$, wovon der eine poſitiv und der andere negativ , entſprechen könnten.

Wenn dagegen die beiden im Punkte m_0 (Fig. 83) zuſammenſtoßenden rvenzweige nicht in Beziehung auf eine zu der Axe der x parallele gerade nie ſymmetriſch wären, ſo würde die Größe $(f'x)^2$ eine Wurzelgröße ρ ent-

halten, und man müßte alsdann in dem Integrale das Zeichen + der Wurzelgröße R mit dem, dem Curvenzweige m_0 m entſprechenden Zeichen der Wurzelgröße ϱ, dagegen das Zeichen — der Wurzelgröße R mit dem, dem Curvenzweige m_0 m^1 entſprechenden Zeichen der Wurzelgröße ϱ verbinden, und alle übrigen Verbindungen zwiſchen den Zeichen dieſer Wurzelgrößen müßten als unzuläſſig verworfen werden.

Man ſieht alſo, daß man, um die analytiſchen Formeln den Formen der zu rectificirenden Curven entſprechend zu machen, dieſen Formeln bald alle algebraiſche Ausdehnung, welche ſie nur geſtatten, geben, und bald dieſe algebraiſche Allgemeinheit beſchränken muß.

§. 344. Wir wollen zunächſt die Rectificationsformel auf die gewöhnliche Parabel anwenden, deren Gleichung wir auf folgende Form bringen wollen:

$$y = \frac{m}{2} \cdot x^2.$$

Nimmt man den Anfangspunkt der Bogen im Scheitel der Parabel an, ſo hat man:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + m^2 x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1 + m^2 x^2} + \frac{1}{2m} \log. (mx + \sqrt{1 + m^2 x^2}). \quad (2)$$

Es iſt leicht einzuſehen, daß dieſer Ausdruck denſelben Zahlenwerth erhält, aber das Zeichen verändert, wenn man x in — x verwandelt, was auch mit der Lage der Parabel gegen die Axen übereinſtimmt. Uebrigens kann man die Wurzelgröße $\sqrt{1 + m^2 x^2}$ nicht negativ nehmen, weil man ſonſt einen imaginären Logarithmus erhalten würde.

Wir wollen nun die Neil'ſche Parabel (§. 197) betrachten, ihrer Gleichung die Form:

$$my^2 = x^3$$

geben und den Anfangspunkt der Coordinaten, welcher ein Wendepunkt der erſten Art iſt, zum Anfangspunkte der Bogen nehmen (Fig. 53); ſo gibt die Formel (s):

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{9}{4} \cdot \frac{x}{m}} \cdot dx = \frac{8}{27} \cdot m \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot \frac{x}{m}\right)^3} - 1 \right]. \quad (3)$$

Dieſe Formel gehört unter den im §. 342 angeführten Ausnahmefall und müßte für s imaginäre Werthe geben, ſobald x negative Werthe annähme, während ſie einen reellen Werth für s gibt, ſo lange x zwiſchen den Grenzen 0 und $-\frac{4}{9}$ m liegt.

Bekanntlich iſt die Neil'ſche Parabel die Evolute einer gewöhnlichen Parabel (§. 197) und aus der Theorie der Evoluten ebener Curven folgt, daß ſich der Unterſchied der Krümmungshalbmeſſer einer algebraiſchen Curve für zwei verſchiedene Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1) derſelben, oder was daſſelbe iſt, daß ſich die Länge des Bogens der Evolute dieſer Curve zwiſchen den Punkten (ξ_0, η_0), (ξ_1, η_1), welches die den Punkten (x_0, y_0), (x_1, y_1) entſprechenden Krümmungsmittelpunkte der Evolvente ſind, immer algebraiſch ausdrücken läßt. Andererſeits können die Coordinaten ξ_0, η_0; ξ_1, η_1 immer durch die Coordinaten x_0, y_0; x_1, y_1 algebraiſch ausgedrückt werden, und

umgekehrt. Folglich müſſen alle Curven, welche Evoluten algebraiſcher Curven ſind, wie die Neil'ſche Parabel, rectificabel ſein, d. h. die Länge ihres Bogens muß ſich durch eine algebraiſche Function der Coordinaten ſeiner Endpunkte ausdrücken laſſen.

Der Theil der Axe der x, deſſen Endpunkte, die Abſciſſen $x = 0$, $x = -\frac{4}{9}m$ haben und in deſſen Ausdehnung die Formel (3) unbrauchbar wird, iſt der Krümmungshalbmeſſer des Scheitels der paraboliſchen Evolvente.

§. 345. Alles im letzten Kapitel über die Eigenſchaften der elliptiſchen Function der zweiten Art Geſagte läßt ſich unmittelbar auf die Vergleichung elliptiſcher Bogen anwenden. So drückt z. B. die Gleichung (12) im §. 334 eine lineare Relation zwiſchen den Längen dreier auf derſelben Ellipſe genommener Bogen, deren Amplituden die drei Seiten eines gewiſſen ſphäriſchen Dreieckes meſſen, aus, und vermöge der Formel (21) wird die Rectification einer beliebigen Ellipſe auf die einer ſehr excentriſchen Ellipſe, deren Bogen faſt mit Theilen der geraden Linie zuſammenfallen, oder umgekehrt auf die Rectification einer ſehr wenig excentriſchen Ellipſe, deren Bogen faſt mit denen des Kreiſes zuſammenfallen, zurückgeführt.

Die Gleichung der auf ihren Mittelpunkt und ihre Axen bezogenen Hyperbel iſt:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

und wenn man

$$\frac{a^2}{a^2 + b^2} = c^2, \quad x = \frac{a}{\sin.\varphi}$$

ſetzt, ſo wird die Länge des von dem Scheitel eines Zweiges der Curve aus gezählten Bogens derſelben ausgedrückt durch:

$$s = \frac{1}{c}\int_a^x \sqrt{\frac{x^2 - a^2c^2}{x^2 - a^2}} \cdot dx = -\frac{a}{c}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \sqrt{1 - c^2\sin.^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\sin.^2\varphi}.$$

Aber die theilweiſe Integration gibt:

$$\int \sqrt{1 - c^2\sin.^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\sin.^2\varphi} = -\cot.\varphi \cdot \sqrt{1 - c^2.\sin.^2\varphi} - c^2\int \frac{\cos.^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin.^2\varphi}}$$

und andererſeits hat man:

$$\frac{\cos.^2\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin.^2\varphi}} = \frac{1}{c^2} \cdot \sqrt{1 - c^2\sin.^2\varphi} - \frac{1 - c^2}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - c^2\sin.^2\varphi}};$$

folglich:

$$s = \frac{a}{c}\left[\cot.\varphi \cdot \sqrt{1 - c^2\sin.^2\varphi} + E(c,\varphi) - E(c) - (1 - c^2)[F(c,\varphi) - F(c)]\right];$$

ſo daß der Bogen der Hyperbel durch zwei elliptiſche Functionen der erſten und zweiten Art ausgedrückt wird.

Vermittelſt der Gleichungen (17) und (18) im §. 335 kann man die Functionen $F(c,\varphi)$, $F(c)$ fortſchaffen, wodurch man erhält:

$$\frac{cs}{a} = \cot.\varphi \cdot \sqrt{1 - c^2\sin.^2\varphi} - 2c\sin.\varphi + E(c) - E(c,\varphi)$$
$$+ 2(1 + c)E(c_1,\varphi_1) - (1 + c)E(c_1).$$

Die Rectification der Hyperbel iſt alſo auf die zweier Ellipſen von verſchiedenen Excentricitäten zurückgeführt, welcher Lehrſatz von Landen entdeckt iſt.

Um zu finden, was in dieſem Falle die Amplitude φ bedeutet, wollen wir aus dem Punkte O als Mittelpunkt mit der Halbare OA (Fig. 84) als Halbmeſſer einen Kreis beſchreiben, von dem der Abſciſſe x entſprechenden Punkte m die Ordinate mp fällen und durch den Fußpunkt p derſelben eine gerade Linie ziehen, welche den Kreis in t berührt; ſo iſt:

$$x = \frac{a}{\cos. tOp} = \frac{a}{\sin. BOt},$$

und folglich Winkel $BOt = \varphi$.

Wenn man die Ordinate pm bis zum Durchſchneiden der Aſymptote in n verlängert und die Länge $On = r$ ſetzt, ſo iſt:

$$r = \sqrt{x^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2} = \frac{x}{c} = \frac{a}{c \sin. \varphi},$$

folglich:

$$\frac{c}{a}(r - s) = \frac{1 - \cos. \varphi \sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}}{\sin. \varphi} + 2c \sin. \varphi - E(c) + E(c,\varphi)$$
$$- 2(1 + c) E(c_1,\varphi_1) + (1 + c) E(c_1).$$

Wenn man in dieſem Ausdrucke $\varphi = 0$ ſetzt, welches $x = 0$ entſpricht, ſo hat man:

$$\sin. \varphi = 0, \quad E(c,\varphi) = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad E(c_1,\varphi_1) = 0,$$

während das Glied:

$$\frac{1 - \cos. \varphi \sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}}{\sin. \varphi}$$

unter der Form $\frac{0}{0}$ erſcheint, und ſich nach der bekannten Regel auf Null reducirt. Man hat alſo in dieſem Falle:

$$\frac{c}{a}(r - s) = (1 + c) E(c_1) - E(c),$$

d. h., wenn die Länge Am, On ohne Ende zunehmen, ſo convergirt die Differenz On — Am gegen die Grenze:

$$\frac{a}{c}[(1 + c) E(c_1) - E(c)].$$

§. 346. Im §. 180 haben wir für das Differenzial des Bogens einer ebenen Curve, in Polarcoordinaten ausgedrückt, gefunden:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2},$$

und hieraus folgt:

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{f\varphi} \cdot d\varphi, \quad \text{oder} \quad s = \int_{r_0}^{r} \sqrt{fr} \cdot dr,$$

je nachdem man die Veränderliche r oder die Veränderliche φ vermittelſt der Polargleichung der Curve eliminiren will.

So verwandelt ſich z. B. die Gleichung der Lemniscate:

$$y^2 = \frac{x^2}{a^2}(a^2 - x^2), \quad (\text{§. 213})$$

ch Polarcoordinaten ausgedrückt, in:

$$r^2 = a^2(\cos.^2\varphi - \sin.^2\varphi),$$

o wenn man den Punkt A (Fig. 60), wo die Lemniscate die Axe der x neidet, zum Anfangspunkte der Bogen nimmt, ſo hat man:

$$\frac{s}{a} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos.^2\varphi - \sin.^2\varphi}}. \qquad (4)$$

etzt man:

$$\sin.\varphi = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \cdot \sin.\psi,$$

verwandelt ſich dieſer Ausdruck in:

$$\frac{s}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin.^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \psi\right). \qquad (5)$$

Die Eigenſchaften der elliptiſchen Function der erſten Art laſſen ſich alſo Eigenſchaften der Lemniscate umſetzen, welche in dieſer Beziehung ſehr erkwürdige Analogieen mit dem Kreiſe darbietet. Fagnani iſt der erſte, elcher die Lemniscate in dieſer Beziehung unterſucht hat, und ſeine Unterchungen bilden den Anfang der Theorie der elliptiſchen Functionen.

Es iſt zu bemerken, daß die Gleichungen (4) oder (5) die Werthe von s r für die zwiſchen $-\frac{1}{4}\pi$ und $\frac{1}{4}\pi$ liegenden Werthe von φ, oder für die iſchen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ liegenden Werthe von ψ geben, ſo daß ſie ſich icht über den Inflexionspunkt der Lemniscate erſtrecken.

§. 347. Da die Differenzialgleichung der Cycloide:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2Ry - y^2}}{y}$$

t (§. 177), ſo hat man, wenn die Bogen vom Anfangspunkte der Coornaten aus gezählt werden:

$$s = \sqrt{2R} \cdot \int_0^{y} \frac{dy}{\sqrt{2R - y}} = 4R - 2\sqrt{2R} \cdot \sqrt{2R - y}.$$

Dieſer Ausdruck von s durch y wird offenbar für negative Werthe von y ubrauchbar, weil die durch die Formel gegebenen zugehörigen Werthe von s ell und negativ würden, obgleich ſich die Curve durchaus nicht auf die Seite r negativen y erſtreckt. Die letzte Formel gibt den Werth von s auch nur r einen einzigen Cycloidenbogen und hat folglich nicht die der geometriſchen eſchreibung der Curve entſprechende Allgemeinheit. Man muß ſogar, um die ormel auf einen ganzen Cycloidenbogen zu erſtrecken, die in dem Werthe von vorkommende Wurzelgröße ſucceſſive mit verſchiedenen Zeichen nehmen, und le dieſe Anomalien erklären ſich nach den weiter oben (§. 342 und 343) geachten Bemerkungen.

Wenn man $y = 2R$ nimmt, ſo erhält man die Länge eines halben ycloidenbogens $s = 4R$, was mit dem bei der Beſtimmung der Evolute der ycloide erhaltenen Reſultate übereinſtimmt (§. 198).

Der Ausdruck für die Länge des Cycloidenbogens nimmt eine ſehr einche Form an, wenn der Scheitel Q (Fig. 42) eines Cycloidenbogens zum nfangspunkte der Bogen, ſowie auch zum Anfangspunkte der von Q nach S ezählten Ordinaten y genommen wird, ſo d. h., wenn man $4R - s$ für s und $R - y$ ſtatt y ſetzt, wodurch man den Werth:

$$s = 2\sqrt{2Ry}$$

erhält, welchen man wegen der Symmetrie der Curve in Beziehung auf die gerade Linie QS mit dem doppelten Zeichen nehmen muß.

Der Bogen der logarithmiſchen Spirale, deren Polargleichung $r = e^{m\varphi}$ iſt (§. 181), wird durch die Formel:

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{1+m^2} \cdot e^{m\varphi} d\varphi = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} (e^{m\varphi} - e^{m\varphi_0}) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} \cdot (r - r_0)$$

ausgedrückt, welche eine ſehr einfache Folge von der charakteriſtiſchen Eigenſchaft dieſer Spirale iſt, daß ſie alle Radienvectoren unter einem conſtanten Winkel durchſchneidet, deſſen Coſinus $= \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ iſt.

§. 348. Es ſeien $y = fx$, $z = fx$, die Gleichungen einer Curve im Raume, und x_0 ſei die Abſciſſe des Punktes der Curve, welcher zum Anfangspunkte der Bogen genommen wird, ſo hat man (§. 223):

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + (f'x)^2 + (f'x)^2} \cdot dx. \qquad (S)$$

Es iſt klar, daß die Wurzelgröße nicht blos in dem Falle, wo $f'x$ und $f'x$ imaginär, aber ihre Quadrate reell ſind, ſondern auch in dem Falle, wo die imaginären Theile von $(f'x)^2$, $(f'x)^2$, abgeſehen vom Zeichen, einander gleich ſind, reell bleiben kann. Alsdann wird die Formel für die Rectification der Curven von doppelter Krümmung ebenſowohl unbrauchbar, als die Formel für die Rectification ebener Curven.

Um von der Formel (S) eine Anwendung zu geben, wollen wir die Schraubenlinie nehmen, welche nach §. 234 durch das Syſtem der drei Gleichungen:

$$x = R \cos. \varphi, \quad y = R \sin. \varphi, \quad z = aR\varphi,$$

ausgedrückt wird, woraus folgt:

$$dx = -R \sin. \varphi d\varphi, \quad dy = R \cos. \varphi d\varphi, \quad dz = aR d\varphi,$$

und folglich iſt:

$$f'x = \frac{dy}{dx} = -\cot. \varphi, \quad f'x = \frac{dz}{dx} = -\frac{a}{\sin. \varphi};$$

$$s = R\sqrt{1+a^2} \cdot \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = R\sqrt{1+a^2} \cdot (\varphi - \varphi_0).$$

Denſelben Ausdruck hätte man auch direct erhalten können, wenn man erwägt, daß ſich die Schraubenlinie in eine gerade Linie verwandelt, wenn man die cylindriſche Fläche, in welcher ſie ſich befindet, abwickelt.

III. Cubatur der Rotationskörper.

§. 349. Die Beſtimmung des Volumens eines Rotationskörpers läßt ſich leicht auf die Quadraturen oder auf die Integration der Differenzialfunctionen mit einer einzigen veränderlichen Größe zurückführen; denn wenn man die Rotationsaxe für die der x nimmt und $y = fx$ die Ordinate der Meridiancurve, v das Volumen einer Schicht des Körpers, welche zwiſchen zwei auf der Rotationsaxe ſenkrechten Ebenen liegt, deren Abſciſſen reſp. die Conſtante x_0 und die Veränderliche x ſind, bezeichnet; ſo liegt das Increment Δv zwiſchen den

Cylinder, deſſen Volumen $= \pi y^2 \Delta x$, und zwiſchen dem Cylinder, deſſen Volumen $= \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x$ iſt, wenigſtens wenn man Δx ſo klein nimmt, daß die Ordinate y in dem Intervalle Δx beſtändig zu- oder beſtändig abnimmt. Nun iſt aber:

$$\lim. \frac{\pi y^2 \Delta x}{\pi (y + \Delta y)^2 \Delta x} = 1;$$

folglich:

$$\lim. \frac{\Delta v}{\pi y^2 \Delta x} = 1, \quad \text{oder} \quad dv = \pi y^2 dx,$$

und mithin:

$$v = \pi \int_{x_0}^{x} (fx)^2 dx.$$

Die letzte Formel wird bei geometriſchen Anwendungen unbrauchbar, wenn $(fx)^2$ eine reelle Größe bleibt, wenngleich fx einen imaginären Werth annimmt.

Die Meridiancurve ſei die Ellipſe:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2),$$

und wir wollen $x_0 = 0$ ſetzen, ſo erhalten wir den Ausdruck:

$$v = \pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^x (a^2 - x^2) dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right),$$

welcher für beliebige Werthe von x reell und für kleinere Werthe von x, als $a\sqrt{3}$, poſitiv bleibt, während ſich die Meridiancurve nicht über die Abſciſſe a hinauserſtreckt. Die Formel gibt das Volumen des ganzen Rotationsellipſoides $= \frac{4}{3} \pi a b^2$.

Wir wollen nun noch das Volumen des ringförmigen Körpers zu beſtimmen ſuchen, welcher durch die Umdrehung des Kreiſes MNM'N' (Fig. 73) um die in der Ebene dieſes Kreiſes gezogene und zur Axe der x genommene gerade Linie PP' beſchrieben wird. Die Axe der y legen wir durch den Mittelpunkt des Kreiſes von dem Halbmeſſer r, indem die Ordinate des Mittelpunktes durch R bezeichnet wird, ſo daß:

$$y_1 = R + \sqrt{r^2 - x^2},$$

$$y_2 = R - \sqrt{r^2 - x^2},$$

die Ordinaten der Halbkreiſe MNM', MN'M' ſind, und alsdann wird das Volumen des Ringes ausgedrückt durch:

$$v = \pi \int_{-r}^{r} (y_1^2 - y_2^2) dx = 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx.$$

Aber nach §. 338 iſt:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{1}{2} x \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{2} r^2 \cdot \text{arc. sin.} \frac{x}{r} + \text{const.};$$

folglich:

$$v = 2\pi^2 r^2 R.$$

IV. Quadratur der Rotationsoberflächen.

§. 350. Wenn man in den Meridiandurchschnitt einer Rotationsoberfläche ein Vieleck beschreibt und sich dasselbe mit der umschriebenen Curve um die Rotationsaxe drehen läßt, so beschreibt jede Vieleckseite die abwickelbare Fläche eines abgestumpften Kegels. Nun versteht man aber unter dem Flächeninhalt einer Rotationsfläche die Gränze, welcher sich die Summe dieser Kegelflächen ohne Ende nähert, wenn die Seiten des eben erwähnten Vieleckes ohne Ende abnehmen, oder wenn sich das in die Meridiancurve beschriebene Vieleck dieser Curve immer mehr und mehr nähert und zuletzt damit zusammenfällt. Diese Definition ist der analog, welche wir im §. 174 von der Länge krummer Linien gegeben haben, und wir werden in dem folgenden Kapitel, wo von der Bestimmung des Flächeninhaltes beliebiger krummer Flächen die Rede sein wird, wieder auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Wenn wir alle Bezeichnungen im vorhergehenden §. beibehalten und mit u den Flächeninhalt des Theiles der Rotationsfläche bezeichnen, welcher zwischen den beiden auf der Axe der x senkrechten Ebenen liegt, so wird der Flächeninhalt der Kegelfläche, welche durch die die beiden Punkte (x,y), $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ verbindende Seite des eingeschriebenen Vieleckes erzeugt wird, ausgedrückt durch:

$$\pi(2y+\Delta y)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

und die Grenze ihres Verhältnisses zu dem Increments Δx ist:

$$=2\pi y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Nach der Definition der Größe u hat man also:

$$\frac{du}{dx}=2\pi y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}},$$

woraus folgt:

$$u=2\pi\int_{x_0}^{x} fx\cdot\sqrt{1+(f'x)^2}\cdot dx.$$

Diese Formel kann bei geometrischen Anwendungen für gewisse Werthe von x unbrauchbar werden, wenn die Function unter dem Integralzeichen $\int$ reell bleibt, während fx imaginäre Werthe annimmt.

Wenden wir diese Formel auf das weiter oben betrachtete Rotationsellipsoid an, so haben wir:

$$u=2\pi\frac{b}{a}\cdot\int_0^x\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}\cdot dx.$$

Wir wollen zuvörderst das Ellipsoid länglich oder $a>b$ annehmen und $\frac{a^2-b^2}{a^2}=c^2$ setzen, so kommt:

$$u=\pi b\left(x\sqrt{1-\frac{c^2x^2}{a^2}}+\frac{a}{c}\cdot\text{arc. sin.}\frac{cx}{a}\right).$$

Man könnte der Veränderlichen x Werthe beilegen, welche größer als a und kleiner als $\frac{a}{c}$ sind, ohne daß der Ausdruck von u aufhörte, reell zu sein;

lein man würde alsdann die Grenzen der geometriſchen Bedingungen der ufgabe überſchreiten. Die vorhergehende Formel gibt für die ganze Oberäche des länglichen Ellipſoides:

$$2\pi(b^2 + \frac{ab}{c} \text{ arc. sin. } c).$$

Wenn $c = 0$ iſt, ſo hat man $a = b$, $\frac{\text{arc. sin. } c}{c} = 1$, und man erhält den bekannten Ausdruck für die Kugeloberfläche wieder.

Wir wollen zweitens das Ellipſoid abgeplattet oder $a < b$ annehmen und $\frac{b^2 - a^2}{b^2} = c^2$ ſetzen, ſo erhalten wir den Ausdruck:

$$s = \pi b\left[x\sqrt{1 + \frac{b^2c^2x^2}{a^4}} + \frac{a^2}{bc}\log.\left(\frac{bcx}{a^2} + \sqrt{1 + \frac{b^2c^2x^2}{a^4}}\right)\right],$$

welcher für beliebige Werthe von x reell bleibt, und woraus ſich die ganze Oberfläche des abgeplatteten Ellipſoides

$$2\pi\left[b^2 + \frac{a^2}{2c}\log.\left(\frac{1+c}{1-c}\right)\right]$$

ergibt. Wenn $c = 0$ iſt, ſo findet man, daß der Ausdruck:

$$\frac{\log.\left(\frac{1+c}{1-c}\right)}{c} = 2$$

iſt, und man kommt auf dieſe Weiſe wieder auf den bekannten Ausdruck für die Kugeloberfläche.

Die durch die Umdrehung des Kreiſes MNM'N' (Fig. 73) erzeugte ringförmige Fläche wird ausgedrückt durch:

$$2\pi\int_{-r}^{r}\left[y_1\sqrt{1 + \frac{dy_1^2}{dx^2}} + y_2\sqrt{1 + \frac{dy_2^2}{dx^2}}\right]dx$$

$$= 4\pi rR\int_{-r}^{r}\frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4\pi^2 rR,$$

d. h. durch das Product der beiden Kreisumfänge, deren Halbmeſſer r und R ſind.

Sechstes Kapitel.

Vielfache beſtimmte Integrale. — Geometriſche und phyſikaliſche Anwendungen derſelben. —

§. 351. Es ſei f (x,y) eine Function mit zwei unabhängigen Veränderlichen x,y, welche nach der Vorausſetzung innerhalb der Grenzen x_0, X; y_0, Y immer endliche Werthe behält; ſo kann man zunächſt die Summe der un-

endlich kleinen Werthe von $f(x,y)\,dy$ zwiſchen den Grenzen y_0, y nehmen, und dieſe Summe oder das beſtimmte Integral:

$$\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy$$

iſt alsdann eine gewiſſe Function von x. Wenn man hierauf die Summe der unendlich kleinen Werthe von:

$$\left(\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\right)dx$$

zwiſchen den Grenzen x_0, x, oder das doppelte beſtimmte Integral:

$$\int_{x_0}^{x}\left(\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

oder, indem man der Kürze wegen die Klammern wegläßt:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx, \qquad (a)$$

nimmt, ſo iſt dieſe Summe offenbar die Summe aller unendlich kleinen Werthe der zweiten Ordnung, welche die Function:

$$f(x,y)\,dy\,dx$$

annimmt, wenn man darin x ſich zwiſchen den Grenzen x_0, x nach unendlich kleinen Incrementen dx, und y zwiſchen den Grenzen y_0, y ſich nach unendlich kleinen Incrementen dy ändern läßt.

Mit andern Worten, wenn man das Intervall $x - x_0$ in m gleiche Theile Δx, und das Intervall $y - y_0$ in n gleiche Theile Δy theilt und die Summe aller Werthe der Function:

$$f(x,y)\,\Delta y\,\Delta x \qquad (b)$$

nimmt, indem man alle Werthe von x in der Reihe:

$$x_0,\ x_0 + \Delta x,\ x_0 + 2\Delta x, \ldots x_0 + (m-1)\,\Delta x$$

mit allen Werthen von y in der Reihe:

$$y_0,\ y_0 + \Delta y,\ y_0 + 2\Delta y, \ldots y_0 + (n-1)\,\Delta y$$

verbindet; ſo convergirt dieſe Summe deſto mehr gegen eine gewiſſe Grenze, welche der genaue Werth des doppelten Integrales (a) iſt, je größer die Zahlen m und n, oder je kleiner die Differenzen Δx, Δy genommen werden.

Hieraus folgt, daß die Ordnung der Integrationen auf den Werth des doppelten Integrales keinen Einfluß hat und daß man folglich ohne Unterſchied

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx, \quad \text{oder} \quad \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx\,dy$$

ſchreiben kann.

§. 352. Wenn man die Fläche conſtruirt, deren rechtwinklige Coordinaten x, y und $z = f(x,y)$ ſind; ſo drückt die Größe (b) das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipedums aus, welches das Product $\Delta x \cdot \Delta y$ zur Grundfläche und die Ordinate z zur Höhe hat. Die Durchſchnittslinie der Seitenflächen dieſes Parallelepipedums mit der krummen Oberfläche bilden ein krummliniges Viereck, deſſen Projection auf die Ebene der xy das Rechteck $\Delta x \cdot \Delta y$ iſt. Das Volumen zwiſchen dieſen Seitenflächen, der Grundfläche des Parallelepipedums (b) und der Fläche $z = f(x,y)$ iſt von dem Volumen des Parallelepipedums (b) nur um ein gewiſſes Volumen (β), kleiner als

$\Delta x \cdot \Delta y \cdot (\Delta z)$ verſchieden, wo (Δz) den Unterſchied der äußerſten Werthe bezeichnet, welche die Ordinate z für die Punkte der krummen Oberfläche annimmt, die ſich auf der Ebene der xy in das Innere oder auf den Umfang des Rechteckes $\Delta x \Delta y$ projiciren. Wenn die Function z keine Unterbrechung der Stetigkeit von der erſten Ordnung erfährt; ſo iſt (Δz) eine Größe von derſelben Größenordnung als Δx, Δy. Wenn alſo Δx, Δy ſehr kleine Größen der erſten Ordnung ſind, in welchem Falle das Volumen des Parallelepipedums (b) eine ſehr kleine Größe der zweiten Ordnung iſt; ſo reducirt ſich das Volumen (β) auf eine ſehr kleine Größe der dritten Ordnung. Das Integral (a), welches die Grenze iſt, gegen welche die Summe der Größen (b) ohne Ende convergirt, wenn die Dimenſionen Δx, Δy ohne Ende abnehmen, iſt alſo das Maß des Volumens, welches von der Ebene der xy, von der krummen Fläche und von vier Ebenen begrenzt wird, wovon zwei in den Entfernungen y_0, y zu der Ebene der xz parallel gelegt ſind.

Der Quotient:

$$\frac{\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dx\,dy}{\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} dy\,dx} = \frac{\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx}{(x-x_0)(y-y_0)}$$

drückt auch das Mittel aus allen unendlich vielen Werthen aus, welche die Höhe z, oder allgemeiner, die Function $f(x,y)$, welche irgend eine geometriſche oder phyſicaliſche Bedeutung haben kann (§. 33) für alle Punkte der Ebene der xy annimmt, welche innerhalb des Rechteckes liegen, welches durch den Durchſchnitt dieſer Ebene mit den vier oben erwähnten ſenkrechten Ebenen gebildet wird.

§. 353. Wenn man die in dem Ausdrucke (a) angedeuteten beiden Integrationen verrichtet hat, ſo iſt das erhaltene Reſultat eine Function der obern Grenzen x, y, welches wir mit $F(x,y)$ bezeichnen wollen, ſo daß nach der Definition:

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = \int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy, \quad \frac{dF(x,y)}{dy} = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx,$$

$$\frac{d^2F(x,y)}{dx\,dy} = \frac{d^2F(x,y)}{dy\,dx} = f(x,y) \qquad (c)$$

iſt.

Wenn man durch irgend welches Mittel eine Function $F(x,y)$ finden könnte, welche der Gleichung (c) genügte, ſo würde, wenn die Function $f(x,y)$ gegeben iſt, jede andere Function von der Form:

$$F(x,y) + \varphi x + \psi y, \qquad (c_1)$$

wo φ, ψ ganz willkürliche Functionen bezeichnen, der Gleichung (c) ebenfalls Genüge leiſten. Denn wenn man von der Function (c_1) die partielle Ableitung in Beziehung auf x nimmt, ſo verſchwindet die Function ψy, und wenn man hierauf von der Function:

$$\frac{dF(x,y)}{dx} + \frac{d\varphi x}{dx}$$

die partielle Ableitung in Beziehung auf y nimmt, ſo verſchwindet die Function $\frac{d\varphi x}{dx}$, und das Reſultat würde ganz daſſelbe ſein, wenn man die beiden Differenziationen in umgekehrter Ordnung verrichtete.

Um eine Function $F(x,y)$ zu finden, welche der Gleichung (c) Genüge leiſtet, braucht man zuvörderſt nur das unbeſtimmte Integral:

$$\int f(x,y)\,dy$$

zu nehmen, indem man x als eine Conſtante betrachtet, und nachdem man das erhaltene Reſultat mit dx multiplicirt hat, wieder das unbeſtimmte Integral von dieſer Differenzialfunction zu nehmen, indem man bei der zweiten Integration x als veränderlich, und y als conſtant betrachtet. Man deutet dieſe doppelte Operation durch:

$$\iint f(x,y)\,dy\,dx \qquad (d)$$

an, und wenn man die unbeſtimmten Integrationen in einer umgekehrten Ordnung vornähme, wie es der Ausdruck:

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy$$

andeutet, ſo könnte ſich die erhaltene Function $F_1(x,y)$ von der im erſten Falle erhaltenen Function $F(x,y)$ nur durch das Hinzukommen der Glieder von der Form:

$$\varphi x + \psi y + \text{const.},$$

welche durch zwei partielle Differenziationen, die eine in Beziehung auf x und die andere in Beziehung auf y verſchwinden, unterſcheiden. Der Ausdruck (d) iſt der eines doppelten unbeſtimmten Integrales.

§. 354. Kommen wir nun wieder auf die beſtimmten Integrationen zurück, welche den ſpeciellen Gegenſtand dieſes Kapitels bilden. Statt das Integral:

$$\int f(x,y)\,dy$$

zwiſchen Grenzen y_0, y_1 zu nehmen, welche ſich nicht mit x ändern, könnte man es zwiſchen veränderlichen Grenzen $\varphi_0 x$, $\varphi_1 x$ nehmen, und alsdann wäre das beſtimmte Integral:

$$\int_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} f(xy)\,dy$$

ebenfalls noch eine Function, worin die Veränderliche x allein vorkäme. Wenn man in Beziehung auf x zwiſchen den Grenzen x_0, x_1 ein zweites Mal integrirte, ſo erhielte man das doppelte beſtimmte Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} f(x,y)\,dy\,dx = V,$$

und um ſich von dem Reſultate dieſer Operation einen klaren Begriff zu bilden, kann man ſich vorſtellen, daß die Grenzwerthe x_0, x_1 durch die Abſciſſen Op_0, Op_1 (Fig. 80), die Functionen $\varphi_0 x$, $\varphi_1 x$ durch die Ordinaten der Linien $m_0 n_0 m_1$, $m_0 n_1 m_1$ oder ihrer Theile, und endlich die Function $f(x,y) = z$ durch die auf der Ebene der xy ſenkrechte Ordinate einer krummen Oberfläche dargeſtellt werden; ſo drückt nach dem im vorletzten §. Geſagten das Integral V das Volumen aus, welches von der Ebene der xy, von der krummen Fläche, deren Ordinate z iſt, und endlich von einer cylindriſchen Fläche, deren Normaldurchſchnitt der Umfang $m_0 n_0 m_1 n_1$ iſt, eingeſchloſſen wird.

Allgemeiner, wenn A die von dieſem Umfange eingeſchloſſene Fläche bezeichnet, ſo drückt das Verhältniß $\frac{V}{A}$ das Mittel aus allen unendlich vielen Werthen aus, welches die Function $f(x,y)$, die eine beliebige geometriſche oder

yſikaliſche Bedeutung haben kann, für alle Punkte (x,y), welche in dem von ſem Umfange eingeſchloſſenen Raume liegen, annimmt.

Uebrigens kann das Integral V reell ſein, obgleich die Function f(x,y) aginäre Werthe annimmt, oder ſelbſt innerhalb der Integrationsgrenzen beindig imaginär bleibt, und alsdann hat dieſes Integral keine geometriſche er phyſikaliſche Bedeutung mehr.

Zu der Axe der x wollen wir die geraden Linier $n_0 q_0$, $n_1 q_1$, parallel hen, welche den Umfang begrenzen und mit y_0, y_1 die Ordinaten Oq_0, Oq_1, wie durch $\psi_0 y$, $\psi_1 y$ die Werthe der Abſciſſe x als Function von y für e Linienſtücke $n_0 m_0 n_1$, $n_0 m_1 n_1$ bezeichnen; ſo haben wir offenbar:

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{\psi_0 y}^{\psi_1 y} f(x,y)\,dxdy = \int_{x_0}^{x_1}\int_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} f(x,y)\,dydx = V.$$

§. 355. Wenn die Function f(x,y) innerhalb der doppelten Integraonsgrenzen durch das Unendliche geht, ſo kann das Integral nicht mehr als ne Summe von Elementen betrachtet werden und alle ſich auf dieſe Beachtungen gründenden Schlüſſe werden unzuläſſig. So hat z. B. Cauchy erſt bemerkt, daß die doppelte Integration in dieſem Falle verſchiedene Reſultate geben kann, wenn man die einfachen Integrationen in verſchiedener rdnung verrichtet.

Wir wollen z. B. das doppelte Integral:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

ehmen, für welches der Coefficient von dxdy unendlich wird, wenn man $= 0$, $y = 0$ ſetzt. Integrirt man zuerſt in Beziehung auf die Veränderche x, ſo hat man:

$$\int \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+y^2} + \text{const.}, \quad \int_{-1}^{1} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \frac{2}{1+y^2}$$

nd wenn man alsdann in Beziehung auf y integrirt, ſo erhält man:

$$2\int_{-1}^{1} \frac{dy}{1+y^2} = \pi.$$

Wenn die Integrationen in einer umgekehrten Ordnung verrichtet werden, o erhält man dagegen:

$$\int \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = -\frac{y}{x^2+y^2} + \text{const.}, \quad \int_{-1}^{1} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = -\frac{2}{1+x^2}$$

$$-2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = -\pi,$$

o daß der Unterſchied der beiden erhaltenen Werthe $= 2\pi$ iſt.

Wir wollen durch F(x,y) eine Function von ſolcher Beſchaffenheit bezeichnen, daß

$$\frac{d^2 F(x,y)}{dxdy} = f(x,y)$$

ß, und es ſei:

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = \varphi(x,y), \quad \frac{dF(x,y)}{dy} = \psi(x,y),$$

der, was daſſelbe iſt,

$$\varphi(x,y) = \int f(x,y)\,dy, \quad \psi(x,y) = \int f(x,y)\,dx,$$

liegt, und 2) daß der Radiusvector für jeden Werth von φ nur einen einzigen reellen und positiven Werth hat. Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt werden, so müssen die Integrale zwischen andern Grenzen genommen werden, welche sich in jedem besondern Falle leicht angeben lassen.

§. 357. Im Allgemeinen kann es geschehen, daß durch die Vertauschung der Veränderlichen, welcher im geometrischen Sinne einer Coordinatenverwandlung entspricht, die Bestimmung des Integrales V vereinfacht wird, und in jedem Falle ist es von Wichtigkeit, zu untersuchen, was dieses Integral durch eine Vertauschung der Veränderlichen wird. Es seien daher α, β zwei neue Veränderliche, welche mit x,y durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(\alpha,\beta), \quad y = \psi(\alpha,\beta)$$

verbunden sind, und wir wollen setzen:

$$f(x,y) = F(\alpha,\beta)$$
$$dx = \varphi_1 d\alpha + \varphi_2 d\beta \qquad (e)$$
$$dy = \psi_1 d\alpha + \psi_2 d\beta. \qquad (f)$$

Um zunächst das Differenzial dy aus dem Integrale V wegzuschaffen, bemerke man, daß bei der Bestimmung dieses Differenzials x als constant betrachtet und folglich dx gleich Null oder

$$\varphi_1 d\alpha + \varphi_2 d\beta = 0$$

gesetzt ist.
Zieht man aus dieser Gleichung den Werth von $d\beta$ und substituirt denselben in die Gleichung (f); so hat man:

$$dy = \frac{\psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1}{\varphi_2} d\alpha,$$

welches gibt:

$$dydx = \frac{\psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1}{\varphi_2} d\alpha dx,$$

$$V = \int\int F(\alpha,\beta) \cdot \frac{\psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1}{\varphi_2} d\alpha dx.$$

Nun muß man das Differenzial dx nehmen, indem man α als eine constante Größe betrachtet, oder in der Gleichung (e) das Differenzial $d\alpha = 0$, also $dx = \varphi_2 d\beta$ setzt; und folglich ist:

$$V = \int\int F(\alpha,\beta) \cdot (\psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1) d\alpha d\beta.$$

Wenn man die Differenziale dx, dy in einer umgekehrten Ordnung eliminirt hätte, so würde man den Ausdruck:

$$V = \int\int F(\alpha,\beta) \cdot (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) d\alpha d\beta$$

erhalten haben, welcher sich von dem vorhergehenden nur durch das Zeichen unterscheidet. Da nun das zwischen denselben Grenzen als V genommene Integral:

$$\int\int dydx = \int\int (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) d\alpha d\beta$$

das Maß einer Fläche ist, welche selbst die Ausdehnung des Integrales V mißt, so muß man nur den absoluten Werth dieses Integrales betrachten und das Zeichen des Factors $\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1$ ist gleichgültig.
Wenn man:

$$\alpha = r, \quad \beta = \varphi, \quad x = r\cos.\varphi, \quad y = r\sin.\varphi$$

setzt, so hat man:

$\varphi_1 = \cos.\varphi$, $\psi_1 = \sin.\varphi$, $\varphi_2 = -r\sin.\varphi$, $\psi_2 = r\cos.\varphi$;

lglich:

$$\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 = r\cos.^2\varphi + r\sin.^2\varphi = r,$$

ie man durch geometriſche Betrachtungen, welche zu einfach ſind, als daß ſie h nicht hätten zuerſt darbieten ſollen, direct gefunden hat.

§. 358. Um ein Anwendungsbeiſpiel von der Berechnung der doppelten ntegrale auf die Cubatur der von beliebigen krummen Flächen begrenzten örper zu geben, wollen wir das Volumen des Ellipſoides mit drei ungleichen ren beſtimmen, deſſen Oberfläche, auf ihren Mittelpunkt und ihre Aren beigen, durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{oder} \quad z = \pm\frac{c}{b}\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2} - y^2}$$

sgedrückt wird.

Die Gleichung des Durchſchnittes der krummen Fläche mit der Ebene der r iſt:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

d wenn man folglich der Kürze wegen

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} = u$$

zt; ſo wird die Schicht des Ellipſoides zwiſchen zwei zu der Ebene der yz rallelen und den Abſciſſen x_0, x entſprechenden Ebenen ausgedrückt durch:

$$V = \frac{2c}{b}\int_{x_0}^{x}\int_{-u}^{u}\sqrt{u^2-y^2}\cdot dydx.$$

m iſt aber:

$$\int_{-u}^{u}\sqrt{u^2-y^2}\cdot dy = \frac{\pi}{2}u^2 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

glich:

$$V = \pi\frac{bc}{a^2}\int_{x_0}^{x}(a^2-x^2)\,dx = \pi bc\left[x - x_0 - \frac{1}{3a^2}(x^3 - x^3{}_0)\right].$$

er Werth von V bleibt für beliebige Werthe von x_0, x reell; aber er verrt ſeine geometriſche Bedeutung, wenn man den Größen x_0, x größere hlenwerthe beilegt, als a, und wenn man $x_0 = -a$, $x = a$ ſetzt, ſo erlt man das Volumen des ganzen Ellipſoides $= \frac{4}{3}\pi abc$.

II. Beſtimmung des Flächeninhaltes beliebiger krummer Flächen.

§. 359. Wenn eine beliebige krumme Fläche S gegeben iſt, und man t durch einander ſehr nahe liegende Punkte derſelben Berührungsebenen an , ſo durchſchneiden ſich dieſe Ebenen gegenſeitig und bilden ein Polyeder t ſehr kleinen Flächen, welches die krumme Fläche S umſchließt und ſich derben deſto mehr nähert, je näher die Punkte, an welche man Berührungsnen gelegt hat, einander liegen. Einem begrenzten Theile der krummen iche S, wie er z. B. von einer cylindriſchen Fläche davon abgeſchnitten rd, deren gerader Durchſchnitt mit der Ebene der xy eine geſchloſſene Curve , entſpricht auch ein begrenzter Theil der umgebenden polyederſchen Fläche,

nämlich der Theil, welcher von derſelben cylindriſchen Fläche davon abgeſchnitten wird. Nun verſteht man aber unter dem Flächeninhalte des betrachteten Theiles der krummen Fläche die Grenze Ω, welcher ſich der Flächeninhalt des correſpondirenden Theiles der umſchließenden polyederſchen Fläche ohne Ende nähert, wenn die Flächen der letztern in Folge der unbegrenzten gegenſeitigen Annäherung der Berührungspunkte der krummen mit der polyederſchen Fläche ohne Ende abnehmen.

Wir wollen in dem Punkte (x, y, z) an die krumme Fläche S eine Berührungsebene legen und die Projection dieſes Punktes auf die Ebene der xy für eine der Winkelſpitzen des Rechteckes, deſſen Seiten Δx, Δy reſp. zu den Axen der x und der y parallel ſind, nehmen (§. 352), ſo ſchneiden die durch die Seiten dieſes Rechteckes ſenkrecht auf die Ebene der xy gelegten Ebenen auf der krummen Fläche S ein Stück $\Delta\Omega$ und auf der Berührungsebene in Punkte (x, y, z) ein Parallelogramm ab, deſſen Flächeninhalt nach einem bekannten geometriſchen Lehrſatze durch:

$$\frac{\Delta y \Delta x}{\cos. \nu}$$

ausgedrückt wird, wo ν den ſpitzen Winkel bezeichnet, welchen die Berührungsebene mit der Ebene der xy bildet, oder vielmehr durch:

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot \Delta y \Delta x.$$

Folglich hat man nach der Definition der nun als Function der unabhängig veränderlichen Coordinaten x, y betrachteten Größe Ω:

$$d\Omega = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dy dx, \qquad (\omega)$$

alſo:

$$\Omega = \int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dy dx. \qquad (\Omega)$$

Aus der Gleichung der krummen Fläche leitet man die Werthe der partiellen Ableitungen p, q als Functionen von x, y ab, und die Grenzen der doppelten Integration werden durch den Umfang der Linie beſtimmt, welche die Projection des Theiles der krummen Oberfläche, deſſen Flächeninhalt Ω man beſtimmen will, auf der Ebene der xy umſchließt.

Die Elemente $d\Omega$ können unendlich kleine Größen der zweiten Ordnung ſein, ſelbſt wenn die Ableitungen p, q unendlich werden, wenn nur die Ordinate z einen endlichen Werth behält (§. 342), oder wenn ſie keine Stetigkeitsunterbrechung der zweiten Ordnung erfährt.

Die Ordinate z und die partiellen Ableitungen p, q können imaginäre Werthe annehmen, ohne daß die Elemente $d\Omega$ aufhören, reelle Werthe zu haben, und alsdann wird die Formel (Ω) für geometriſche Anwendungen unbrauchbar.

Wir betrachten die Gleichung (ω) als die Definition der Function Ω ganz ebenſo, wie wir die Gleichung:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$$

als die Definition der Function s betrachtet haben. Die phyſiſche Definition, welche man von der Länge eines Curvenbogens gibt, indem man ſich die Curve als einen vollkommen biegſamen und unausdehnbaren Faden, oder beſſer mehr als einen Faden, deſſen Steifigkeit und Ausdehnbarkeit unmerklich ſind, vorſtellt, läßt ſich nicht auf krumme Flächen ausdehnen, wofern es nicht abwickelbare ſind, und hieraus ſelbſt können wir ſchließen, daß ſie nicht die wahre Definition der Function s iſt; denn die mathematiſche Analogie zwiſchen beiden

unctionen s, Ω muß ſich in den Definitionen dieſer beiden Größen wieder orfinden, wenn ſich dieſe Definitionen auf das Weſentliche der Natur der efinirten Größen, und nicht auf ein zufälliges oder ſecundäres Merkmal derelben gründen.

§. 360. Wir wollen nun nach der Formel (Ω) den Ausdruck für den lächeninhalt der krummen Oaerfläche eines beliebigen Ellipſoides:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

uchen, ſo haben wir:

$$p^2=\frac{c^4x^2}{a^4z^2},\quad q^2=\frac{c^4y^2}{b^4z^2},$$

odaß, wenn die Ausdehnung des Integrales in der Ebene dor xy durch den lmfang der Ellipſe:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

egrenzt und der Flächeninhalt des auf der einen Seite der Ebene der xy iegenden Theiles der krummen Oberfläche oder die Hälfte des Flächeninhaltes er Oberfläche des ganzen Ellipſoides durch Ω bezeichnet wird, man hat:

$$\Omega=\int\int\sqrt{\frac{1-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}-\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\,dydx.$$

Wir wollen annehmen, daß $a>b>c$ iſt, wodurch die Allgemeinheit er Auflöſung nicht beſchränkt wird, und

$$\frac{x}{a}=\xi,\quad \frac{y}{b}=\eta,\quad 1-\frac{c^2}{a^2}=\alpha^2,\quad 1-\frac{c^2}{b^2}=\beta^2$$

ehen, woraus folgt:

$$\alpha<1,\quad \beta<1,\quad \beta<\alpha, \tag{1}$$

b haben wir:

$$\Omega=ab\int\int\sqrt{\frac{1-\alpha^2\xi^2-\beta^2\eta^2}{1-\xi^2-\eta^2}}\cdot d\eta d\xi,$$

odaß die Beſtimmung von Ω auf die des doppelten Integrales

$$v=\int\int\sqrt{\frac{1-\alpha^2\xi^2-\beta^2\eta^2}{1-\xi^2-\eta^2}}\cdot d\eta d\xi=\int\int\zeta d\eta d\xi$$

rückgeführt iſt, wo die Hülfsgröße ζ durch die Gleichung:

$$\zeta=\sqrt{\frac{1-\alpha^2\xi^2-\beta^2\eta^2}{1-\xi^2-\eta^2}}$$

der:

$$(\zeta^2-\alpha^2)\xi^2+(\zeta^2-\beta^2)\eta^2=\zeta^2-1 \tag{2}$$

ſtimmt wird.

Aber nichts hindert, die neuen Veränderlichen ξ, η, ζ als rechtwinklige oordinaten zu betrachten, und alsdann kann das Integral v auch als der

Ausdruck des Volumens betrachtet werden, welches von der Ebene der von der cylindriſchen Fläche:

$$\xi^2 + \eta^2 = 1 \qquad (3$$

und von der als poſitiv betrachteten Ordinate ζ der Fläche (2) begrenzt i Läßt man nun eine Ebene in der Richtung der poſitiven ζ parallel zu Ebene der $\xi\eta$ fortrücken, ſo trifft dieſe Ebene wegen der Ungleichheiten die Fläche (2) innerhalb der cylindriſchen Fläche (3) nur ſo lange, als ζ iſt. Wenn $\zeta = 1$ wird, ſo berührt die bewegliche Ebene die krumme F in einem auf der Axe der ζ liegenden Punkte, und alsdann durchſchneide dieſelbe nach einer Reihe von Ellipſen, deren Halbaxen gleich:

$$\Xi = \sqrt{\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - \alpha^2}}, \quad \mathrm{H} = \sqrt{\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - \beta^2}},$$

und für $\zeta = \infty$ unter ſich und der Einheit gleich werden.

Hiernach kann man auch das Volumen v beſtimmen, indem man Volumenelemente der unendlich kleinen Unterſchied zwiſchen zwei Cylindern der gemeinſchaftlichen Höhe ζ und deren auf der Ebene der $\xi\eta$ liege Grundflächen Ellipſen ſind, deren Flächen reſp. durch:

$$\pi \cdot \Xi\mathrm{H}, \quad \pi(\Xi\mathrm{H} + \frac{\mathrm{d} \cdot \Xi\mathrm{H}}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta)$$

ausgedrückt werden (§. 338), nimmt. Man hat alſo:

$$v = \pi \int_1^\infty \zeta \frac{\mathrm{d} \cdot \Xi\mathrm{H}}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta$$

und durch dieſe ſinnreiche Betrachtung Catalan's wird das doppelte Int welches den Werth von v ausdrückte, auf ein einfaches zurückgeführt. *)

Nun gibt aber die theilweiſe Integration:

$$\int \zeta \frac{\mathrm{d} \cdot \Xi\mathrm{H}}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta = \zeta\Xi\mathrm{H} - \int \Xi\mathrm{H}\mathrm{d}\zeta$$

$$= \frac{\zeta(\zeta^2 - 1)}{\sqrt{(\zeta^2 - \alpha^2)(\zeta^2 - \beta^2)}} - \int \frac{(\zeta^2 - 1)\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - \alpha^2)(\zeta^2 - \beta^2)}}.$$

Es ſei:

$$\zeta = \frac{\alpha}{\sin.\varphi},$$

ſo kommt:

$$\int \frac{(\zeta^2 - 1)\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - \alpha^2)(\zeta^2 - \beta^2)}} = \int \frac{(\sin.^2\varphi - \alpha^2)\mathrm{d}\varphi}{\sin.^2\varphi\sqrt{\alpha^2 - \beta^2\sin.^2\varphi}}$$

$$= (1 - \beta^2)\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2\sin.^2\varphi}} - \int \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2\sin.^2\varphi} \cdot \mathrm{d}\varphi}{\sin.^2\varphi}$$

$$\int \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2\sin.^2\varphi} \cdot \mathrm{d}\varphi}{\sin.^2\varphi} = -\cot.\varphi\sqrt{\alpha^2 - \beta^2\sin.^2\varphi} - \beta^2 \int \frac{\cos.^2\varphi\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2\sin}}$$

*) Vergl. das Journal de mathématiques de M. Liouville, tom. IV. pag. et tom. V. pag. 115.

urch ſchickliche Subſtitutionen findet man, daß der Werth des beſtimmten ntegrales $\frac{v}{\pi}$ aus zwei Theilen beſteht, wovon der eine die außerhalb des ntegrationszeichens $\int$ ſtehende Größe iſt, welche dem Unterſchiede der Werthe eich iſt, welche die Function:

$$\frac{(\alpha^2+\beta^2\cos.^2\varphi-1)\sin.\varphi}{\cos.\varphi\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin.^2\varphi}}$$

nimmt, wenn man an der obern Grenze $\sin.\varphi=0$, und an der untern renze $\sin.\varphi=\alpha$ ſetzt. Dieſer Unterſchied reducirt ſich auf:

$$\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}=\frac{c^2}{ab}.$$

Der andere Theil beſteht aus dem Integrale:

$$-(1-\beta^2)\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin.^2\varphi}}-\beta^2\int\frac{\cos.^2\varphi d\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin.^2\varphi}}$$

$$=-\int\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin.^2\varphi}\cdot d\varphi-(1-\alpha^2)\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin.^2\varphi}},$$

elches ebenfalls zwiſchen den Grenzen $\sin.\varphi=0$, $\sin.\varphi=\alpha$ oder $\varphi=0$, $=\mu$ genommen wird, indem $\sin.\mu$ die Conſtante α bezeichnet, welche einer iſt, als die Einheit. Wenn wir die Ordnung der Grenzen umkehren nd die Bezeichnungen der elliptiſchen Functionen anwenden, indem wir der infachheit wegen:

$$k=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}$$

gen, ſo wird dieſer Theil des Werthes von $\frac{v}{\pi}$ ausgedrückt durch:

$$\alpha\cdot E(k,\mu)+\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\cdot F(k,\mu),$$

der, wenn man für α ſeinen Werth wieder ſetzt, durch:

$$\frac{1}{a\sqrt{a^2-c^2}}\cdot[(a^2-c^2)E(k,\mu)+c^2F(k,\mu)].$$

die Oberfläche des halben Ellipſoides wird alſo ausgedrückt durch:

$$\Omega=\pi c^2+\frac{\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\cdot[(a^2-c^2)E(k,\mu)+c^2F(k,\mu)].$$

§. 361. Wir wollen nun noch die convexe Oberfläche eines ſchiefen egels mit kreisförmiger Baſis zu beſtimmen ſuchen, und zu dem Zwecke die pitze des Kegels in den Anfangspunkt der Coordinaten, und ſeine Grundäche in eine zu der Ebene der yx parallele Ebene fallen laſſen (Fig. 86), daß der Mittelpunkt C dieſer Grundfläche in die Ebene der xy fällt; ſo nd die Gleichungen der Grundfläche des Kegels:

$$x-\xi=0,\quad z^2+(y-\eta)^2-\varrho^2=0,$$

nd die der convexen Oberfläche deſſelben iſt:

$$\xi^2z^2+(\eta x-\xi y)^2-\varrho^2x^2=0. \qquad (4)$$

Wir wollen die Abſciſſe OP oder die Höhe des Kegels mit ξ, die Ordinate PC des Mittelpunktes der Grundfläche mit η und den Halbmeſſer $CR_0 = CR_1$ mit ϱ bezeichnen; ſo erhalten wir, wenn wir aus der Gleichung (4) die Werthe von p^2, q^2 ableiten:

$$\Omega = \frac{1}{\xi} \cdot \int\int \left(\frac{\xi^2 \varrho^2 x^2 + [\varrho^2 x - \eta(\eta x - \xi y)]^2}{\varrho^2 x^2 - (\eta x - \xi y)^2} \right)^{\frac{1}{2}} dy dx.$$

Wenn wir zur Erleichterung der Integration $y = \alpha x$ ſetzen, wo α eine neue Veränderliche bezeichnet (§. 357), ſo haben wir $dy = x d\alpha + \alpha dx$, und wenn man y ſich ändern läßt, während x als conſtant betrachtet wird, ſo iſt $dy = x d\alpha$, folglich:

$$\Omega = \frac{1}{\xi} \cdot \int\int \left(\frac{\xi^2 \varrho^2 + [\varrho^2 - \eta(\eta - \xi\alpha)]^2}{\varrho^2 - (\eta - \xi\alpha)^2} \right)^{\frac{1}{2}} x dx d\alpha.$$

Verrichten wir die Integration in Beziehung auf x zwiſchen den Grenzen $x = 0$, $x = \xi$, und verdoppeln das Reſultat, um den Flächeninhalt der beiden Theile der krummen Oberfläche zu erhalten, welche zu beiden Seiten der Ebene der xy liegen; ſo kommt:

$$\Omega = \xi \int \left(\frac{\xi^2 \varrho^2 + [\varrho^2 - \eta(\eta - \xi\alpha)]^2}{\varrho^2 - (\eta - \xi\alpha)^2} \right)^{\frac{1}{2}} d\alpha.$$

Die $x = \xi$ und $y = \eta + \varrho$, $y = \eta - \varrho$ entſprechenden Grenzen des Integrales ſind:

$$\alpha = \frac{\eta + \varrho}{\xi}, \quad \alpha = \frac{\eta - \varrho}{\xi},$$

Man erhielte einen einfachern Ausdruck, wenn man:

$$\eta - \xi\alpha = \varrho \cos. \varphi$$

ſetzte, woraus folgt:

$$\Omega = \varrho \int_0^{\pi} \sqrt{\xi^2 + (\varrho - \eta \cos. \varphi)^2} \cdot d\varphi,$$

und es iſt leicht einzuſehen, daß dieſes Integral zu denjenigen gehört, welche ſich durch elliptiſche Functionen ausdrücken laſſen.

Allgemein, die Quadratur der Kegelflächen läuft, wie die der Rotationsoberflächen, auf die Beſtimmung eines einfachen Integrales hinaus; denn da die allgemeine Gleichung der Oberflächen der erſten Art, wenn man, wie es erlaubt iſt, den Mittelpunkt derſelben in den Anfangspunkt der Coordinaten legt

$$z = x\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

iſt (§. 249), ſo hat man:

$$\frac{dz}{dx} = \psi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{dz}{dy} = \psi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

und nachdem man, wie oben:

$$y = \alpha x, \quad dy = x d\alpha$$

geſetzt hat, kommt:

$$\Omega = \iint \sqrt{1 + (\psi\alpha - \alpha\psi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2} \cdot x dx d\alpha$$

$$= \tfrac{1}{2} \int \sqrt{1 + (\psi\alpha - \alpha\psi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2} \cdot x^2 d\alpha.$$

III. Dreifache Integrale.

§. 362. Durch rein geometriſche Unterſuchungen wird man nicht auf die trachtung dreifacher Integrale von der Form:

$$M = \iiint f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

ührt; aber dagegen iſt einleuchtend, daß Integrale dieſer Art bei allen phyſikaliſchen Unterſuchungen vorkommen müſſen, wo es nicht erlaubt iſt, von igen Dimenſionen der Körper zu abſtrahiren. Wenn es z. B. darauf anmt, das Gewicht oder die Maſſe eines Körpers zu beſtimmen, deſſen, von em Punkte zum andern veränderliche Dichtigkeit für den Punkt, deſſen rechtnklige Coordinaten x, y, z ſind, durch f(x, y, z) ausgedrückt wird; ſo wird ſes Gewicht oder dieſe Maſſe durch das Integral M beſtimmt, deſſen Grenı ſo gewählt werden müſſen, daß es genau den von dem Körper eingenomnen Raum umfaßt. Wenn man die Maſſe M des Körpers durch ſein Vonen oder durch das zwiſchen denſelben Grenzen genommene Integral:

$$V = \iiint dz\,dy\,dx$$

oidirt; ſo erhält man die mittlere Dichtigkeit des Körpers oder den mittleren erth der Function f innerhalb der Grenzen der dreifachen Integration. Dieſe efinition beruht auf ebenſo vielen offenbaren Folgerungen aus der Definition r Function f ſelbſt (§. 130) und aus der vorausgeſetzten Stetigkeit der Materie, und in der Folge werden wir die Modificationen näher erörtern, elche dieſe Theorie erfahren muß, wenn man die Körper als Syſteme von nander getrennter materieller Theilchen betrachtet.

Wenn die Function f eine Temparatur ausdrückte; ſo wäre das Verhältniß

$\frac{M}{V}$ die mittlere Temparatur des Körpers u. ſ. f.

Die erſte Integration in Beziehung auf z findet zwiſchen Grenzen ſtatt elche Functionen der beiden andern unabhängigen Veränderlichen x, y ſind, id welche die auf der Ebene der xy ſenkrechten Ordinaten der den Körper grenzenden Flächen oder Flächentheile ausdrücken. Die Ausdehnung der beiın folgenden Integrationen in Beziehung auf x und auf y wird durch die r Fläche beſtimmt, welche auf der Ebene der xy von dem Durchſchnitte eſer Ebene mit einem, die Oberfläche des Körpers berührenden Cylinder, ſſen Erzeugungslinien zu der Axe der z parallel ſind, eingeſchloſſen wird.

Die Ordnung der einzelnen Integrationen iſt gleichgültig, wenn die nction f(x, y, z) innerhalb der Grenzen der dreifachen Integration nicht durch s Unendliche geht; aber wenn dieſes der Fall iſt, ſo kommt man auf ähnche Singularitäten, wie die bei den doppelten Integralen erwähnten.

§. 363. Um innerhalb der Ausdehnung des von einem Körper eingeommenen Raumes ein beſtimmtes dreifaches Integral zu nehmen, iſt es oft veckmäßig, für das Syſtem rechtwinkliger Coordinaten ein Syſtem von Porcoordinaten zu ſubſtituiren, deſſen Anwendung übrigens durch die Bedürfniſſe er Aſtronomie und Geographie ganz natürlich an die Hand gegeben wird. Wir wollen uns eine durch den Anfangspunkt der Radienvectoren gelegte feſte bene und in derſelben einen feſten Radiusvecten denken, ſo iſt die Lage eines unktes im Raume beſtimmt, wenn man 1) die Länge r des Radiusvectors,) den Winkel θ, welchen der Radiusvector mit einer auf der feſten Ebene nkrechten geraden Linie bildet, und 3) den Winkel ψ, welchen die Projection es Radiusvectors auf der feſten Ebene mit dem feſten Radiusvector bildet, nnt. Wenn man zu der feſten oder Fundamentalebene, wie ſie einige ennen, die Ebene der xy, und für den feſten Radiusvector die Halbaxe der

positiven x nimmt, so geht man vermittelst der folgenden drei Formeln
rechtwinkligen Coordinaten zu Polarcoordinaten über:

$$x = r \sin.\theta \cos.\psi, \quad y = r \sin.\theta \sin.\psi, \quad z = r \cos.\theta.$$

In dem Systeme der geographischen Coordinaten entspricht der Winkel
der geographischen Länge, und der Winkel θ ist das Complement der geog
phischen Breite, wenn der Pol oder der Anfangspunkt der Radiusvectoren
Mittelpunkte der Erde liegt. Der Radiusvector beschreibt einen Meridi
wenn man den Winkel θ variiren läßt, indem der Winkel ψ constant blei
und er beschreibt einen Parallelkreis, wenn der Winkel θ constant bleibt, u
der Winkel ψ sich ändert.

Wir wollen uns eine Kugelfläche denken, deren Mittelpunkt im Anfan
punkte O (Fig. 87) liegt und deren Halbmesser $OR = r$ ist, und auf
Oberfläche derselben wollen wir zwei einander unendlich nahe liegende Pun
m, ν betrachten, so daß man von dem Punkte m zu dem Punkte ν überge
indem man θ sich um $d\theta$, und ψ um $d\psi$ ändern läßt. Die Punkte m
sind zwei entgegengesetzte Winkelspitzen eines sphärischen Viereckes, welches
zwei einander unendlich nahe liegenden Meridianbogen $m\mu$, $n\nu$, und von gr
einander ebenfalls unendlich nahe liegenden Parallelkreisbogen mn, $\mu\nu$, gebil
wird. Es ist $m\mu = n\nu = r d\theta$ und mn, welches von $\mu\nu$ nur um ein unen
lich Kleines der zweiten Ordnung verschieden ist, $= mp d\psi = r \sin.\theta d$
Folglich wird der Flächeninhalt des sphärischen Viereckes, welches man als
Rechteck betrachten kann, wenn man die unendlich kleinen Größen von
höhern Ordnungen als von der zweiten vernachlässigt, durch $r^2 \sin.\theta d\theta$
ausgedrückt, und wenn man diesen Flächeninhalt mit dr multiplicirt; so erh
man das Volumen eines Elementes der Pyramide $Omn\nu\mu$, und die ga
Masse des in solche Elemente zerlegten Körpers wird folglich ausgedrückt dur

$$M = \int\int\int F(r,\theta,\psi)\, r^2\, dr \sin.\theta d\theta d\psi,$$

wo $F(r,\theta,\psi)$ den Ausdruck bezeichnet, in welchen sich die Function $f(x,y,$
verwandelt, wenn für die Coordinaten x,y,z ihre durch r,θ,ψ ausgedrück
Werthe substituirt werden. Das Volumen des Körpers oder die Ausdehnu
des Integrales wird ausgedrückt durch:

$$V = \int\int\int r^2\, dr \sin.\theta d\theta d\psi.$$

Wenn der Anfangspunkt der Radienvectoren oder der Pol innerhalb
Körpers liegt und dieser Körper von einer Oberfläche begrenzt wird, welche
allen ihren Punkten convex ist, oder wenigstens von jedem Radiusvector
in einem einzigen Punkte getroffen werden kann; so ist die Gleichung die
Oberfläche von der Form:

$$r = f(\theta,\psi),$$

wo die Function f für jedes Werthesystem von θ,ψ nur einen einzigen reell
und positiven Werth hat, und folglich ist in diesem Falle:

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{f(\theta,\psi)} F(r,\theta\psi)\, r^2\, dr \sin.\theta d\theta d\psi,$$

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [f(\theta,\psi)]^3 \sin.\theta d\theta d\psi.$$

Wenn die den Körper umschließende Oberfläche eine andere Form, o
der Anfangspunkt der Radienvectoren eine andere Lage hätte; so müßte m
die Grenzen der drei einzelnen Integrationen für jeden Fall besonders besti
men, was übrigens keine Schwierigkeiten darbieten kann.

Der Werth des doppelten Integrales:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin.\,\theta\,d\theta\,d\psi$$

ist $= 4\pi$, d. h. gleich der Kugeloberfläche von dem Halbmesser $= 1$, wie es sein muß.

§. 364. Die Bestimmung eines dreifachen Integrales läßt sich durch eine schickliche Wahl der veränderlichen Größen oder der Coordinaten sehr vereinfachen. Es seien daher α, β, γ drei neue veränderliche Größen, welche mit x, y, z durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(\alpha,\beta,\gamma),\quad y = \psi(\alpha,\beta,\gamma),\quad z = \omega(\alpha,\beta,\gamma),$$

verbunden sind, und wir wollen

$$f(x,y,z) = F(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$dx = \varphi_1\,d\alpha + \varphi_2\,d\beta + \varphi_3\,d\gamma \qquad (g)$$

$$dy = \psi_1\,d\alpha + \psi_2\,d\beta + \psi_3\,d\gamma \qquad (h)$$

$$dz = \omega_1\,d\alpha + \omega_2\,d\beta + \omega_3\,d\gamma \qquad (i)$$

setzen. Um nun zunächst das Differenzial dz aus dem Integrale M fortzuschaffen, bemerke man, daß die beiden Coordinaten x, y bei der Bestimmung desselben als constant betrachtet sind, und daß folglich $dx = 0$, $dy = 0$, oder:

$$\varphi_1\,d\alpha + \varphi_2\,d\beta + \varphi_3\,d\gamma = 0$$

$$\psi_1\,d\alpha + \psi_2\,d\beta + \psi_3\,d\gamma = 0$$

ist. Leitet man aus diesen beiden Gleichungen die Werthe von $d\alpha$, $d\beta$ ab, und substituirt sie in die Gleichung (i); so erhält man:

$$dz = \frac{\Theta}{\varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2}\cdot d\gamma,$$

wo der Kürze wegen

$$\psi = \varphi_1\psi_2\omega_3 - \varphi_1\omega_2\psi_3 + \psi_1\omega_2\varphi_3 - \psi_1\varphi_2\omega_3 + \omega_1\varphi_2\psi_3 - \omega_1\psi_2\varphi_3$$

gesetzt ist. Man erhält also:

$$M = \iiint F(\alpha,\beta,\gamma)\cdot\frac{\Theta}{\varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2}\,dx\,dy\,d\gamma.$$

Aber die Coordinate γ muß bei den Integrationen in Beziehung auf y und x als eine Constante betrachtet werden, wodurch die Gleichungen (g) und (h) auf die Gleichungen (e) und (f) im §. 357 reducirt werden, und nach dem in diesem §. Bewiesenen hat man:

$$\iint U\,dx\,dy = \iint U(\varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2)\,d\alpha\,d\beta,$$

folglich:

$$M = \iiint F(\alpha,\beta,\gamma)\cdot\Theta\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma,$$

und:

$$V = \iiint \Theta\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma.$$

Das Polynom Θ kann wegen seiner symmetrischen Zusammensetzung das Zeichen nicht verändern, wenn man die Elimination der Differenziale dx, dy, dz in einer andern Ordnung verrichtet; aber außerdem ist das Zeichen von Θ auch gleichgültig, und man muß bloß den Zahlenwerth dieses Factors in Betracht ziehen, weil das Integral V ein Volumen mißt, welches seinerseits die Ausdehnung des dreifachen Integrales M mißt.

Wenn man:

$$\alpha = r, \quad \beta = \theta, \quad \gamma = \psi$$

$$x = r \sin.\theta \cos.\psi, \quad y = r \sin.\theta \sin.\psi, \quad z = r \cos.\theta$$

ſetzt, ſo kommt:

$$\varphi_1 = \sin.\theta \cos.\psi, \quad \varphi_2 = r \cos.\theta \cos.\psi, \quad \varphi_3 = -r \sin.\theta \sin.\psi,$$
$$\psi_1 = \sin.\theta \sin.\psi, \quad \psi_2 = r \cos.\theta \sin.\psi, \quad \psi_3 = r \sin.\theta \cos.\psi,$$
$$\omega_1 = \cos.\theta, \quad \omega_2 = -\sin.\theta, \quad \omega_3 = 0,$$

woraus $\Theta = r^2 \sin.\theta$ folgt, wie man auch direct durch geometriſche Co
ſtruction findet.

§. 365. Die Theorie der doppelten und dreifachen Integrale läßt ſ
leicht verallgemeinern und auf vierfache, fünffache, ꝛc. Integrale ausdehn
und man ſieht leicht ein, daß die Aufgaben der mathematiſchen Phyſik oft
mehrfache als dreifache Integrale führen müſſen. Wenn z. B. die Wirkung
eines Körpers M auf einen Körper M' die Summe der Wirkungen iſt, wel
jedes Element von M auf jedes Element von M' ausübt; ſo hat man, we
man die Intenſität der Wirkung, welche das Element m des Körpers
deſſen Coordinaten x,y,z ſind, auf das Element m' des Körpers M', deſ
Coordinaten x',y',z' ſind, mit $f(x,y,z;x',y',z')$ bezeichnet:

$$F = \iiiiii f(x,y,z;x',y',z')\,dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz',$$

d. h. der Werth von F hängt nothwendig von einem ſechsfachen Integrale
welches jedoch in gewiſſen Fällen durch eine ſchickliche Wahl der Coordinat
auf ein weniger vielfaches Integral zurückgeführt werden kann.

Siebentes Kapitel.

**Theorie der Variation der Integrale. — Principien der Method
welche insbeſondere die Variationsrechnung genannt wird.**

I. Ueber die Variation der Integrale.

§. 366. Ein beſtimmtes Integral:

$$\int_a^b f(x,\alpha)\,dx$$

ändert ſich mit dem Werthe, welchen man dem in der Function $f(x,\alpha)$ vo
kommenden Parameter α beilegt. Es iſt eine neue Function von α, wora
die Veränderliche x verſchwunden iſt, und welche wir durch $F\alpha$ bezeichn
können. Nehmen wir nun an, daß α ein unendlich kleines Increment
erhält; ſo haben wir:

$$F\alpha + d \cdot F\alpha = \int_a^b [f(x,\alpha) + \frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha} d\alpha]\,dx,$$

oder:

$$d \cdot F\alpha = \int_a^b \left[\frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha} d\alpha\right] dx,$$

der endlich, da ſich der Factor $d\alpha$ nicht mit x ändert:

$$\frac{d \cdot F\alpha}{d\alpha} = \int_a^b \frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha} \cdot dx,$$

nd wenn man für $F\alpha$ ſeinen Werth ſetzt:

$$\frac{d \cdot \int_a^b f(x,\alpha)\,dx}{d\alpha} = \int_a^b \frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha} \cdot dx,$$

voraus erhellet, daß man das vor dem Integralzeichen $\int$ befindliche Differenziationszeichen d unter das erſtere treten laſſen kann, und umgekehrt, wenigſtens wenn die Integrationsgrenzen von dem veränderlichen Parameter unabhängig ſind.

Wenn man dagegen

$$a = \varphi\alpha, \quad b = \psi\alpha$$
$$da = \varphi'\alpha \cdot d\alpha, \quad db = \psi'\alpha \cdot d\alpha$$

hätte; ſo wäre in dem Falle, wo das Integral als eine Summe von Differenzialelementen behandelt werden könnte:

$$F\alpha + d \cdot F\alpha = \int_{a+da}^{b+db} [f(x,\alpha) + \frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha} d\alpha]\,dx$$

$$= \int_a^b [f(x,\alpha) + \frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha} d\alpha]\,dx - [f(a,\alpha) + \frac{d \cdot f(a,\alpha)}{d\alpha} d\alpha]\,da$$

$$+ [f(b,\alpha) + \frac{d \cdot f(b,\alpha)}{d\alpha} d\alpha]\,db,$$

woraus folgt, wenn man die unendlich kleinen Größen der zweiten Ordnung vernachläſſigt und für a, b, da, db ihre Werthe ſetzt:

$$F\alpha + d \cdot F\alpha = \int_{\varphi\alpha}^{\psi\alpha} [f(x,\alpha) + \frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha} d\alpha]\,dx$$
$$- f(\varphi\alpha,\alpha) \cdot \varphi'\alpha d\alpha + f(\psi\alpha,\alpha) \cdot \psi'\alpha d\alpha,$$

und folglich:

$$\frac{dF\alpha}{d\alpha} = \int_{\varphi\alpha}^{\psi\alpha} \frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha} dx - f(\varphi\alpha,\alpha) \cdot \varphi'\alpha + f(\psi\alpha,\alpha) \cdot \psi'\alpha.$$

Dieſe Rechnung ſetzt voraus, daß die Function $f(x,\alpha)$ zwiſchen den Grenzen des Integrales nicht unendlich wird, und die erhaltenen Reſultate werden durch graphiſche Conſtruction anſchaulicher gemacht. Es ſei daher MN (Fig. 88) die Curve, deren Abſciſſe x und deren Ordinate $f(x,\alpha)$ iſt, ſo daß das beſtimmte Integral $F\alpha$ den Inhalt der zwiſchen der Curve MN, der Axe der Abſciſſen und den den Abſciſſen $OP = a$, $OQ = b$ entſprechenden Ordinaten MP, NQ liegenden Fläche ausdrückt. Durch die Variation der veränderlichen Ordinate (die Abſciſſen der Endpunkte bleiben ungeändert) geht die Curve in IM'KN' über, und die Fläche nimmt um das krummlinige Viereck MNKI zu. Durch die Veränderung der Grenzen a, b in $a + da = OP'$, $b + db = OQ'$ nimmt die Fläche, indem die laufende Ordinate ungeändert bleibt, um das Viereck NQQ'K' zu und um das Viereck MPP'I' ab. Dieſe

drei als unendlich kleine Größen der ersten Ordnung behandelte Vierecke werden resp. gemessen durch:

$$\int_a^b \left[\frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha} d\alpha\right] dx, \quad f(a,\alpha)\, d\alpha, \quad f(b,\alpha)\, db$$

und die Vierecke MIM'I', NKN'K' werden durch die unendlich kleinen Größen der zweiten Ordnung:

$$\frac{d \cdot f(a,\alpha)}{d\alpha} d\alpha da, \quad \frac{d \cdot f(b,\alpha)}{d\alpha} d\alpha db$$

gemessen, welche man aber bei der Bestimmung der Totalveränderung der Fläche $F\alpha$ durch die gleichzeitige Veränderung der laufenden Ordinate $f(x,\alpha)$ und der Grenzen a, b vernachlässigt.

§. 367. Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, daß die Grenzen a, b von α unabhängig sind; so kann man nach dem Zahlenwerthe des Parameters α fragen, welcher das bestimmte Integral:

$$F\alpha = \int_a^b f(x,\alpha)\, dx$$

zu einem Maximum oder Minimum macht. Wenn sich die Function $F\alpha$ algebraisch ausdrücken ließe, so würde der Aufgabe genügt, wenn man für α die Wurzel der Gleichung $F'\alpha = 0$ nähme, und da nach dem Vorhergehenden auch:

$$F'\alpha = \int_a^b \frac{d \cdot f(x,\alpha)}{d\alpha} dx$$

ist; so ist blos erforderlich, daß man das Integral im zweiten Theile dieser letzten Gleichung unter algebraischer Formel erhalten kann, damit sich die in Rede stehende Aufgabe durch die gewöhnliche Methode der Maxima und Minima auflösen läßt. In dem entgegengesetzten Falle aber, einige Fälle ausgenommen, wo sich die Bedingungen des Maximums oder Minimums unmittelbar aus der Form des Integrales ergeben, muß man die Curve, deren Abscisse α und deren Ordinate $F\alpha$ ist, vermittelst der mechanischen Quadraturen durch Punkte construiren, indem man alsdann die Maxima und Minima der Ordinate graphisch bestimmt.

§. 368. Wir wollen nun annehmen, daß α nicht mehr eine in der ganzen Ausdehnung der Integration in Beziehung auf x constante, sondern eine mit x veränderliche Größe bezeichnet, und um diesen Umstand besser anzudeuten, wollen wir für den Buchstaben α den Buchstaben y setzen, wodurch man gewöhnlich eine Function von x zu bezeichnen pflegt. Man kann alsdann fragen, was für eine Function y von x sein muß, wenn sie das bestimmte Integral:

$$\int_a^b f(x,y)\, dx \qquad (1)$$

zu einem Maximum oder Minimum macht, und alsdann geschieht es sogar, daß sich diese Aufgabe, welche von der vorhergehenden sehr verschieden ist, ohne vorhergegangene Integration auflösen läßt. Denn wenn man den Werth von y als Function von x durch die Gleichung:

$$\frac{d \cdot f(x,y)}{dy} = 0 \qquad (2)$$

immt; ſo erhält jedes Element des Integrales ſeinen größten oder kleinſten
rth, welchen es annehmen kann, ſo daß das Integral ſelbſt, welches die
mme dieſer Elemente bildet, ſeinen größten oder kleinſten Werth bekommt.
ſer Schluß ſetzt jedoch voraus: 1) daß man das Integral als eine Summe
Elementen betrachten kann, ſo daß die Function $f(x,y)$ innerhalb der In-
ationsgrenzen nicht unendlich wird, und 2) daß der aus der Gleichung (2)
eleitete und durch eine Function von x ausgedrückte Werth von y die
ction $f(x,y)$ beſtändig zu einem Maximum oder Minimum macht, und
r in der ganzen Ausdehnung der Integrationsgrenzen. Die Aufgabe würde
Natur ganz verändern, wenn dieſe Bedingungen nicht erfüllt würden.

. Principien der unter dem Namen der Variationsrechnung bekannten Methode.

§. 369. Hierdurch werden wir auf die Unterſuchung eines allgemeinen
les geführt, welcher weit wichtigere Anwendungen geſtattet, nämlich auf die
erſuchung des Falles, wo die Function unter dem Integralzeichen $\int$ nicht
3 die als Function von x betrachtete Größe y, ſondern auch ihre Ablei-
zen y', y'', ꝛc. enthält, und wo es darauf ankommt, den Werth von y als
ction von x anzugeben, welcher das gegebene Integral zu einem Maximum
r Minimum macht. Offenbar kann man innerhalb der Integrationsgrenzen
t die Functionen $y = \varphi x$ angeben, ohne dadurch die abgeleiteten Functionen
, $\varphi'x$, $\varphi''x$, ꝛc. zu beſtimmen, und ebenſo wenig kann man dieſe Function ver-
ern, ohne daß alle Ableitungen derſelben entſprechende Veränderungen er-
en. Die Variation oder Veränderung des Integrales iſt alſo implicite
ch die Veränderung der Function y allein beſtimmt und die ganze Schwie-
eit der Aufgabe beſteht darin, den Zuſammenhang der Variation von y mit
ſubordinirten Variationen der Ableitungen y', y'', ꝛc. unmittelbar anzuge-
. Dieſes iſt die Aufgabe, wovon Lagrange durch Anwendung eines be-
ern Algorithmus, welchen man die Variationsrechnung genannt hat,
welcher im Grunde nichts anderes iſt, als eine glückliche Modification des
ferenzialalgorithmus bei ſeiner Anwendung auf die Variation der Integrale,
in eine unbekannte Function mit ihren verſchiedenen Ableitungen unter dem
egralzeichen $\int$ vorkommt, die eleganteſte Auflöſung gegeben hat.

§. 370. Man wird in der Analyſis fortwährend auf die Betrachtung von
ictionen geführt, welche beſondere und von einander unabhängige Variationen
r Veränderungen erfahren, und alle Functionen mit mehreren von einander
bhängigen veränderlichen Größen gehören zu dieſem Falle; allein nichts iſt
r dazu geeignet, die Coexiſtenz mehrerer verſchiedener Arten der Verän-
ung zum deutlichen Bewußtſein zu bringen, als die Betrachtung der Be-
jungen eines materiellen Syſtemes. Wir wollen uns einen biegſamen, nicht
annten und an ſeinen beiden Enden befeſtigten Faden denken, welcher ſeine
e und Form verändert, und blos der Einfachheit wegen annehmen, daß die
ve, welche der Faden bildet, immer in derſelben Ebene liegt; ſo werden
Coordinaten x, y jedes auf feſte Axen, welche in dieſer Ebene liegen, be-
enen Punktes des Fadens, die Richtung der Tangente in dieſem Punkte,
ie die Größe und Richtung des Krümmungshalbmeſſers in Folge der Form-
änderung des Fadens verändert, und man muß dieſe Veränderungen nicht
denen verwechſeln, welche bei dem Uebergange von einem Punkte des
ens zu einem andern unendlich nahe liegenden ſtattfinden.

Allgemein, es iſt zur Beſeitigung jeder Zweideutigkeit zweckmäßig, die
auf dieſe beiden Veränderungsarten beziehenden Veränderungen durch ver-
ebene Zeichen anzudeuten. So könnte man z. B. durch $d_x z$, $d_y z$ die in

Beziehung auf x und y genommenen Differenziale einer Function z mit zwei unabhängigen veränderlichen Größen x,y bezeichnen (§. 118), und wenn man die Indices der Differenziale dz gewöhnlich hinwegläßt, ſo geſchieht dieſes wegen der dieſe Differenziale faſt beſtändig begleitenden Nenner dx, dy, welche gewiſſermaßen wie die Indices jede Zweideutigkeit beſeitigen.

Bei der in Rede ſtehenden Aufgabe, wo es einzig und allein darauf ankommt, aus dem Ausdrucke der Variation eines Integrales die ſubordinirten Variationen, wie die von $\frac{dy}{dx}$ oder von dy, zu eliminiren, damit man blos noch die Variationen behält, welche unabhängig und willkürlich bleiben, wie die von y, betrachten wir dieſe Varation von y auf eine ganz allgemeine Weiſe und nicht in Beziehung auf eine beſtimmte andere veränderliche Größe als x, wovon y abhängen würde, und alsdann kann man das von der Veränderung der Abſciſſe herrührende Differenzial dy weder durch Indices, noch durch Nenner von der andern Veränderung von y, welche von der Formveränderung der Function $y = \varphi x$ herrührt, unterſcheiden, obgleich man ſich dieſe Formveränderung als von der Veränderung eines in der Function φx vorkommenden beliebigen Parameters herrührend vorſtellen kann. Man iſt daher übereingekommen, die von der Formveränderung der Function herrührenden unendlich kleinen Veränderungen durch das Zeichen δ anzudeuten, und insbeſondere Variationen zu nennen, indem man die durch das Zeichen d angedeuteten Veränderungen, welche von der Veränderung der Abſciſſen oder von dem Uebergange von einem Elemente des materiellen Syſtemes zu dem nächſten herrühren, auch fernerhin Differenziale nennt.

§. 371. Wir wollen daher annehmen, daß die Curve MN (Fig. 88) in Folge der durch das Zeichen δ angedeuteten Variation in die Curve M'N' übergeht; ſo entſprechen die Puncte m', m'_1 der zweiten Curve den Puncten m, m_1 der erſten, und dieſe den Abſciſſen x, $x + dx$. Nun iſt aber:

$$mp = y, \quad m_1p_1 = y + dy, \quad m'p' = y + \delta y$$
$$m'_1p'_1 = m_1p_1 + \delta \cdot m_1p_1 = m'p' + d \cdot m'p',$$

oder vielmehr:

$$y + dy + \delta(y + dy) = y + \delta y + d(y + \delta y),$$

und folglich:

$$\delta dy = d\delta y. \qquad (3)$$

Man hat alſo auch:

$$\delta d^2y = d\delta dy = d^2\delta y,$$

und allgemein:

$$\delta d^n y = d^n \delta y,$$

vermöge welcher Relation man immer das Zeichen δ hinter das Zeichen d ſetzen kann. Uebrigens ſieht man leicht ein, daß dieſe Relation auch ſtattfinden würde, wenn d,δ keine unendlich kleinen, ſondern endliche Veränderungen andeuteten, oder vielmehr, daß dieſe Relation nur deswegen an der Grenze der unendlichen Kleinheit der Veränderungen ſtattfindet, weil ſie für endliche Veränderungen ſtattfindet. Ueberdies iſt die Formel (3), wofür man

$$\delta dz = d\delta z$$

ſetzen kann, nach den oben gegebenen Erklärungen gleichbedeutend mit der in §. 123 bewieſenen Formel:

$$d_x d_y z = d_y d_x z.$$

Die Schlüſſe im §. 366, vermöge welcher man die Ordnung der Zeichen umkehren darf, ſind auch auf die Umſtellung der Zeichen $\int$, δ anwendbar, man hat folglich:

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta V \cdot dx.$$

dieſer Transpoſition der Zeichen beſteht die erſte Grundregel der Methode Variationen.

§. 372. Wenn es nun darauf ankommt, die Variation eines beſtimmten egrales

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx, \qquad (V)$$

in V eine Function von $x, y, y', y'',$ ꝛc., oder was auf daſſelbe hinausläuft, Function von $x, y, dy, d^2y,$ ꝛc. iſt zu finden, und wenn die Entwickelung Variation ein Glied von der Form:

$$\int_{x_0}^{x_1} \Omega \delta dy$$

; ſo verwandelt man dieſen Ausdruck zuvörderſt in:

$$\int_{x_0}^{x_1} \Omega d\delta y.$$

dann hat man, wenn man theilweiſe integrirt, und den Werth einer Func- U an der obern Grenze des Integrales weniger ihrem Werthe an der ern Grenze mit

$$[U]_0^1$$

eichnet

$$\int_{x_0}^{x_1} \Omega d\delta y = [\Omega \delta y]_0^1 - \int_{x_0}^{x_1} d\Omega \cdot \delta y.$$

enſo fände man durch zwei ſucceſſive theilweiſe Integrationen:

$$\int_{x_0}^{x_1} \Omega \delta d^2y = \int_{x_0}^{x_1} \Omega d^2 \delta y$$

$$= [\Omega \delta dy]_0^1 - [d\Omega \delta y]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} d^2\Omega \cdot \delta y,$$

ſ. f., ſo daß unter dem Integralzeichen $\int$ nur noch Glieder bleiben, welche der Variation δy multiplicirt ſind, und die Variationen $\delta dy, \delta d^2y,$ ꝛc. die im §. 369 angegebene Weiſe fortgeſchafft ſind. Dieſe Reductionen en die zweite Grundregel der Variationsrechnung.

§. 373. Die Variation des beſtimmten Integrales (V) erhält man auf allgemeinſte Weiſe, wenn man nicht blos die Function y und ihre Dif- nziale $dy, d^2y,$ ꝛc., ſondern auch die Veränderliche x und ihr Differenzial zu gleicher Zeit variiren läßt, was auf die Annahme hinausläuft, daß ſich r Punkt des im §. 370 betrachteten biegſamen Fadens ſowohl in dem me der Abſciſſen x, als in dem der Ordinaten y auf eine beliebige Weiſe rückt, oder verrücken kann. Dieſes vorausgeſetzt, ſei

$$dV = Xdx + Ydy + Y^{(1)}dy' + Y^{(2)}dy'' + Y^{(3)}dy''' + \text{ꝛc.}$$

$X, Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}, Y^{(3)},$ ꝛc. Functionen von $x, y, y', y'', y''',$ ꝛc. ſind, welche durch Differenziation findet, ſobald die Function V gegeben iſt; ſo hat man

$$\delta V = X\delta x + Y\delta y + Y^{(1)}\delta y' + Y^{(2)}\delta y'' + Y^{(3)}\delta y''' + \text{ꝛc.},$$

und nach dem eben Geſagten,

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V dx = \int_{x_0}^{x_1} V\delta dx + \int_{x_0}^{x_1} dx\delta V$$

$$= [V\delta x]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} (dx\delta V - dV\delta x).$$

Die Werthe von dV und δV geben:

$$dx\delta V - dV\delta x = Y(dx\delta y - dy\delta x) + Y^{(1)}(dx\delta y' - dy'\delta x)$$
$$+ Y^{(2)}(dx\delta y'' - dy''\delta x) + Y^{(3)}(dx\delta y''' - \delta y'''\delta x) + \text{ꝛc.}$$

Andererſeits hat man:

$$\delta y' = \delta\frac{dy}{dx} = \frac{dx\delta dy - dy\delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta y - y'd\delta x}{dx}$$

$$= \frac{d(\delta y - y'\delta x)}{dx} + y''\delta x,$$

$$\delta y'' = \frac{d(\delta y' - y''\delta x)}{dx} + y'''\delta x = \frac{d^2(\delta y - y'\delta x)}{dx^2} + y'''\delta x,$$

$$\delta y''' = \frac{d^3(\delta y - y'\delta x)}{dx^3} + y'''\delta x, \text{ ꝛc.}$$

Wenn man alſo der Kürze wegen

$$\delta y - y'\delta x = \delta u$$

ſetzt; ſo erhält man durch Subſtitution:

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V dx = [V\delta x]_0^1$$

$$+\int_{x_0}^{x_1} [Ydx\delta u + Y^{(1)}d\delta u + Y^{(2)}d\cdot\frac{d\delta u}{dx} + Y^{(3)}d\cdot\frac{d^2\delta u}{dx^3} + \text{ꝛc.}].$$

Nach der Regel im vorhergehenden § verrichtet man nun ſo viele theilweiſe Integrationen, als erforderlich ſind, um alle Differenzialzeichen d der Variation δu unter dem Zeichen $\int$ fortzuſchaffen. Subſtituirt man alsdann für δu ſeinen Werth wieder und läßt immer das Zeichen δ auf das Zeichen d folgen; ſo erhält man die folgende Formel:

$$\left.\begin{aligned}\delta\int_{x_0}^{x_1} Vdx = [V\delta x + (Y^{(1)} - \frac{dY^{(2)}}{dx} + \frac{d^2Y^{(3)}}{dx^2} \text{ ꝛc.})(\delta y - y'\delta x)\\ + (Y^{(2)} - \frac{dY^{(3)}}{dx} + \text{ ꝛc.})(\delta y' - y''\delta x) + \text{ ꝛc.}]_0^1\\ + \int_{x_0}^{x_1} [Y - \frac{dY^{(1)}}{dx} + \frac{d^2Y^{(2)}}{dx^2} - \frac{d^3Y^{(3)}}{dx^3} + \text{ ꝛc.}](\delta y - y'\delta x)dx.\end{aligned}\right\} (A)$$

Es iſt zu bemerken, daß bei der Beſtimmung der Ableitungen $\frac{d^iY^{(n)}}{dx^i}$ die Functionen $y, y', y'', \text{ ꝛc.}$, welche in $Y^{(n)}$ vorkommen können, als unentwickelte Functionen von x betrachtet ſind, ſo daß dieſe Ableitungen nicht würden verſchwinden können, ſelbſt wenn die Veränderliche x nicht explicite in $Y^{(n)}$ vorkäme.

Soll nun das Integral (V) ein Maximum oder Minimum werden, muß ſeine Variation verſchwinden, von welcher Beſchaffenheit die durch δx, y bezeichneten und mit x innerhalb der Ausdehnung des Integrales beliebig veränderlichen Incremente auch ſein mögen. Es muß alſo jedes Element des Integrales, welches im zweiten Theile der Gleichung (A) bleibt, einzeln verſchwinden, und folglich:

$$Y - \frac{dY^{(1)}}{dx} + \frac{d^2Y^{(2)}}{dx^2} - \frac{d^3Y^{(3)}}{dx^3} + \text{ꝛc.} = 0 \qquad (a)$$

ein.

Wenn ſich der erſte Theil der Gleichung auf eine Conſtante oder auf eine bloße Function von x reducirt; ſo kann ſie nicht mehr zur Beſtimmung einer Function $y = \varphi x$ dienen, welche der Bedingung des Maximums oder Minimums Genüge leiſtet, und die Aufgabe iſt unmöglich. Im Allgemeinen kann die Gleichung die Größen $x, y, y', \ldots y^{(2n)}$ enthalten, wenn $y^{(n)}$ die höchſte in V vorkommende Ableitung iſt; denn alsdann iſt $\pm \frac{d^n Y^{(n)}}{dx^n}$ das letzte Glied des erſten Theiles der Gleichung (a), und wenn $y^{(n)}$ in $Y^{(n)}$ vorkommt, ſo entſteht durch die Bildung dieſes Gliedes die Ableitung $y^{(2n)}$, weil nach dem oben Geſagten $y^{(n)}$ wie eine unentwickelte Function von x behandelt werden muß.

§. 374. Ehe wir weiter gehen, wollen wir bemerken, daß, wenn x keine durch δ ausgedrückte Variation erführe, oder wenn $\delta x = 0$ wäre in der Formel (A), die Bedingung, daß die unter dem Zeichen $\int$ befindliche Größe Element für Element verſchwinde, auf dieſelbe Gleichung (a) führen würde; es würde nur die Form der Glieder, welche ſich auf die Integrationsgrenzen beziehen, verändert, ſo wie die Gleichungen, welche man daraus ableitet, wenn man dieſe Glieder $= 0$ ſetzt, damit die Totalvariation des Integrales verſchwinde. Dieſes läßt ſich durch geometriſche Betrachtungen erklären und direct beweiſen. Denn es ſei MN (Fig. 88) die Curve $y = \varphi x$ und M'N' die Curve, in welche die eben erwähnte in Folge der Variation von y und von x übergeht. Man kann ohne Unterſchied annehmen, daß ein beliebiger zwiſchen den Endpunkten der erſten Curve liegender Punkt m derſelben auf der variirten Curve einem Punkte m' entſpricht, deſſen Abſciſſe und Ordinate von der Abſciſſe und Ordinate des Punktes m verſchieden ſind, oder einem Punkte μ, welcher dieſelbe Abſciſſe als der Punkt m hat, und deſſen Ordinate blos verändert iſt. Aber wenn die Endpunkte M, N nicht dieſelben Abſciſſen haben, als die Endpunkte M', N', ſo muß man annehmen, daß ſich die Abſciſſen und Ordinaten an den Grenzen gleichzeitig geändert haben. Man muß alſo auf dieſe Veränderlichkeit der Abſciſſen in den Grenzgleichungen Rückſicht nehmen, wenn die Abſciſſen der Endpunkte nach der Natur der Aufgabe nicht unveränderlich ſind, und da es gleichgültig iſt, ob man zwiſchen den Grenzen darauf Rückſicht nimmt, oder nicht, ſo muß die Gleichung, welche die Curve zwiſchen den Grenzen beſtimmt, dieſelbe bleiben.

Wenn man der Abſciſſe x eine Variation ertheilt, ſo iſt die Variation y nicht mehr $= \mu p - mp$, wie wenn die Abſciſſe unveränderlich iſt, ſondern $= m'p' - mp$. Man hat alſo:

$$\mu p = m'p' - m'\nu = m'p' - in,$$

wenigſtens, wenn $m'i = \mu m$ ſetzt, oder die unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung $d\delta y$ vernachläſſigt. Folglich iſt:

$$\mu p = y + \delta y - y'\delta x,$$

und man muß mithin in den in der Voraussetzung der Unveränderlichkeit von x abgeleiteten Formeln $\delta y = y'\delta x$ für δy setzen, um die Variation von x in Betracht zu ziehen. Aus demselben Grunde muß man $\delta y' - y''\delta x$ für δy setzen u. s. f.

§. 375. Man erhält die gesuchte Relation $y = \varphi x$, welche der Bedingung des Maximums oder Minimums genügt, wenn man die Gleichung (a) integrirt, d. h. wenn man von dieser Gleichung zwischen $x, y, y', \ldots y^{(2n)}$ zu der Gleichung zwischen x, y, woraus sie abgeleitet ist, und welche die Form:

$$\Phi(x, y, a_1, a_2, \ldots a_{2n}) = 0, \qquad (a)$$

hat, wo $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ willkürliche Constanten oder Parameter sind, zurückgeht (§. 164). Die Integration der Differenzialgleichungen werden wir später abhandeln, und für den Augenblick genügt es, anzugeben, wie die durch die Integration eingeführten willkürlichen Constanten nach den Daten der Aufgabe bestimmt werden.

Wenn man den zweiten Theil der Gleichung (A) nach Hinweglassung des Gliedes mit dem Zeichen f, welches vermöge der Gleichung (a) verschwindet, gleich Null setzt; so erhält man die Gleichung:

$$[V\delta x + (Y^{(1)} - \frac{dY^{(2)}}{dx} + \frac{d^2Y^{(3)}}{dx^2} - \text{&c.})\,(\delta y - y'\delta x)$$

$$+ (Y^{(2)} - \frac{dY^{(3)}}{dx} + \text{&c.})\,(\delta y' - y''\delta x) + \text{&c.}]_0^1 = 0. \qquad (b)$$

welche man auf die Form:

$$\Xi_1\delta x_1 + Y_1\delta y_1 + Y_1^{(1)}\delta y'_1 + \ldots + Y_1^{(n-1)}\delta y_1^{(n-1)}$$
$$- (\Xi_0\delta x_0 + Y_0\delta y_0 + Y_0^{(1)}\delta y'_0 + \ldots + Y_0^{(n-1)}\delta y_0^{(n-1)}) = 0, \qquad (\beta)$$

bringen kann, wenn man durch:

$$\Xi_0, \quad Y_0, \quad Y_0^{(1)}, \ldots Y_0^{(n-1)}, \qquad (c_0)$$

bekannte Functionen der Anfangswerthe x_0, y_0, y'_0, &c. und durch:

$$\Xi_1, \quad Y_1, \quad Y_1^{(1)}, \ldots Y_1^{(n-1)} \qquad (c_1)$$

Functionen bezeichnet, welche auf dieselbe Weise resp. aus den Endwerthen x_1, y_1, y'_1, &c. zusammengesetzt sind. Wenn nun die Werthe der Endgrößen:

$$x_0, x_1; \quad y_0, y_1; \quad y'_0, y'_1; \text{ &c.} \qquad (d)$$

Constanten sind, welche unmittelbar durch die Bedingungen der Aufgabe gegeben werden; so sind ihre Variationen:

$$\delta x_0, \delta x_1; \quad \delta y_0, \delta y_1; \quad \delta y'_0, \delta y'_1; \text{ &c.} \qquad (e)$$

Null, die Gleichung (β) wird von selbst erfüllt, und man hat zur Bestimmung der in dem Integrale (a) vorkommenden willkürlichen Constanten ebenso viele Gleichungen von der Form:

$$\Phi(x_0, y_0, a_1, a_2, \ldots a_{2n}) = 0,$$
$$\Phi(x_1, y_1, a_1, a_2, \ldots a_{2n}) = 0;$$
$$\Phi'(x_0, y_0, y'_0, a_1, a_2, \ldots a_{2n}) = 0,$$
$$\Phi'(x_1, y_1, y'_1, a_1, a_2, \ldots a_{2n}) = 0; \text{ &c.}$$

wo die Function Φ' durch die unmittelbare Differenziation der Function Φ erhalten wird u. s. f.

Wenn keiner der Werthe der Größen (d) gegeben ist; so sind ihre Variationen unbestimmt und unabhängig. Man kann also der Gleichung (β) nur

dadurch genügen, daß man jeden der Factoren (e_0), (e_1), einzeln gleich Null ſetzt, und die ſo erhaltenen Gleichungen vertreten die Stelle derer, welche die Werthe der Größen (d) direct geben würden, ſo daß man immer zur Beſtimmung der in dem Integrale (a) vorkommenden willkürlichen Conſtanten die hinreichenden Bedingungen hat.

Wenn endlich zwiſchen den Größen (d) eine gewiſſe Anzahl von Bedingungsgleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ꝛc. ſtattfinden, ſo leitet man daraus nach §. 154 die Relationen zwiſchen den durch:

$$\delta f_1 = 0, \quad \delta f_2 = 0, \text{ ꝛc.} \qquad (f)$$

ausgedrückten Variationen (e) ab, eliminirt aus der Gleichung (β) vermittelſt der Gleichung (f) ſo viel Variationen, als die Anzahl der Gleichungen (f) Einheiten hat, und ſetzt dann die Multiplicatoren der nicht eliminirten und willkürlich gebliebenen Variationen einzeln gleich Null, wodurch dieſer Fall auf die beiden zuerſt betrachteten zurückgeführt wird.

§. 376. Auch iſt zu bemerken, daß die Function V einen oder mehrere der Grenzwerthe (d) enthalten könnte, welche in der Gleichung (β) nothwendig vorkommen. Alsdann muß man, indem man die Variation δV nimmt, die fraglichen Größen variiren laſſen, wofern ihre Werthe nicht nach den Bedingungen der Aufgabe conſtant ſind. Wenn z. B. x_0, in V vorkäme und $\frac{dV}{dx_0} = \theta$ wäre; ſo wäre die Variation von V in Beziehung auf dieſe Größe $= \theta \delta x_0$, und wenn man die Function $\int \theta dx$ mit Θ bezeichnete, ſo hätte man in der Gleichung (A) und folglich in der Gleichung (β) ein neues Glied:

$$(\Theta_1 - \Theta_0)\delta x_0,$$

aber die Gleichung (a) bliebe unverändert.

§. 377. Wir wollen nun annehmen, daß die Function V zwei Functionen y, z der Veränderlichen x und ihre Ableitungen y', z'; y'', z''; ꝛc. enthalte, wie dieſes bei den Aufgaben über die Linien von doppelter Krümmung vorkommt. Wenn man

$$dV = Xdx + Ydy + Y^{(1)}dy' + Y^{(2)}dy'' + Y^{(3)}dy''' + \text{ꝛc.}$$
$$+ Zdz + Z^{(1)}dz' + Z^{(2)}dz'' + Z^{(3)}dz''' + \text{ꝛc.}$$

ſetzt, ſo kann man, ohne die Rechnungen zu wiederholen, welche die Formel (A) gegeben haben, ſetzen:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = [V\delta x]_0^1 \\
&+[(Y^{(1)} - \frac{dY^{(2)}}{dx} + \text{ꝛc.})(\delta y - y'\delta x) + (Y^{(2)} - \frac{dY^{(3)}}{dx} + \text{ꝛc.})(\delta y' - y''\delta x) + \text{ꝛc.}]_0^1 \\
&+[(Z^{(1)} - \frac{dZ^{(2)}}{dx} + \text{ꝛc.})(\delta z - z'\delta x) + (Z^{(2)} - \frac{dZ^{(3)}}{dx} + \text{ꝛc.})(\delta z' - z''\delta x) + \text{ꝛc.}]_0^1 \\
&+\int_{x_0}^{x_1} [Y - \frac{dY^{(1)}}{dx} + \frac{d^2Y^{(2)}}{dx^2} - \frac{d^3Z^{(3)}}{dx^3} + \text{ꝛc.}](\delta y - y'\delta x)dx \\
&+\int_{x_0}^{x_1} [Z - \frac{dZ^{(1)}}{dx} + \frac{d^2Z^{(2)}}{dx^2} - \frac{d^3Z^{(3)}}{dx^3} + \text{ꝛc.}](\delta z - z'\delta x)\delta x.
\end{aligned}\right\} (B)$$

Dieſe Formel führt zunächſt auf die beiden Gleichungen:

$$Y - \frac{dY^{(1)}}{dx} + \frac{d^2Y^{(2)}}{dx^2} - \frac{d^3Y^{(3)}}{dx^3} + \text{ꝛc.} = 0$$

$$Z - \frac{dZ^{(1)}}{dx} + \frac{d^2Z^{(2)}}{dx^2} - \frac{d^3Z^{(3)}}{dx^3} + \text{ꝛc.} = 0,$$

welches im Allgemeinen ſimultane Differenzialgleichungen ſind (§. 165), deren Integration ſich, wie wir geſehen haben, auf die einer gewöhnlichen Differenzialgleichung mit zwei veränderlichen Größen zurückführen läßt. Geſetzt, dieſe Integration wäre verrichtet, und man hätte die durch x ausgedrückten Werthe von y, z gefunden, welche bei der gehörigen Anzahl willkürlicher Conſtanten den vorhergehenden Gleichungen auf die allgemeinſte Weiſe genügen, ſo blieben noch die Werthe dieſer willkürlichen Conſtanten vermittelſt der ſich auf die Integrationsgrenzen beziehenden Bedingungen zu beſtimmen, und es iſt nicht nöthig, hier über dieſe Ausdehnung der weiter oben (§. 375) angedeuteten Rechnungen ein Mehreres zu ſagen.

§. 378. Die Veränderlichen x, y, z können durch eine Gleichung:

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (g)$$

mit einander verbunden ſein, wie bei den Aufgaben über Linien, die in einer gegebenen Fläche liegen müſſen, ſo folgt:

$$\frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z = 0.$$

Vermittelſt dieſer Gleichung ſchafft man δz aus der Formel (B) fort, und wenn man den unter dem Integralzeichen befindlichen Coefficienten von δy oder von δx nach der Subſtitution $= 0$ ſetzt; ſo erhält man die Differenzialgleichung:

$$\frac{dF}{dz}\left(Y - \frac{dY^{(1)}}{dx} + \text{ꝛc.}\right) - \frac{dF}{dy}\left(Z - \frac{dZ^{(1)}}{dx} + \text{ꝛc.}\right) = 0,$$

woraus man z vermittelſt der Gleichung (g) fortſchaffen kann.

§. 379. Wenn die Anzahl der Veränderlichen und die der Bedingungsgleichungen beträchtlicher wäre, ſo würde die Eliminationsrechnung durch Anwendung der Methode der unbeſtimmten Multiplicatoren eleganter gemacht (§. 154); aber die Anwendung dieſer Methode iſt beſonders dann bemerkenswerth, wenn die Bedingungsgleichungen nicht blos die Veränderlichen x, y, z, ... ſondern auch ihre Ableitungen y', y'', ... z', z'', ... ꝛc. enthalten, und es kommt alsdann darauf an, die Variationen der abgeleiteten Functionen blos von denen der urſprünglichen Functionen abhängig zu machen.

Es ſei alſo:

$$F(x, y, y', y'', \ldots z, z', z'', \ldots) = 0 \qquad (h)$$

eine ſolche Gleichung, ſo hat man $\delta F = 0$ und auch $\lambda\delta F = 0$, wo λ einen unbeſtimmten Multiplicator bedeutet, und da dieſe Gleichung für alle zwiſchen den Integrationsgrenzen liegende Werthe von x, y, z, ... ſtattfinden muß, ſo hat man auch:

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda\delta F dx = 0; \qquad (i)$$

aber alsdann bezeichnet λ einen Factor, welcher ſich mit der Abſciſſe verändern kann, oder eine unbekannte Function von x iſt. Die Gleichung (i) iſt die Summe unendlich vieler Gleichungen, wie $\lambda\delta F dx = 0$, wo die Veränder-

ichen $x, y, z, \ldots$ und $\delta \cdot V$ efficient λ für alle diese Gleichungen im Allgemeinen verschiedene aben.

Die Werthe v . als Functionen von x, welche das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda \int_{x_0}^{x_1} \delta \cdot V dx$$

verschwinden machen, reduzieren also auch das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} (\delta \cdot V dx + \lambda \delta F dx). \qquad (k)$$

auf Null.

Nach den Regeln der Elimination durch die Methode der unbestimmten Multiplicatoren muß man nach der Einführung des unbestimmten Factors λ, y, z als von einander unabhängige Functionen von x betrachten, so daß man, wenn man

$$dF = x dx + y dy + y^{(1)} dy' + y^{(2)} dy'' + \text{ꝛc.}$$
$$+ z dz + z^{(1)} dz' + z^{(2)} dz'' + \text{ꝛc.}$$

und nach der Anwendung der gewöhnlichen Methode der Variationen auf das Integral (k) die Factoren von $\delta y, \delta z$ unter dem Zeichen einzeln $= 0$ setzt, erhält:

$$\left.\begin{aligned} Y - \frac{dY^{(1)}}{dx} + \frac{d^2 Y^{(2)}}{dx^2} - \text{ꝛc.} + \lambda y - \frac{d \cdot \lambda y^{(1)}}{dx} + \frac{d^2 \cdot \lambda y^{(2)}}{dx^2} - \text{ꝛc.} = 0 \\ Z - \frac{dZ^{(1)}}{dx} + \frac{d^2 Z^{(2)}}{dx^2} - \text{ꝛc.} + \lambda z - \frac{d \cdot \lambda z^{(1)}}{dx} + \frac{d^2 \cdot \lambda z^{(2)}}{dx^2} - \text{ꝛc.} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (l)$$

Werden die drei Gleichungen (h) und (l) gleichzeitig integrirt, so geben sie die Werthe von λ, y, z als Functionen von x und den willkürlichen Constanten, und durch Elimination von λ kann man die Werthe von y, z als Functionen von x und der durch die Integration eingeführten Constanten einzeln erhalten. Werden die Grenzgleichungen auf eine ähnliche Weise behandelt; so bestimmen sie die Anfangs- und Endwerthe der Function λ, y, z und ihrer Ableitungen, und folglich die durch die Integration eingeführten willkürlichen Constanten. Besonders bei den Anwendungen der Berechnung der Variation der Integrale auf Probleme der Mechanik, wo man die Körper als continuirliche Massen betrachtet, ist diese Theorie der veränderlichen Multiplicatoren von hoher Wichtigkeit, worüber man insbesondere die Mécanique analytique von Lagrange zu Rathe ziehen muß. Bei den Aufgaben dieser Art ist die Function λ nicht mehr eine blos zur Bequemlichkeit der Rechnung eingeführte Hülfsveränderliche, sondern sie bezeichnet eine gewisse besondere Größe, deren Werth unumgänglich nothwendig angegeben werden muß, wenn die Auflösung der Aufgabe vollständig sein soll.

§. 380. Dieses führt uns auf die Erörterung der Theorie der relativen Maxima und Minima. Man sagt, man suche ein relatives Maximum oder Minimum, wenn es darauf ankommt, die Function $y = \varphi x$ zu bestimmen, welche das Integral $\int_{x_0}^{x_1} V dx$ zu einem Maximum oder Minimum macht, mit der Bedingung, daß ein anderes Integral $\int_{x_0}^{x_1} L dx$, welches von derselben Function y abhängt, einen constanten Werth behält. Dieses ist im Allgemeinen die Aufgabe, welche man sich bei den isoperimetrischen Problemen stellt, welche darin bestehen, unter den Curven von derselben Länge, d. h. unter denen, für welche das Integral:

$$\int_{x_0}^{x} \sqrt{1+y'^2}\cdot dx + \text{&c.} =$$

einen conſtanten Werth behält, diejenige zu beſtimmen, deren Ordinate y die Eigenſchaft hat, das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen.

In einem ſolchen Falle ſind die Variationen der Coordinaten x, y durch die Bedingungsgleichung:

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} L dx = 0$$

mit einander verbunden, und wenn man das Eliminationsverfahren durch die unbeſtimmten Multiplicatoren anwendet; ſo ergibt ſich daraus:

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx + \lambda \delta \int_{x_0}^{x_1} L dx = 0$$

wo λ einen conſtanten Coefficienten bezeichnet, oder:

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} (V + \lambda L)\, dx = 0. \qquad \text{(m)}$$

Der Coefficient λ iſt conſtant, weil man hier nur eine Bedingungsgleichung hat, welche ſich auf den Werth eines Integrales bezieht, und nicht, wie im vorhergehenden §, unendlich viele Bedingungsgleichungen, wovon jede für die Coordinaten in Beziehung auf ein Element des Integrales ſtattfindet. Ferner iſt einleuchtend, daß, wenn das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx$$

einen größten oder kleinſten Werth hat, und das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} L dx$$

conſtant bleiben muß, die Summe:

$$\int_{x_0}^{x_1} V dx + \lambda \int_{x_0}^{x_1} L dx = \int_{x_0}^{x_1} (V + \lambda L) dx,$$

wo λ eine conſtante Zahl bezeichnet, auch einen größten oder kleinſten Werth hat. Die Function $y = \varphi x$, welche man beſtimmt, wenn man die gewöhnlichen Regeln der Variationsrechnung auf die Formel (m) anwendet, enthält die unbeſtimmte Conſtante λ, deren Werth man durch die Bedingung beſtimmt, daß das Integral $\int_{x_0}^{x_1} L dx$, worin y und folglich λ vorkommt, einen conſtanten und gegebenen Werth hat.

Zu demſelben Reſultate kann man auch auf folgende Weiſe gelangen. Wir wollen

$$\int L dx = z, \quad \text{oder} \quad L - \frac{dz}{dx} = 0 \qquad \text{(n)}$$

ſetzen; ſo iſt z eine Function von x, welche man vermittelſt der Gleichung (n) als mit y und mit x verbunden betrachten kann. Man muß alſo in dieſem Falle die Methode im §. 379 anwenden, indem man die Gleichung (n) als eine Bedingungsgleichung behandelt, wodurch man erhält:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\delta\cdot V dx+\lambda\delta\cdot\left(L-\frac{dz}{dx}\right)dx\right]=0.$$

Das Glied:

$$\int_{x_0}^{x_1}\lambda\delta\cdot\frac{dz}{dx}dx=\int_{x_0}^{x_1}\lambda\delta dz$$

theilweiſe Integration:

$$[\lambda\delta z]_0^1-\int_{x_0}^{x_1}\frac{d\lambda}{dx}dx\delta z.$$

Die Veränderliche z kommt übrigens weder in V, noch in L vor, ſo daß das Glied mit der unabhängigen Variation δz nicht verſchwinden könnte, wenn nicht:

$$\frac{d\lambda}{dx}=0,\quad\text{oder}\quad\lambda=\text{const.}$$

wäre.

Man hat auch:

$$[\lambda\delta z]_0^1=\lambda(\delta z_1-\delta z_0)=0,$$

weil λ conſtant und nach der Vorausſetzung die Größe:

$$z_1-z_0=\int_{x_0}^{x_1}Ldx$$

ebenfalls conſtant iſt, ſo daß man nur noch die Variation des Integrales:

$$\int_{x_0}^{x_1}(V+\lambda L)dx,$$

wo λ einen conſtanten Coefficienten bezeichnet, verſchwinden zu laſſen braucht.

Dieſe Analyſe erſtreckt ſich ſogar auch auf den Fall, wo man eine größere Anzahl von Integralen hätte, die conſtante Werthe behalten müſſen.

§. 381. Bisher haben wir nur die gemeinſchaftlichen Bedingungen des Maximums oder des Minimums betrachtet; allein es müßten auch die Mittel zur allgemeinen Unterſcheidung des Maximums und Minimums und zur Erkennung der Ausnahmefälle, wo die Variation des Integrales verſchwinden kann, ohne daß deswegen ein Maximum oder Minimum ſtattfindet, angegeben werden.

Nach den allgemeinen Prinzipien über die Maxima und Minima (§. 91 und folg.) ſieht man ſofort ein, daß ſich dieſe Analyſe der Beſtimmung der Variationen der zweiten Ordnung eines Integrales oder der Variationen ſeiner Variationen anſchließen muß; allein bei den gewöhnlichen Anwendungen braucht man in dieſe complicirte Analyſe nicht einzugehen, weil ſich aus der Natur der Aufgabe die Unmöglichkeit des Maximums oder Minimums erkennen läßt; ſo daß über den Sinn des erhaltenen Reſultates keine Zweideutigkeit ſtattfinden kann, wenn gleich man blos die Variationen der erſten Ordnung betrachtet.

Auch iſt zu bemerken, daß wir uns nicht mit der Beſtimmung des Maximums oder Minimums eines beſtimmten Integrales beſchäftigen, wenn die Function unter dem Integralzeichen $\int$ zwiſchen den Integrationsgrenzen durch das Unendliche geht, ſo daß die Integrale nicht mehr als Summen unendlich kleiner Differenzialelemente betrachtet werden können.

In dem folgenden Kapitel wollen wir zur Erläuterung der vorhergehenden allgemeinen Theorie einige Beiſpiele betrachten.

Achtes Kapitel.

Anwendungen der Berechnung der Variationen einfacher Integrale. — Ausdehnung der Methode der Variationen auf doppelte Integrale.

I. Anwendungen der Bestimmung der Variationen einfacher Integrale auf Probleme über die Maxima und Minima.

§. 382. **Von der kürzesten Linie auf einer gegebenen Oberfläche.** — Da die von einem Punkte auf eine Linie oder Fläche gefällte Normale die kürzeste oder längste gerade Linie ist, welche man von diesem Punkte nach dieser Linie oder Fläche ziehen kann; so ist leicht einzusehen, daß die längste oder kürzeste Linie, welche zwischen zwei Linien oder Flächen gezogen werden kann, die gemeinschaftliche Normale dieser beiden Linien oder Flächen ist. Wir begnügen uns, die Anwendung der allgemeinen Formeln des vorhergehenden Kapitels auf einen solchen einfachen Fall anzudeuten, und gehen zu der Aufgabe über, welche zum Zwecke hat, die kürzeste Linie zu bestimmen, die man auf einer gegebenen Oberfläche zwischen zwei festen Punkten oder zwischen zwei festen krummen Linien auf der gegebenen Oberfläche ziehen kann. Offenbar würde die Aufgabe keine Auflösung gestatten, wenn man die Bedingung des Maximums für die des Minimums substituirte, wofern man keine Beschränkungen hinzufügte, wie z. B. die, daß die gesuchte Curve eine ebene sein muß.

Das Integral, welches zu einem Minimum gemacht werden soll ist:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2}\cdot dx,$$

woraus folgt, wenn man $\sqrt{1+y'^2+z'^2} = V$ setzt:

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V dx = \left[\frac{\delta x + y'\delta y + z'\delta z}{V}\right]_0^1$$

$$+\int_{x_0}^{x_1'} dx\left[\frac{d\left(\frac{y'}{V}\right)}{dx}(\delta y - y'\delta x) + \frac{d\left(\frac{z'}{V}\right)}{dx}(\delta z - z'\delta x)\right].$$

Es sei $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Oberfläche, auf welcher sich die gesuchte Linie befinden muß, so hat man:

$$\frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z = 0,$$

woraus folgt, wenn man δx unter dem Zeichen $\int$ wegschafft und die Multiplicatoren von $\delta y, \delta z = 0$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{y'}{V}\right)}{dx} + y'\frac{dF}{dy}\cdot\frac{d\left(\frac{z'}{V}\right)}{dx} = 0 \\ \frac{d\left(\frac{z'}{V}\right)}{dx} + y'\frac{dF}{dz}\cdot\frac{d\left(\frac{y'}{V}\right)}{dx} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

a. Fall eine Be.

: da ſich die geſuchte Curve auf der gegebenen Oberfläche befinden muß; ind die Ableitungen y', z' durch die Gleichung:

$$\frac{dF}{dx} + y'\frac{dF}{dy} + z'\frac{dF}{dz} = 0$$

einander verbunden, und die beiden Gleichungen (1) werden identiſch, wie der Fall ſein muß, und nehmen die Form an:

$$\frac{dF}{dx} \cdot \frac{d\left(\frac{y'}{V}\right)}{dx} = \frac{dF}{dy} \cdot \frac{d\left(\frac{z'}{V}\right)}{dx} . \qquad (2)$$

dieſe letzte Gleichung müßte man die aus der Gleichung der gegebenen erfläche abgeleiteten Werthe von z, z' als Functionen von x, y, y' ſubſti- ren und integriren; allein wir wollen unter Beibehaltung der Allgemeinheit Function F aus der Gleichung (2) den Beweis einer charakteriſtiſchen enſchaft der Curven ableiten, welche den Bedingungen der Aufgabe Genüge ten. Wenn man, wie gewöhnlich, mit s den Bogen der Curve bezeichnet; hat man die Gleichungen:

$$\frac{y'}{V} = \frac{dy}{ds}, \qquad \frac{z'}{V} = \frac{dz}{ds},$$

möge welcher ſich die Gleichung (2) in die Proportion:

$$\frac{dF}{dy} : \frac{dF}{dz} :: \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds} : \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}$$

wandelt, woraus wegen der Symmetrie folgt:

$$\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy} : \frac{dF}{dz} :: \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds} : \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds} : \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds} . \qquad (3)$$

r wenn man durch λ, μ, ν; λ', μ', ν' die Winkel bezeichnet, welche die rmale der gegebenen Oberfläche und der Krümmungshalbmeſſer der geſuchten ie mit den Parallelen zu den poſitiven Coordinatenaxen bilden; ſo geht die portion (3) über in:

os. λ : cos. μ : cos. ν :: cos. λ' : cos. μ' : cos. ν'. (§. 228 und 237.)

glich iſt $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$. Alſo iſt die Osculationsebene der auf gegebenen Oberfläche ſo gezogenen Linie, daß ſie zwiſchen zwei beliebigen nkten kürzer iſt, als jede andere Linie, welche in derſelben Fläche liegt, durch dieſelben beiden Punkte geht, auf der gegebenen Oberfläche beſtän- normal.

§. 383. Die Grenzgleichung:

$$\left[\frac{\delta x + y'\delta y + z'\delta z}{V}\right]_0^1 = 0$$

d von ſelbſt erfüllt, wenn die beiden Endpunkte der geſuchten Curve be- mmt und der Lage nach gegeben ſind, denn man hat alsdann:

$$\delta x_0 = 0, \quad \delta y_0 = 0, \quad \delta z_0 = 0; \quad \delta x_1 = 0, \quad \delta y_1 = 0, \quad \delta z_1 = 0.$$

Wir wollen nun annehmen, daß dem nicht ſo ſei, ſondern daß jeder der den Endpunkte ſich in einer auf der gegebenen Oberfläche gezogenen gege- nen Curve befinden müſſe; ſo hat man in jedem dieſer beiden Endpunkte,

wenn man der Einfachheit wegen die sie particularisirenden Indices 0, 1 hinwegläßt:

$$\delta x + y'\delta y + z'\delta z = 0,$$

oder:

$$1 + y'\frac{\delta y}{\delta x} + z'\frac{\delta z}{\delta x} = 0. \qquad (4)$$

Da sich nun der Endpunkt (x, y, z) auf einer gegebenen Linie befinden muß, so sind $\frac{\delta y}{\delta x}, \frac{\delta z}{\delta x}$ Größen, welche durch diese Linie bestimmt werden, und die trigonometrischen Tangenten der Winkel messen, welche die Projectionen der Tangente dieser Linie im Punkte (x, y, z) auf die Ebenen der xy und der xz mit der Axe der x bilden. Andererseits sind y', z' die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Projectionen der durch den Endpunkt der kürzesten Linie gezogenen Tangente auf dieselben Ebenen mit derselben Axe bilden. Die Gleichung (4) drückt also aus, daß die kürzeste Linie die beiden auf der gegebenen Oberfläche liegenden Linien, auf welchen sich ihre Endpunkte resp. befinden sollen, unter rechten Winkeln durchschneidet.

§. 384. Ueber die Rotationsoberfläche von dem kleinsten Flächeninhalte. — Man soll in der Ebene der xy die durch zwei gegebene Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1) gehende Curve bestimmen, welche bei ihrer Umdrehung um die Axe der x eine Rotationsoberfläche von dem kleinsten Flächeninhalte erzeugt. Das Integral, dessen Variation verschwinden muß, ist nach §. 350:

$$\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\cdot dx \qquad (5)$$

und die Gleichung (a) im §. 373 verwandelt sich in diesem besondern Falle in:

$$\sqrt{1+y'^2} - \frac{d\left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)}{dx} = 0, \quad \text{oder} \quad 1 - \frac{d\left(y\frac{dy}{ds}\right)}{ds} = 0.$$

Wenn man s zur unabhängigen Veränderlichen nimmt, so bekommt diese Gleichung die Form:

$$1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - y\frac{d^2y}{ds^2} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - y\frac{d^2y}{ds^2} = 0. \qquad (6)$$

Aber in derselben Voraussetzung hat man:

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2} = 0, \qquad (7)$$

so daß sich die Gleichung (6) in:

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds} + y\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\left(y\frac{dx}{ds}\right)}{ds} = 0$$

verwandelt. Hieraus folgt:

$$y\frac{dx}{ds} = b, \qquad (8)$$

wo b eine willkürliche Conſtante bezeichnet, und folglich hat man, wenn man zum Quadrate erhebt, und für ds^2 ſeinen Werth ſetzt:

$$dx = \frac{bdy}{\sqrt{y^2 - b^2}}, \qquad (9)$$

und endlich gibt eine neue Integration:

$$x - x_0 = b\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - b^2}} = b \log. \left(\frac{y + \sqrt{y^2 - b^2}}{y_0 + \sqrt{y_0{}^2 - b^2}} \right).$$

Da die Coordinaten der beiden Endpunkte gegebene Conſtanten ſind, ſo wird die Grenzgleichung von ſelbſt erfüllt.

Nach der Gleichung (8) drückt die Conſtante b den Werth der Ordinate y für den Punkt der Curve aus, worin die Tangente zu der Axe der x parallel iſt, und der Werth derſelben könnte näherungsweiſe beſtimmt werden, wenn man die Wurzel der transcendenten Gleichung:

$$x_1 - x_0 = b \log. \left(\frac{y_1 + \sqrt{y_1{}^2 - b^2}}{y_0 + \sqrt{y_0{}^2 - b^2}} \right)$$

durch ſucceſſive Annäherungen berechnete.

Um der Gleichung der Curve, welche der Aufgabe Genüge leiſtet, die einfachſte Form zu geben, wollen wir die Axe der y durch den Punkt der Curve gehen laſſen, worin die Tangente zur Axe der x parallel iſt, was darauf hinausläuft, die Gleichung (9) unter der Vorausſetzung zu integriren, daß man zugleich $x = 0$ und $y = b$ hat; ſo kommt:

$$x = b \log. \left(\frac{y + \sqrt{y^2 - b^2}}{b} \right), \quad y + \sqrt{y^2 - b^2} = be^{\frac{x}{b}},$$

folglich:

$$y - \sqrt{y^2 - b^2} = \frac{b^2}{y + \sqrt{y^2 - b^2}} = be^{-\frac{x}{b}},$$

und mithin:

$$y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}} \right). \qquad (10)$$

Aus der Gleichung (8) folgt alsdann, wenn man den Punkt, deſſen Abſciſſe Null iſt, zum Anfangspunkte der Bogen nimmt:

$$s = \frac{1}{b}\int_0^x ydx = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}} \right).$$

Die Curve, deren Gleichung wir eben gefunden haben, iſt unter dem Namen der Kettenlinie bekannt, weil, wie in der Mechanik bewieſen wird, ein ſchwerer homogener, vollkommen biegſamer und an beiden Enden aufgehangener Faden, die Geſtalt dieſer Curve annimmt. Galiläi, welcher ſich damit beſchäftigt hat, verwechſelte ſie mit der Parabel, aber Leibnitz hat die Conſtruction derſelben auf die zweier logarithmiſcher Linien, welche aus der Gleichung (10) folgt, zurückgeführt.

Die Kettenlinie bietet, wie die Cycloide, außer den bereits angeführten, noch mehrere merkwürdige Eigenſchaften dar. Es ſei MBM′ (Fig. 89) eine in Beziehung auf die Axe OY ſymmetriſche Kettenlinie und XX′ die Axe, um

welche ſich die Curve drehen muß, um die Rotationsoberfläche von dem kleinſten Flächeninhalte zu erzeugen; ſo drückt die kleinſte Ordinate OB den Parameter b aus. Vermöge der Gleichungen (8) und (10) hat man:

$$\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=\frac{y}{b},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y}{b^2},$$

ſo daß in allen Punkten der Kettenlinie die Normale (§. 172) und der Krümmungshalbmeſſer (§. 193) den gemeinſchaftlichen Werth $\frac{y^2}{b}$ haben. Im Scheitel B hat der Krümmungshalbmeſſer ſeinen kleinſten Werth und iſt dem Parameter b gleich.

Wenn man von dem Fußpunkte P der Ordinate PM $=y$ auf die Tangente MT das Perpendikel Pμ fällt; ſo hat man:

$$P\mu : MP :: PT : MT.$$

Es iſt aber:

$$PT=\frac{by}{\sqrt{y^2-b^2}},\qquad MT=\frac{y^2}{\sqrt{y^2-b^2}},$$

und folglich hat das Perpendikel Pμ einen conſtanten Werth und iſt dem Parameter b gleich. Hieraus folgt:

$$M\mu=\sqrt{y^2-b^2}.$$

Die Fläche OBMP wird ausgedrückt durch:

$$\int_0^x ydx=b\int_y^h\frac{ydy}{\sqrt{y^2-b^2}}=b\sqrt{y^2-b^2}$$

und wegen der Gleichung (8) hat man:

$$\text{Bog. BM}=s=\frac{1}{b}\int_0^x ydx=\sqrt{y^2-b^2}.$$

Die Kettenlinie iſt alſo eine Curve, für welche die von ihr eingeſchloſſene Fläche und die Länge ihres Bogens durch algebraiſche Functionen der Ordinate ausgedrückt werden.

Wir haben eben gefunden, daß der Bogen BM der geraden Linie Mμ gleich iſt, und folglich gehört der Punkt μ einer Evolvente der Kettenlinie an, deren Rückkehrpunkt im Scheitel B der Evolute liegt. Dieſe Evolvente NBN' iſt in Beziehung auf die Axe der y ſymmetriſch und hat die Axe der x zur Aſymptote. Der Theil der geraden Linie $\mu P=b$ iſt die Tangente der Curve NBN', welche alſo die merkwürdige Eigenſchaft darbietet, daß ſie eine Tangente von conſtanter Größe hat. Dieſe intereſſanten Bemerkungen ſind zuerſt von Ampère angegeben.

§. 385. Curve des ſchnellſten Falles oder Brachiſtochrone.*) So nennt man nämlich die Curve, längs welcher ein ſchwerer materieller Punkt herabfallen müßte, um am ſchnellſten von einem Punkte zu einem andern, nicht

*) Und nicht Brachyſtochrone, wie man gewöhnlich nach der barbariſchen Ortographie zu ſchreiben pflegt; denn dieſes Wort kommt nicht unmittelbar von dem Adjective βραχὺς, welches denſelben Sinn und dieſelbe Wurzel, als das lateiniſche Adjectiv brevis hat, ſondern von dem Superlative βράχιστος her, woraus das υ verſchwunden iſt.

auf derſelben Verticale liegenden, zu gelangen, wenn von der Reibung auf der Curve und von dem Widerſtande des umgebenden Mittels abſtrahirt wird. Da zu beiden Seiten der durch die beiden Endpunkte der Curve gelegten Vericalebene Alles ſymmetriſch iſt; ſo muß die Curve nothwendig in dieſer Vericalebene liegen, welche wir daher zu der Ebene der xy nehmen wollen, indem die poſitiven Abſciſſen x auf der Verticale von oben nach unten gezählt werden. Es ſeien x_0, x_1 die Abſciſſen des Anfangs- und Endpunktes des durchlaufenen Weges; ſo muß nach mechaniſchen Lehren das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{x-x_0}} \cdot dx$$

zu einem Minimum gemacht werden, wodurch man erhält:

$$d\left(\frac{y'}{\sqrt{(x-x_0)\ (1+y'^2)}}\right)=0, \quad \frac{y'}{\sqrt{(x-x_0)\ (1+y'^2)}}=b$$

$$\frac{1}{y'}=\frac{dx}{dy}=\sqrt{\frac{\frac{1}{b^2}-(x-x_0)}{x-x_0}}.$$

Wir wollen $\frac{1}{b^2}=2R$ und $x_0=0$ ſetzen, d. h. die Axe der x durch den Anfangspunkt der Bewegung gehen laſſen; ſo erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{dx}{dy}=\sqrt{\frac{2R-x}{x}},$$

welches die einer Cycloide iſt, wovon ein Bogen dieſen Anfangspunkt der Bewegung zum Fußpunkte hat (§. 177). Der Halbmeſſer R des Erzeugungskreiſes wird durch die Bedingung beſtimmt, daß die Cycloide durch den Endpunkt des von dem Körper durchlaufenen Weges gehen muß.

§. 386. Iſoperimetriſche Probleme. — Man ſoll die Curve finden, deren, durch die Ordinaten der Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1) begrenzte Fläche $\int_{x_0}^{x_1} y\,dx$ ein Maximum oder Minimum iſt, indem der Curvenbogen zwiſchen denſelben beiden Punkten eine gegebene Länge hat. Nach §. 380 muß man ſetzen:

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} (y+\lambda\sqrt{1+y'^2})\,dx=0,$$

wo λ einen conſtanten Coefficienten bezeichnet, ſo erhält man:

$$1-\lambda\cdot\frac{d\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)}{dx}=0,$$

woraus folgt, wenn man integrirt, und den $y'=0$ entſprechenden Werth von x mit ξ bezeichnet:

$$x-\xi=\pm\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad y'=\frac{dy}{dx}=\pm\frac{x-\xi}{\sqrt{\lambda^2-(x-\xi)^2}}.$$

Integrirt man nochmals und bezeichnet den $x = \xi$ entsprechenden Werth von y mit η; so kommt:

$$y - \eta = \mp\sqrt{\lambda^2 - (x-\xi)^2}, \quad \text{oder} \quad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \lambda^2.$$

Die gesuchte Curve ist also ein Kreis, dessen Halbmesser $= \lambda$ und dessen Mittelpunkt der Punkt (ξ, η) ist. Die drei Constanten ξ, η, λ werden durch die Bedingung bestimmt, daß der Kreis durch die beiden Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1) gehen und der zwischen diesen beiden Punkten liegende Bogen eine gegebene Länge haben muß. Es findet eine doppelte Auflösung statt, indem der Kreisbogen, welcher der Axe der x seine Concavität zukehrt, dem Maximum und der, welcher dieser Axe seine Convexität zukehrt, dem Minimum entspricht. Hieraus folgt, daß der Kreis die geschlossene Curve ist, welche bei demselben Umfange die größte Fläche umschließt, wie es die Alten auch durch die reine Geometrie bewiesen haben.

Wenn man in der Aufgabe im §. 384 noch die Bedingung hinzufügt, daß die gesuchte Curve eine von denen sein soll, welche zwischen den Punkten (x_0, y_0), (x_1, y_1) eine constante und gegebene Länge haben; so muß in der Gleichung (8) die Veränderliche y durch $y + \lambda$ ersetzt werden. Uebrigens sind die Rechnungen dieselben und führen ebenfalls auf die Gleichung der Kettenlinie, in welche eine neue willkürliche Constante eingeführt wird; aber man hat auch eine neue Bedingungsgleichung, welche sich daraus ergibt, daß die Curve zwischen den beiden Endpunkten eine constante gegebene Länge haben muß.

§. 387. Als letztes Beispiel wollen wir unter den ebenen isoperimetrischen Curven, welche von zwei festen Punkten (x_0, y_0), (x_1, y_1) begrenzt werden, die zu bestimmen suchen, welche, wenn sie sich um die Axe der x dreht, eine Rotationsoberfläche beschreibt, so daß das von ihr eingeschlossene Volumen $\pi \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$ ein Maximum oder Minimum ist.

Die analytische Bedingung der Aufgabe ist:

$$\delta \cdot \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + \lambda^2\sqrt{1+y'^2})dx = 0,$$

wo der Homogeneität wegen λ^2 statt λ gesetzt ist, und sie gibt:

$$2y = \lambda^2 \cdot \frac{d\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)}{dx} = \lambda^2 \cdot \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dx}, \qquad (11)$$

oder vielmehr, wenn man den Bogen s zur unabhängigen Veränderlichen nimmt:

$$2y = \lambda^2 \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \frac{dx}{ds}.$$

Substituirt man für $\frac{d^2y}{ds^2}$ seinen aus der Gleichung (7) abgeleiteten Werth; so kommt:

$$2y\frac{dy}{ds} = -\lambda^2 \frac{d^2x}{ds^2},$$

woraus folgt, wenn man integrirt und den Werth der Ordinate y für den Punkt der Curve, worin die Tangente auf der Axe der x senkrecht ist, mit b bezeichnet:

$$y^2 - b^2 = -\lambda^2 \frac{dx}{ds} = -\frac{\lambda^2}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Dieſe letzte Gleichung gibt:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \pm \frac{(y^2-b^2)dy}{\sqrt{\lambda^4-(y^2-b^2)^2}}, \\ \text{d folglich:}\quad dx &= \mp \frac{\lambda^2 dy}{\sqrt{\lambda^4-(y^2-b^2)^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

ine neue Integration würde den Werth von x durch y ausgedrückt, mit einer illkürlichen Conſtante geben, und dieſe Conſtante, ſo wie die beiden andern arameter b, λ würden durch die Bedingung beſtimmt, daß die Curve durch e Punkte (x_0, y_0), $x_1, y_1)$ gehen und zwiſchen dieſen Punkten eine gege- ne Länge haben muß.

Wir wollen $b = 0$ ſetzen, d. h. die Axe der x durch den Punkt der Curve hen laſſen, worin die Tangente auf dieſer Axe ſenkrecht iſt, und dieſen Punkt wohl zum Anfangspunkte der Coordinaten x, y, als des Bogens s, welchem ir daſſelbe Zeichen als der Abſciſſe x beilegen, nehmen; ſo kommt:

$$x = \int_0^y \frac{y^2 dy}{\sqrt{\lambda^4 - y^4}}, \quad s = \lambda^2 \cdot \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\lambda^4 - y^4}}.$$

Es ſei $y = \lambda \cos.\varphi$, wo φ eine neue Veränderliche bezeichnet; ſo hat man:

$$= -\frac{\lambda \sin.\varphi \cos.^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\cos.^4\varphi}} = -\frac{\lambda \cos.^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1+\cos.^2\varphi}} = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos.^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin.^2\varphi}}$$

$$= -\frac{\lambda d\varphi}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin.^2\varphi} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin.^2\varphi}}\right),$$

$$= -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin.^2\varphi}},$$

ıd folglich:

$$= -\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\left(2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin.^2\varphi} \cdot d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin.^2\varphi}}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\left[2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right)\right], \quad (13)$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right)\right].$$

Nach der periodiſchen Natur der Functionen F, E iſt leicht einzuſehen, ıß die durch die Gleichung (13) ausgedrückte Curve einen periodiſchen Lauf ıt, wie in Fig. 90 angegeben iſt. Da die größte Ordinate PM den Werth hat; ſo werden die Werthe der zugehörigen Abſciſſe $OP = \frac{1}{2} OA$ und der ogen OM ausgedrückt durch:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \cdot \left[2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right], \quad \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \cdot F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Die Continuität der Curve wird in den Wendepunkten O, A, ꝛc., ſo w die der Function s nicht unterbrochen, wie dieſes bei andern Curven, z namentlich bei der Lemniscate (§. 386) der Fall iſt, deren Bogen ebenfa durch die elliptiſche Function $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right)$ ausgedrückt wird.

Die Betrachtung, deren wir uns zur Vereinfachung des Ausdruckes d Integrale der Differenzialgleichungen (12) bedient haben, würden nicht me anwendbar ſein, 1) wenn die Conſtante b einen imaginären Werth von d Form $b'\sqrt{-1}$ haben müßte, wobei die in Rede ſtehenden Integrale au ſehr wohl, obgleich auf eine weniger einfache Weiſe, durch elliptiſche Fun tionen ausgedrückt werden könnten, und 2) wenn zwiſchen den Conſtanten b, die Relation $b = \lambda$ ſtattfände. Aber in dieſem letzten Falle hätte man:

$$dx = \pm \frac{(y^2 - \lambda^2)\,dy}{y\sqrt{2\lambda^2 - y^2}}, \quad ds = \mp \frac{\lambda^2 dy}{\lambda\sqrt{2\lambda^2 - y^2}}$$

folglich:

$$x = \text{const.} \pm \sqrt{2\lambda^2 - y^2} \pm \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \log. \left(\frac{\sqrt{\lambda\sqrt{2} + y} - \sqrt{\lambda\sqrt{2} - y}}{\sqrt{\lambda\sqrt{2} + y} + \sqrt{\lambda\sqrt{2} - y}} \right).$$

Man kann die willkürliche Conſtante hinweglaſſen, wenn man die Axe der durch den Punkt gehen läßt, deſſen Ordinate $y = \lambda\sqrt{2}$ iſt. Uebrigens durc ſchneidet die Curve, welche durch dieſe Gleichung ausgedrückt wird, und zw ſchen den geraden Linien $y = \pm \lambda\sqrt{2}$ liegt, die Axe der x nicht in unendli vielen Punkten, wie dieſes bei der Gleichung (13) der Fall iſt, ſondern b dieſe Axe zur Aſymptote; denn wenn man $y = 0$ ſetzt, ſo erhält man $\frac{dy}{dx} =$ und $x = \pm\infty$.

Die Curve, wovon die erſte der Gleichungen (12) die Differenzialgle chung iſt, iſt unter dem Namen der elaſtiſchen Curve bekannt, weil ei elaſtiſche Ruthe oder Stange, welche in ihrer natürlichen Lage gerade iſt, die Geſtalt annimmt, wenn ſie an dem einen Ende befeſtigt iſt und durch eine dem andern Ende ſchicklich angebrachte Kraft gekrümmt wird. Man nennt die Curve auch die Lintearia, weil ſie die Form des ſenkrechten Durchſchnitt einer vollkommen biegſamen, an zwei Erzeugungslinien aufgehangenen und m einer ſchweren Flüſſigkeit gefüllten cylindriſchen Hülle deren Krümmung dur den Druck der Flüſſigkeit beſtimmt wird, darſtellt.

Eigentlich wird die Lintearia durch die Bedingung beſtimmt, daß d Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$$

ein Maximum wird, während die Integralen:

$$\int_{x_0}^{x_1} y dx, \quad \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

conſtante Werthe haben, d. h. durch die Gleichung:

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + \lambda' y + \lambda^2 \sqrt{1 + y'^2})\, dx = 0,$$

aus folgt:

$$2\gamma + \lambda' = \lambda^2 \cdot \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dx}.$$

man nur die Ordinaten y um die conſtante Größe $\frac{\lambda'}{2}$ zu vermindern

nicht, um dieſe Gleichung auf die Gleichung (11) zurückzuführen, ſo iſt r, daß die Gleichung der Lintearia mit der der elaſtiſchen Curve zuſammen- len muß, ſo lange man die Conſtanten nicht particulariſirt.

II. Ausdehnung der Methode der Variationen auf doppelte Integrale.

§. 388. Es ſei:

$$\int\int V dx dy$$

doppeltes Integral, deſſen anfangs als unveränderlich vorausgeſetzte Gren- durch eine in der Ebene der x, y liegende geſchloſſene Curve $m_0 n_0 m_1 n_1$ g. 80) beſtimmt werden (§. 354), und wir wollen annehmen, daß V außer unabhängigen Veränderlichen x, y eine Function z derſelben und ihre par- len Ableitungen der erſten und zweiten Ordnung p, q, r, s, t enthalte, lche Vorausſetzung für die Bedürfniſſe der Anwendungen hinreichend allge- in iſt; ſo kommt es darauf an, die Function z ſo zu beſtimmen, daß das ebene Integral einen größten oder kleinſten Werth bekommt.

Wir wollen

$$dV = X dx + Y dy + Z dz + P dp + Q dq + R dr + S ds + T dt$$

en, ſo daß in der Vorausſetzung conſtanter Grenzen, wo die Variationen und δy als von ſelbſt verſchwindend betrachtet werden können (§. 374),

$$\delta V = Z\delta z + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + S\delta s + T\delta t$$

und folglich die Gleichung der Aufgabe:

$$\int\int [Z\delta z + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + S\delta s + T\delta t] dx dy = 0. \qquad (14)$$

Man muß die Glieder mit δp, δq, ꝛc. einzeln betrachten, um mit ihnen Transformation vorzunehmen, welche das Weſen der Variationsrechnung machen. Man hat:

$$\int\int P\delta p \cdot dx dy = \int\int P\delta \frac{dz}{dx} \cdot dx dy = \int\int P \frac{d\delta z}{dx} \cdot dx dy$$

$$= \int P dy \cdot \delta z - \int\int \frac{dP}{dx} dx dy \cdot \delta z.$$

In dieſer Gleichung wird das doppelte Integral:

$$\int\int \frac{dP}{dx} dx dy \cdot \delta z$$

zwiſchen denſelben Grenzen, wie das gegebene doppelte Integral, genom- , betrachtet, und was das einfache Integral $\int P dy \delta z$ anlangt, welches ch eine erſte Integration in Beziehung auf die Veränderliche x erhalten wurde; muß man ſich zur Beſtimmung ſeines Werthes vorſtellen, daß nach dieſer en Integration für x ſucceſſive die Werthe $\psi_1 y$, $\psi_0 y$ ſubſtituirt ſind, und

das zweite Reſultat von dem erſten abgezogen iſt (§. 354), was wir Kürze wegen durch:

$$\left[\int P dy \cdot \delta z\right]_{\psi_0 y}^{\psi_1 y}$$

andeuten wollen, wo die zweite Integration in Beziehung auf y übrigens zu ſchen den Grenzen:

$$y = Oq_1 = y_1, \quad y = Oq_0 = y_0$$

genommen werden muß. Wir werden alſo ſchreiben:

$$\iint P\delta p \cdot dxdy = \left[\int_{y_0}^{y_1} P dy \cdot \delta z\right]_{\psi_0 y}^{\psi_1 y} - \iint \frac{dP}{dx} dxdy \cdot \delta z.$$

Ebenſo würde man finden:

$$\iint Q\delta q \cdot dxdy = \left[\int_{x_0}^{x_1} Q dx \cdot \delta z\right]_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} - \iint \frac{dQ}{dy} dxdy \cdot \delta z,$$

wo die Function φ nach dem in dem angeführten § Geſagten das Umgekehrte von ψ iſt.

Hierauf erhält man:

$$\iint R\delta r \cdot dxdy = \iint R \frac{d^2 \delta z}{dx} dxdy = \int R dy \frac{d\delta z}{dx} - \iint \frac{dR}{dx} \cdot \frac{d\delta z}{dx} dxd$$

$$= \int R dy \delta \cdot \frac{dz}{dx} - \int \frac{dR}{dx} dy \delta z + \iint \frac{d^2 R}{dx^2} dxdy \cdot \delta z,$$

oder wenn man die Grenzen der Integrale nach der vorhin angewandten Bezeichnung andeutet:

$$\iint R\delta r \cdot dxdy = \left[\int_{y_0}^{y_1} \left(-\frac{dR}{dx} \delta z + R\delta p\right) dy\right]_{\psi_0 y}^{\psi_1 y}$$

$$+ \iint \frac{d^2 R}{dx^2} dxdy \cdot \delta z.$$

Dieſelbe Rechnung gibt:

$$\iint T\delta t \cdot dxdy = \left[\int_{x_0}^{x_1} \left(-\frac{dT}{dy} \delta z + T\delta q\right) dx\right]_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x}$$

$$+ \iint \frac{d^2 T}{dy^2} dxdy \cdot \delta z.$$

Wenn wir endlich das Glied mit δs betrachten; ſo erhalten wir durch eine ähnliche Rechnung:

$$\iint S\delta s \cdot dxdy = \left[\int_{x_0}^{x_1} S\delta p dx\right]_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} - \left[\int_{y_0}^{y_1} \frac{dS}{dy} dy \delta z\right]_{\psi_0 y}^{\psi_1 y}$$

$$+ \iint \frac{d^2 S}{dxdy} dxdy \cdot \delta z.$$

Ueberdies hat man:

$$\int S\delta p \cdot dx = \int S \frac{d\delta s}{dx} dx = S\delta z - \int \frac{dS}{dx} dx \delta z,$$

folglich:

$$\iint S\delta z \cdot dxdy = \left[S\delta z \right]_{x_0}^{x_1} - \left[\int_{x_0}^{x_1} \frac{dS}{dx} dx\delta z \right]_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x}$$
$$- \left[\int_{y_0}^{y_1} \frac{dS}{dy} dy\delta z \right]_{\psi_0 y}^{\psi_1 y} + \iint \frac{d^2S}{dxdy} dxdy\delta z.$$

§. 389. Wenn man alle dieſe verſchiedenen Reſultate zuſammennimmt; o kann man die Gleichung (14) auf folgende Form bringen:

$$\left[\left(S\delta z \right)_{x_0}^{x_1} \right]_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} + \left\{ \int_{y_0}^{y_1} \left[\left(P - \frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy} \right) \delta z + R\delta p \right] dy \right\}_{\psi_0 y}^{\psi_1 y}$$
$$+ \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(Q - \frac{dT}{dy} - \frac{dS}{dx} \right) \delta z + T\delta q \right] dx \right\}_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x}$$
$$+ \iint \left(Z - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} + \frac{d^2R}{dx^2} + \frac{d^2S}{dxdy} + \frac{d^2T}{dy^2} \right) dxdy \cdot \delta z = 0. \quad (A)$$

Der Coefficient von δz unter dem doppelten Integralzeichen muß für alle zwiſchen den Grenzen des doppelten Integrales liegende Werthe von x, y Null ein, ſo daß man zwiſchen x, y, z die folgende Gleichung mit partiellen Differenzialen hat:

$$Z - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} + \frac{d^2R}{dx^2} + \frac{d^2S}{dxdy} + \frac{d^2T}{dy^2} = 0. \quad (a)$$

jedes der in der Gleichung (A) vorkommenden einfachen Integrale erſtreckt ch auf alle Elemente der Curve $m_0 n_0 m_1 n_1$ (Fig. 80), welche auf der Ebene er xy die Grenzen des doppelten Integrales beſtimmt. Folglich müſſen die ariationen $\delta z, \delta p, \delta q$ für alle Syſteme der Werthe von x, y, welche den auf ieſer Curve liegenden Punkten entſprechen, den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \left(P - \frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy} \right) \delta z + R\delta p = 0 \\ \left(Q - \frac{dT}{dy} - \frac{dS}{dx} \right) \delta z + T\delta q = 0 \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

enügen.

Endlich muß man haben:

$$\left[\left(S\delta z \right)_{x_0}^{x_1} \right]_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} = 0,$$

der vielmehr:

$$S\delta z)_{x_1, \varphi_1 x_1} - (S\delta z)_{x_0, \varphi_1 x_0} - (S\delta z)_{x_1, \varphi_0 x_1} + (S\delta z)_{x_0, \varphi_0 x_0} = 0, \quad (c)$$

o $(S\delta z)_{x_1, \varphi_1 x_1}$ den Werth von $S\delta z$ für $x = x_1, y = \varphi_1 x_1$, ꝛc. bezeichnet.

§. 390. Man kann ſich die Veränderliche z als die Ordinate einer läche denken, und wenn der Durchſchnitt dieſer Fläche mit der cylindriſchen läche, deren Projection auf der Ebene der xy die Linie $m_0 n_0 m_1 n_1$ iſt, eine n Raume der Lage nach gegebene Curve wäre; ſo wäre die Variation δz ir alle Punkte dieſer Durchſchnittslinie Null, die Gleichung (c) würde von ſelbſt erfüllt und die Gleichungen (b) reducirten ſich auf:

$$R\delta p = 0, \quad T\delta q = 0.$$

Wenn außerdem die Richtung der Berührungsebene der krummen Fläche längs er ganzen Durchſchnittslinie durch die Natur der Aufgabe beſtimmt würde; ſo

würden die Variationen δp, δq verſchwinden, und folglich die Gleichungen von ſelbſt erfüllt.

Wenn die Durchſchnittslinie und die Richtung der Berührungsebene l dieſer Linie nicht durch die Bedingungen der Aufgabe beſtimmt ſind; ſo man, um den Gleichungen (b) zu genügen, die Coefficienten von δz, δp einzeln gleich Null ſetzen, d. h. man muß

$$P - \frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy} = 0, \quad Q - \frac{dT}{dy} - \frac{dS}{dx} = 0, \quad R = 0, \quad T = 0$$

ſetzen, und dieſe Gleichungen müſſen für alle Punkte der Durchſchnittsli deren Projection auf die Ebene der xy die Curve $m_0 n_0 m_1 n_1$ iſt, ſtattfin

§. 391. Um von dieſer Theorie ein Anwendungsbeiſpiel zu geben, wo wir annehmen, es ſollte die Fläche beſtimmt werden, welche durch einen gebenen Umfang gehen, und wovon der Flächeninhalt des von dieſem Umfa umſchloſſenen Theiles ein Minimum ſein muß. Dieſe Fläche würde nur d eben ſein können, wenn die Umfangslinie, durch welche ſie gehen muß, einer Ebene läge, und das doppelte Integral, welches zu einem Minimum macht werden muß, iſt:

$$\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dxdy. \quad (\S. 359.)$$

Da die Functionen R, S, T Null ſind, und die Variation δz wegen der veränderlichkeit der Umfangslinie an den Grenzen verſchwindet; ſo werden Gleichungen (b) und (c) erfüllt, und man braucht nur die Ordinate z ſo Function von x, y zu beſtimmen, daß die Gleichung (a) erfüllt wird, w ſich in:

$$\frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)}{dy} = 0,$$

oder, wenn man die Rechnungen entwickelt, in:

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0 \quad (\text{d})$$

verwandelt, welches die charakteriſtiſche Gleichung der krummen Flächen für deren ſämmtlichen Punkte die beiden Hauptkrümmungshalbmeſſer gleich von entgegengeſetzter Richtung ſind. Die geſuchte Oberfläche muß außer durch die gegebene Linie gehen, welche die kleinſte Fläche umſchließt, d welche Bedingungen man die in dem Integrale der Gleichung (d) vorkom den willkürlichen Functionen beſtimmen müßte.

Die durch die Umdrehung der Kettenlinie:

$$y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right)$$

um die Axe der x beſchriebene Fläche iſt unter den durch zwei gegebene rallele Kreiſe gehenden Rotationsflächen diejenige, welche den kleinſten Flä inhalt hat (§. 384). Die beiden Hauptkrümmungshalbmeſſer dieſer Rotati fläche ſind 1) der Krümmungshalbmeſſer der Meridiankettenlinie, und 2) Theil der Normale, welcher zwiſchen der Meridiancurve und der Rotation liegt (§. 285), und in der That haben wir gefunden, daß dieſe beiden R einander gleich und von entgegengeſetzter Richtung ſind (§. 384).

§. 392. Wenn man nicht annimmt, daß die Grenzen des doppelten tegrales durch die geſchloſſene Linie auf der Ebene der xy feſt beſtimmt

kann man die Variationen δx, δy nicht mehr gleich Null ſetzen, wenigſtens die den Grenzen des Integrales entſprechenden Punkte (§. 374), und in ſem Falle hat man:

$$\delta\iint V\,dx\,dy = \iint dy\,V\delta dx + \iint dx\,V\delta dy + \iint \delta V\,dx\,dy$$
$$= \iint dy\,V d\delta x + \iint dy\,V d\delta y + \iint \delta V\,dx\,dy$$
$$= \int V\delta x\,dy + \int V\delta y\,dx + \iint\left(\delta V - \frac{dV}{dx}\delta x - \frac{dV}{dy}\delta y\right)dx\,dy.$$

:des einfache Integral wird nach dem vorhin Geſagten als längs der Um-ngslinie, welche das doppelte Integral begrenzt, genommen, betrachtet.

Durch eine ähnliche Rechnung, wie die im §. 373 erhält man, wenn man r Kürze wegen:

$$\delta z - p\delta x - q\delta y = \delta u$$

ßt, wenn die Buchſtaben Z, P, Q, R, S, T ihre frühere Bedeutung behalten, d wenn man der Einfachheit wegen die Glieder von einer höhern als von r zweiten Ordnung unberückſichtigt läßt:

$$\delta V - \frac{dV}{dx}\delta x - \frac{dV}{dy}\delta y = Z\delta u + P\frac{d\delta u}{dx} + Q\frac{d\delta u}{dy}$$
$$+ R\frac{d^2\delta u}{dx^2} + S\frac{d^2\delta u}{dx\,dy} + T\frac{d^2\delta u}{dy^2}$$

ıb:

$$\iint\left(\delta V - \frac{dV}{dx}\delta x - \frac{dV}{dy}\delta y\right)dx\,dy = S\delta u$$
$$+\int\left[\left(P - \frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy}\right)\delta u + R\frac{d\delta u}{dx}\right]dy$$
$$+\int\left[\left(Q - \frac{dT}{dy} - \frac{dS}{dx}\right)\delta u + T\frac{d\delta u}{dy}\right]dx$$
$$+\iint\left(Z - \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} + \frac{d^2R}{dx^2} + \frac{d^2S}{dx\,dy} + \frac{d^2T}{dy^2}\right)dx\,dy\cdot\delta u.$$

Soll alſo die Variation des doppelten Integrales verſchwinden; ſo muß) die partielle Differenzialgleichung (a) zwiſchen den Veränderlichen x, y, z r alle zwiſchen den Grenzen dieſes Integrales liegende Werthe von x, y ttfinden, und 2) muß man für die Werthe von x, y, welche den auf der is doppelte Integral begrenzenden Umfangslinie liegenden Punkten entſprechen, e beiden Gleichungen:

$$V\delta x + \left(P - \frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy}\right)\delta u + R\frac{d\delta u}{dx} = 0$$
$$V\delta y + \left(Q - \frac{dT}{dy} - \frac{dS}{dx}\right)\delta u + T\frac{d\delta u}{dy} = 0$$

ber:

$$V\delta x + \left(P - \frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy}\right)(\delta z - p\delta x - q\delta y) + R(\delta p - r\delta x - s\delta y) = 0$$
$$V\delta y + \left(Q - \frac{dT}{dy} - \frac{dS}{dx}\right)(\delta z - p\delta x - q\delta y) + T(\delta q - s\delta x - t\delta y) = 0$$

haben. Dieſe Gleichungen entſprechen den Gleichungen (b) im §. 389 u laſſen ſich nach den Relationen, welche durch die Bedingungen der Aufg zwiſchen den Variationen δx, δy, δz, δp, δq, für die auf der Umfangslin liegenden Punkte beſtimmt werden, auf verſchiedene Weiſen zerlegen. Wen z. B. dieſe fünf Variationen von einander unabhängig und willkürlich ſind, ſ zerfallen die beiden Gleichungen in folgende fünf andern:

$$V = 0, \quad R = 0, \quad T = 0, \quad P - \frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy} = 0, \quad Q - \frac{dT}{dy} - \frac{dS}{dx} = 0.$$

3) Endlich muß die Gleichung $S\delta u = 0$ durch das Verſchwinden von δ oder von δu an den äußerſten Punkten der Umfangslinie erfüllt werden, wie dieſes für den Fall früher angegeben iſt, wo dieſe Umfangslinie als unveränderlich betrachtet wurde.

Neuntes Kapitel.

Von den Bedingungen der Integrabilität der Differenzialfunctionen von mehreren unabhängigen veränderlichen Größen, und von ihrer Integration.

§. 393. Die Differenzialfunction:

$$\varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy,$$

worin die Veränderliche y mit x als durch irgend eine Relation $v = \omega x$ verbunden betrachtet wird, iſt gleichbedeutend mit einer Differenzialfunction $fx\,dx$ von einer einzigen veränderlichen Größe, wo der Kürze wegen die Function:

$$\varphi(x,\omega x) + \psi(x,\omega x) \cdot \omega' x;$$

durch fx bezeichnet iſt; ſo daß man, wenn man $z = \int fx\,dx$, und folglich:

$$dz = \varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy \qquad (a)$$

ſetzt, die Beſtimmung der Function z immer auf die Quadraturen zurückführen kann, von welcher Beſchaffenheit die Functionen φ, ψ, ω auch ſein mögen.

Wenn dagegen die beiden Veränderlichen x und y als unabhängige betrachtet werden; ſo kann man im Allgemeinen weder eine Function z dieſer beiden Veränderlichen von ſolcher Beſchaffenheit beſtimmen, daß die Gleichung (a) erfüllt wird, noch im Raume eine Fläche conſtruiren, deren Ordinate z ein Totaldifferenzial hat, welches durch den zweiten Theil dieſer Gleichung ausgedrückt wird; denn zu dieſem Zwecke müßte man haben:

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x,y), \quad \frac{dz}{dy} = \psi(x,y),$$

und folglich (§. 123):

$$\frac{d \cdot \varphi(x,y)}{dy} = \frac{d \cdot \psi(x,y)}{dx} \qquad (b)$$

Wenn die Functionen φ und ψ die Gleichung (b) verificiren, so sagt man: die Gleichung (a) leistete der Bedingung der Integrabilität Genüge, und es gibt alsdann eine Fläche, deren Differenzialgleichung durch (a), und deren Gleichung zwischen x, y, z durch $z = f(x,y)$ ausgedrückt werden kann.

§. 394. In diesem Falle läßt sich die Bestimmung der Function z auf die Quadraturen zurückführen; denn da

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x,y)$$

ist; so muß die Function z folgende Form haben:

$$z = \int \varphi(x,y)dx + \theta y,$$

wo θy eine Function von der einen veränderlichen Größe y bezeichnet, welche bei der in Beziehung auf x angedeuteten Integration wie eine Constante behandelt werden muß. Hieraus ergibt, nach der im §. 366 für die Differenziation der Funtionen unter dem Zeichen $\int$ gegebenen Regel:

$$\frac{dz}{dy} = \psi(x,y) = \int \frac{d \cdot \varphi(x,y)}{dy} dx + \frac{d \cdot \theta y}{dy}$$

$$\theta y = \int \left[\psi(x,y) - \int \frac{d \cdot \varphi(x,y)}{dy} dx \right] dy$$

$$z = \int \varphi(x,y)dx + \int \left[\psi(x,y) - \int \frac{d \cdot \varphi(x,y)}{dy} dx \right] dy + \text{const.}$$

Soll die Function θy die Veränderliche x wirklich nicht enthalten; so muß

$$\frac{d \cdot \left[\psi(x,y) - \int \frac{d \cdot \varphi(x,y)}{dy} dx \right]}{dx} = 0$$

sein; so daß man wieder auf die durch die Gleichung (b) ausgedrückte Bedingung der Integrabilität zurückkommt.

Wir wollen z. B. die Function:

$$dz = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

nehmen, welche der Bedingung der Integrabilität Genüge leistet (§. 123); so haben wir:

$$z = \int \frac{ydx}{x^2 + y^2} + \theta y = \text{arc. tang.} \frac{x}{y} + \theta y$$

$$\frac{d \cdot \theta y}{dy} = - \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{d \cdot \text{arc. tang.} \frac{x}{y}}{dy} = 0$$

und folglich ist in diesem sehr einfachen Falle:

$$z = \text{arc. tang.} \frac{x}{y} + \text{const.}$$

§. 395. Wenn sich ein Punkt auf einer Fläche $z = f(x,y)$ bewegt und jede Ordinate z diese Fläche nur in einem Punkte trifft; so kann der Unterschied der Werthe von z im Anfange und am Ende der Bewegung nur von

den Coordinaten x,y beigelegten Anfangs- und Endwerthen und weder von der Form, noch von der Länge der Curve abhängen, welche der bewegliche Punkt auf der betrachteten Fläche zwiſchen den beiden Endpunkten beſchrieben hat. Wenn man alſo zwiſchen den unabhängigen Veränderlichen x,y eine willkürliche Relation $y = \omega x$ aufſtellt, vermöge welcher das Differenzial dz eine Function der einzigen Veränderlichen x wird; ſo muß der Werth des beſtimmten Integrales:

$$z - z_0 = \int_{x_0}^{x} [\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy]$$

von der Form der Function ω unabhängig ſein. Dieſes Integral muß ſich alſo erhalten laſſen, ohne daß man den willkürlichen Zuſammenhang zwiſchen y und x anzugeben braucht, und in der That haben wir eben geſehen, daß ſich dieſes Integral jedesmal erhalten läßt, wenn das Differenzial dz der Bedingung der Integrabilität genügt, oder mit andern Worten, wenn die Veränderliche z die Ordinate einer Fläche ausdrücken kann.

Wenn jedoch die beiden Functionen φ, ψ, oder eine derſelben, innerhalb der Integrationsgrenzen unendlich würden, oder plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem andern übergingen; ſo müßten die vorhergehenden Schlüſſe modificirt werden. Denn es könnte alsdann mehrere Punkte der krummen Fläche geben, welche auf der Ebene der xy dieſelbe Projection hätten, oder mehrere Werthe von z, welche demſelben Werthſyſteme von x,y entſprächen, ſo daß die Differenz $z - z_0$ nicht mehr allein von den Anfangs- und Endwerthen von x,y, ſondern auch von den zwiſchenliegenden Werthen dieſer Veränderlichen, oder von der Form der Curve, welche der bewegliche Punkt auf der krummen Fläche beſchrieben hat, abhinge.

Wenn z. B. die krumme Fläche eine von der horizontalen Ebene der xy diametral durchſchnittene Kugelfläche iſt, und der von einem Punkte der untern Halbkugel, deſſen horizontale Coordinaten x_0, y_0 ſind, ausgehende bewegliche Punkt in einen Punkt gelangt, deſſen horizontale Coordinaten x,y ſind; ſo ändert ſich die Differenz $z - z_0$, je nachdem dieſer Endpunkt der untern oder obern Halbkugel angehört; aber in dieſem letztern Falle ſind die Werthe von φ, ψ zwiſchen den Integrationsgrenzen durch das Unendliche gegangen; denn die Gleichung dieſer Kugelfläche iſt von der Form:

$$z = + \sqrt{r^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2},$$

woraus ſich die Werthe:

$$\varphi(x,y) = \mp \frac{x-\xi}{\sqrt{r^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}},$$

$$\psi(x,y) = \mp \frac{y-\eta}{\sqrt{r^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}$$

ergeben, welche unendlich werden, wenn

$$r^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 = 0$$

iſt, oder wenn der bewegliche Punkt durch die Ebene der xy geht, um von der untern Halbkugel auf die obere überzutreten.

§. 396. Dieſe Betrachtungen erſtrecken ſich auf Functionen von einer beliebigen Anzahl veränderlicher Größen. Soll es z. B. eine Function u von drei unabhängigen veränderlichen Größen x, y, z geben, welche der Differenzialgleichung:

$$du = Xdx + Ydy + Zdz, \qquad (c)$$

) X, Y, Z der Kürze wegen Functionen der drei Veränderlichen x, y, z be-
ichnen, Genüge leiſten können; ſo muß:

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}. \qquad (d)$$

in (§. 129).

Umgekehrt, wenn dieſe Bedingungsgleichungen erfüllt werden, ſo beſtimmt an die Function u durch eine Reihe von Quadraturen. So iſt z. B.

$$u = \int X dx + \theta(y,z),$$

raus folgt, wenn man unter dem Zeichen $\int$ differenzirt:

$$\frac{du}{dy} = Y = \int \frac{dX}{dy} dx + \frac{d \cdot \theta(y,z)}{dy},$$

d folglich:

$$\theta(y,z) = \int \left(Y - \int \frac{dX}{dy} dx \right) dy + \chi z$$

Zur Beſtimmung der Function χz bemerke man, daß

$$\frac{du}{dz} = Z = \int \frac{dX}{dz} dx + \frac{d \cdot \theta(y,z)}{dz}$$

; aber andererſeits iſt auch vermöge der vorhergehenden Gleichung:

$$\frac{d \cdot \theta(y,z)}{dz} = \int \left(\frac{dY}{dz} - \int \frac{d^2X}{dydz} dx \right) dy + \frac{d \cdot \chi z}{dz};$$

lglich:

$$\frac{d \cdot \chi z}{dz} = Z - \int \frac{dX}{dz} dx - \int \left(\frac{dY}{dz} - \int \frac{d^2X}{dydz} dx \right) dy;$$

$$\chi z = \int \left[Z - \int \frac{dX}{dz} dx - \int \left(\frac{dY}{dz} - \int \frac{d^2X}{dydz} dx \right) dy \right] dz$$

nd endlich:

$$u = \int X dx + \int \left(Y - \int \frac{dX}{dy} dx \right) dy$$
$$+ \int \left[Z - \int \frac{dX}{dz} dx - \int \left(\frac{dY}{dz} - \int \frac{d^2X}{dydz} dx \right) dy \right] dz + \text{const.}$$

oll die Function $\theta(y,z)$ die Veränderliche x nicht enthalten; ſo muß:

$$\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} = 0$$

in, und wenn dieſe Bedingung erfüllt wird; ſo kommt x auch in χz nicht or, wenn außerdem:

$$\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} = 0$$

, und endlich kommt y in χz nicht vor, wenn:

$$\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = 0$$

. Man erhält alſo die drei Gleichungen (d) wieder.

§. 397. Wenn die Gleichung:

$$u = f(x,y,z), \qquad (c)$$

welche der Gleichung (c) Genüge leiſtet, für jeden Punkt des Raumes oder für jedes Werthsſyſtem der Coordinaten x, y, z einen beſtimmten und einzigen Werth hat, und man denkt ſich einen beweglichen materiellen Punkt, für welchen die Größe u jeden Augenblick den ſich aus der Gleichung (c) ergebenden Werth annimmt; ſo kann, wenn der bewegliche Punkt von dem Punkte (x_0, y_0, z_0) in den Punkt (x, y, z) übergeht, die Differenz:

$$u - u_0 = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$$

nur von den Anfangs- und Endwerthen der Coordinaten x, y, z, und weder von der Form, noch von der Länge der von dem materiellen Punkte zwiſchen den beiden Endpunkten beſchriebenen Curve abhängen. Wenn man alſo zwiſchen den Veränderlichen x, y, z willkürliche Relationen $y = \omega x$, $z = \chi x$ aufſtellt, vermöge welcher das Totaldifferenzial:

$$du = X dx + Y dy + Z dz$$

eine Function der einzigen Veränderlichen x wird; ſo muß der Werth des Integrales:

$$u - u_0 = \int_{x_0}^{x} (X dx + Y dy + Z dz)$$

von der Form der Functionen ω und χ unabhängig bleiben. Der Zahlenwerth dieſes Integrales muß ſich alſo berechnen laſſen, ohne daß man willkürliche Relationen zwiſchen z, y und x aufzuſtellen braucht. Durch die Rechnung im vorhergehenden § wird dieſes a priori beſtätigt, indem ſie zeigt, wie die Function u, wenn die Bedingungen der Integrabilität erfüllt ſind, durch eine Reihe von Quadraturen beſtimmt werden kann, ohne daß es nöthig iſt, irgend welche Relationen zwiſchen den unabhängigen Veränderlichen aufzuſtellen.

Die Quadraturformeln könnten jedoch illuſoriſch werden, bei der Beſtimmung der Größe $u - u_0$, wenn die Functionen X, Y, Z, oder blos eine derſelben, unendlich würden, oder plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem andern übergingen; denn in dieſem Falle könnten demſelben Werthsſyſteme der Veränderlichen x, y, z mehrere Werthe von u entſprechen, ſo daß die Differenz $u - u_0$ nicht mehr allein von den Anfangs- und Endwerthen von x, y, z, ſondern auch von den zwiſchenliegenden Werthen derſelben, oder von der von dem beweglichen Punkte im Raume beſchriebenen Curve abhinge.

§. 398. In der Mechanik ſtößt man oft auf Gleichungen von der Form:

$$du = X dx + Y dy + Z dz,$$

worin X, Y, Z Functionen der drei Coordinaten x, y, z ſind, welche die auf einen beweglichen Punkt parallel zu den Coordinatenaxen würkenden Kräfte ausdrücken, und es ſind alsdann wichtige Lehrſätze der Bedingung unterworfen, daß das Integral:

$$u - u_0 = \int_{x_0}^{x} (X dx + Y dy + Z dz)$$

einen von den Relationen $y = \omega x$, $z = \chi x$ unabhängigen Werth habe, oder nur von den äußerſten Lagen des beweglichen Punktes, und nicht von der zwiſchen beiden beſchriebenen Linie abhängig iſt. Soll nun aber dieſe beſchränkende Bedingung erfüllt werden, ſo iſt es nicht, wie man gewöhnlich anzugeben pflegt, hinreichend, daß die Functionen X, Y, Z den Gleichungen (d) genügen, ſo daß die Gleichung:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

gemeinſchaftliche Differenzialgleichung einer Reihe von krummen Flächen , welche man erhielte, wenn man die Conſtante c in der Gleichung:

$$u - u_0 = c,$$

er:

$$f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) = c$$

riiren ließe; ſondern es iſt auch erforderlich, daß die Function u und ihre rtiellen Ableitungen X, Y, Z innerhalb der Integrationsgrenzen nicht unend- h werden, und daß demſelben Werthsſyſteme der Coordinaten x, y, z nicht ehrere reelle Werthe von c entſprechen, ſo daß die eben erwähnten ver- ſiedenen Flächen gemeinſchaftliche Punkte haben könnten.

§. 399. Aus allen dieſen Erörterungen ſieht man, daß ſich die in den iden vorhergehenden Kapiteln auseinandergeſetzte Theorie der Variation der ntegrale unmittelbar an die Unterſuchung der Bedingungen der Integrabilität r Differenzialfunctionen mit mehreren unabhängigen veränderlichen Größen ſchließt. Es kommt in der That bei dieſer Unterſuchung darauf an, die Be- ngungen zu finden, unter welchen die Veränderungen des Werthes oder die ariationen eines beſtimmten Integrales nur von den Anfangs- und End- erthen der unter dem Integrationszeichen $\int$ vorkommenden Veränderlichen, ıb nicht von den willkürlichen Relationen abhängen, welche man innerhalb r Integrationsgrenzen zwiſchen dieſen Veränderlichen aufſtellen könnte. Hier- f laſſen ſich aber unmittelbar die Formeln für die Variation der Integrale, obei man von dem Lagrangeſchen Algorithmus Gebrauch macht, an- nden.

Wir wollen nun annehmen, daß die Differenzialfunction, für welche man e Bedingungen der Integrabilität ſucht, außer den Veränderlichen x, y auch re Differenziale der verſchiedenen Ordnungen bis zur n^{ten} Ordnung incl. thalte. Soll dieſe Function Bedeutung haben, ſo muß ſie ſich auf eine unction der einzigen Veränderlichen x reduciren, wenn man zwiſchen x und eine Relation $y = \omega x$ aufſtellt, und folglich muß dieſe Function die Form:

$$f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)})dx^n$$

nehmen, wenn man x als eine unabhängige Veränderliche und y als eine unction von x behandelt. Das Integral dieſer Function, wenn es ein ſolches nabhängig von jeder Relation zwiſchen x und y geben kann, iſt von der orm:

$$F(x, y', y'', \ldots y^{(n-1)})dx^{n-1};$$

daß man ſetzen kann:

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}) = \int f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)})dx,$$

ıb es kommt alsdann darauf an, zu wiſſen, ob das im zweiten Theile dieſer ßten Gleichung vorkommende Integral unabhängig bleiben kann von der will- rlichen Relation, welche man nothwendig zwiſchen y und x aufſtellen muß, n die Quadratur nach den gewöhnlichen Verfahrungsarten möglich zu machen.

Um die im vorletzten Kapitel angewandten Bezeichnungen beizubehalten, ollen wir

$$f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = V$$

$$dV = Xdx + Ydy + Y^{(1)}dy' + Y^{(2)}dy'' + Y^{(3)}dy''' + \text{ꝛc.} \qquad (f)$$

ßen, ſo haben wir:

telbar niedrigeren $n-1^{ten}$, ſondern auch ein Integral der $n-2^{ten}$, $n-3^{ten}$, ꝛc. Ordnung habe. Allein die Anwendungen ſolcher Unterſuchungen kommen zu ſelten vor, als daß wir uns hier dabei aufhalten könnten.

Zehntes Kapitel.

Von den zwiſchen ſpeciellen Grenzen genommenen beſtimmten Integralen. — Verſchiedene Beiſpiele der Beſtimmung beſtimmter Integrale.

§. 402. Wenn ſich das unbeſtimmte Integral $\int fxdx$ nicht algebraiſch, oder durch transcendente Functionen, für welche man Tafeln hat, ausdrücken läßt; ſo kann das beſtimmte Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} fxdx \qquad (1)$$

im Allgemeinen nur durch Reihen oder durch das arithmetiſche Summationsverfahren, wovon bereits mehrere Male die Rede geweſen iſt (§. 320) näherungsweiſe berechnet werden; aber ſelbſt in dieſem Falle geſchieht es oft, daß der Werth des Integrales (1) für gewiſſe ſpecielle Werthe der Grenzen, welche, wie die Grenzen:

$$0,\ \pm\infty,\ \pm 1,\ \pm\pi,\ \text{ꝛc.}$$

der Form der Function f beſonders entſprechen, genau und direct erhalten werden kann, ohne daß man das unbeſtimmte Integral zu kennen braucht. Auch geſchieht es, daß das zwiſchen dieſen ſpeciellen Grenzen genommene Integral, ſelbſt wenn ſich die unbeſtimmte Integration verrichten läßt, einen weit einfachern Ausdruck annimmt, oder merkwürdige Eigenſchaften beſitzt, welche dieſem Integrale nicht mehr zukommen, wenn es zwiſchen beliebigen Grenzen genommen wird. Man könnte die Integrale, deren unterſcheidende Merkmale wir eben kurz angegeben haben, *ſpecielle beſtimmte Integrale* nennen, und die Theorie derſelben, ſo wie ihre Beſtimmung, iſt gegenwärtig ein ſehr wichtiger Zweig der Analyſis.

Zur Erläuterung des eben Geſagten wollen wir annehmen, es ſollte der Werth des beſtimmten Integrales:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^2 x dx$$

gefunden werden; ſo bemerkt man leicht, daß dieſer Werth offenbar derſelbe iſt, als der des Integrales:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.^2 x dx,$$

weil sin. x und cos. x zwiſchen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ dieſelbe Reihe von Werthen durchlaufen. Es iſt alſo:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin.^2 x + \cos.^2 x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

e Reſultat könnte man zwar ohne die eben angewandte Betrachtung erwenn man die unbeſtimmte Integration, welche in dieſem Falle möglich

$$\int \sin.^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin. 2x + \text{const.}$$

errichtet; allein es war unſer Zweck auch nur, zu zeigen, wie das geVerhältniß zwiſchen den Grenzen des Integrales und der Form der nzialfunction zur Beſtimmung gewiſſer beſtimmter Integrale führen kann, ß man die unbeſtimmten Integrale zu kennen braucht.

403. Es ſei ferner der Werth des Integrales:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

immen; ſo wollen wir daſſelbe durch ein anderes Integral von derſelben worin blos y ſtatt x geſetzt iſt, multipliciren, und alsdann iſt das t der beiden einfachen Integrale gleichbedeutend mit dem doppelten In-:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dy dx. \qquad (2)$$

wenn die Grenzen des erſten der beiden einfachen Integrale:

$$\int fx\,dx, \quad \int fy\,dy$$

on y, und die des zweiten nicht von x abhängig ſind, ſo iſt das Proeſer beiden Integrale der Summe gleich, welche man erhält, wenn man Element des erſten mit jedem Elemente des zweiten multiplicirt, d. h. dem doppelten Integrale:

$$\iint fx \cdot fy \cdot dy dx,$$

lches die Grenzen in Beziehung auf jede Veränderliche dieſelben ſind, der einfachen Integrale.

Wir wollen nun $y = xt$ ſetzen, wo t eine neue Veränderliche bezeichnet, $dy = x dt$ (§. 357), die Grenzen in Beziehung auf t ſind wieder 0, ∞ s Integral (2) verwandelt ſich in:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2(1+t^2)} x\,dx \cdot dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{4}\pi.$$

alſo:

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy\right) = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2 = \frac{1}{4}\pi,$$

lglich:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \qquad (a)$$

chſt wichtiges und oft anwendbares Reſultat. Der Rechnungskunſtgriff, welchen wir den Werth des Integrales (a) erhalten haben, iſt nur bei renzen 0 und ∞ anwendbar; denn zwiſchen andern Grenzen läßt ſich ntegral $\int e^{x^2} dx$ auf keine der gewöhnlichen transcendenten Functionen ühren, ſondern bildet eine transcendente Größe, für welche man eine Tafel berechnen muß, und wofür wir bereits mehrere Reihenausdrücke eilt haben (§. 317).

Aus der Gleichung (a) folgt unmittelbar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

und wenn man $x\sqrt{\theta}$ statt x setzt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\theta}}.$$

Wenn man die beiden Theile der letzten Gleichung nach der Regel im §. 366 i mal hinter einander in Beziehung auf θ differenzirt, und dann $\theta = 1$ setzt; so kommt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2i}dx = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{2^i}\cdot\sqrt{\pi}.$$

Außerdem hat man für alle ganzen und positiven Werthe von i:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2i+1}dx = 0,$$

weil das Integral aus Elementen besteht, welche sich paarweise gegenseitig aufheben.

Der Rechnungskunstgriff besteht darin, aus dem bekannten Werthe eines bestimmten Integrales den eines andern, zwischen denselben Grenzen genommenen, bestimmten Integrales dadurch abzuleiten, daß man das erstere unter dem Integralzeichen $\int$ differenzirt oder integrirt, und zwar in Beziehung auf einen gewissen Parameter (§. 366). Wenn man z. B. die beiden Theile der Gleichung:

$$\int_0^1 x^{m-1}dx = \frac{1}{m},$$

zwischen den Grenzen μ, ν in Beziehung auf m integrirt; so erhält man:

$$\int_0^1 \frac{x^{\mu-1} - x^{\nu-1}}{\log. x}\cdot dx = \log.\left(\frac{\mu}{\nu}\right).$$

Und wenn man i mal hinter einander in Beziehung auf m differenzirt; so ergibt sich aus der Gleichung:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+m} = \frac{\pi}{2\sqrt{m}},$$

folgende:

$$\int_0^{\infty} \frac{1.2.3\ldots i}{(x^2+m)^{i+1}}\cdot dx = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)\pi}{2^i\cdot m^i\sqrt{m}};$$

folglich ist:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+m)^{i+1}} = \frac{1}{m^i\sqrt{m}}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{2.4.6\ldots 2i}\cdot\frac{\pi}{2}. \qquad (b)$$

§. 404. Die Geometer haben die Werthe einer großen Anzahl bestimmter Integrale nach sehr verschiedenen Methoden berechnet, und wir wollen als Beispiele die am leichtesten abzuleitenden und in den Anwendungen am häufigsten vorkommenden hier mittheilen, und mit den Fällen beginnen, wo sich der Werth des bestimmten Integrales unmittelbar aus dem für das unbestimmte Integral gefundenen Ausdrucke ergibt.

Aus der Formel (μ) im §. 309 ergibt ſich:

$$\int \sin.^{\mu} x\,dx = -\frac{\sin.^{\mu-1} x \cos. x}{\mu} + \frac{\mu-1}{\mu}\int \sin.^{\mu-2} x\,dx,$$

ud aus der Formel (ν):

$$\int \cos.^{\nu} x\,dx = \frac{\sin. x \cos.^{\nu-1} x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu}\int \cos.^{\nu-2} x\,dx,$$

oraus folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{\mu} x\,dx = \frac{\mu-1}{\mu}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{\mu-2} x\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.^{\nu} x\,dx = \frac{\nu-1}{\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.^{\nu-2} x\,dx.$$

Da dieſelben Reductionsformeln auch auf die in den zweiten Theilen dieſer ßten Gleichungen vorkommenden Integrale anwendbar ſind; ſo hat man, wenn an durch $2i$ irgend eine gerade Zahl bezeichnet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{2i} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.^{2i} x\,dx = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{2.4.6\ldots 2i} \cdot \frac{\pi}{2}, \qquad (b)$$

nd wenn man mit $2i+1$ eine beliebige ungerade Zahl bezeichnet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{2i+1} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.^{2i+1} x\,dx = \frac{2.4.6\ldots 2i}{3.5.7\ldots(2i+1)}. \qquad (c)$$

Nun iſt aber zu bemerken, daß man die Zahl i immer ſo groß nehmen kann, aß die Werthe der Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{2i+1} x\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{2i} x\,dx \qquad (3)$$

beliebig wenig von denen der Integrale:

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{2i+1} x\,dx, \quad \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{2i} x\,dx, \qquad (4)$$

wo ε eine poſitive Zahl bezeichnet, welche beliebig klein werden kann, verſchieden ſind. Denn es iſt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin.^{k} x\,dx < \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sin.^{k}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right),$$

nd der zweite Theil dieſer Ungleichheit kann für einen ſchicklichen Werth des xponenten k, wie klein ε auch ſein mag, kleiner werden, als jede gegebene rdße.

Nun kann man die Grdße ε immer ſo klein annehmen, daß jedes der ntegrale (4) beliebig wenig von dem Integrale:

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} dx = \varepsilon$$

verschieden ist, und ihr Verhältniß folglich ebenfalls beliebig wenig von Einheit verschieden ist. Für hinreichend große Werthe von i ist also das V hältniß der Integrale (3) beliebig wenig von der Einheit verschieden.

Hieraus folgt, daß sich das Verhältniß der beiden Brüche in den zwei Theilen der Gleichungen (b) und (c) für ohne Ende wachsende Werthe i der Einheit unbestimmt nähert. Es ist also:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8...}{1.3.3.5.5.7.7.9...}$$

Dieser Ausdruck der Zahl π als ein Product ohne Ende fortlaufender Facto rührt von Wallis her, und kann auf verschiedene Arten gefunden werden.

§. 405. Es sei nun der Werth des Integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{fx}{Fx} dx$$

zu bestimmen, wo fx eine rationale algebraische Function bezeichnet und eine andere rationale algebraische Function, deren Grad wenigstens um z Einheiten höher ist, als der von fx, und welche so beschaffen ist, daß Gleichung $Fx = 0$ nur imaginäre Wurzeln hat, damit die Function unter t Integralzeichen innerhalb der Integrationsgrenzen nicht durch das Unendli geht. Wenn man durch $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ ein Paar zusammengehöriger im närer Wurzeln der Gleichung $Fx = 0$ bezeichnet, so ist das gesuchte Inte die Summe der Partialintegrale von der Form:

$$2P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + 2Q\beta\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

wo die Constanten P und Q durch die Gleichung:

$$P - Q\sqrt{-1} = \frac{f(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha+\beta\sqrt{-1})},$$

in welche man sehr leicht die Gleichung (3) im §. 296 transformiren k gegeben werden.

Ferner ergibt sich leicht:

$$2Q\beta\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = 2\pi Q;$$

und was das Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{tdt}{t^2+\beta^2},$$

anlangt; so kann es nur als die Grenze eines andern Integrales:

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} \frac{tdt}{t^2+\beta^2},$$

rin μ, ν beliebige Zahlen und ε einen ohne Ende gegen Null convergiren- ı Factor bezeichnet, betrachtet werden. Nun iſt aber:

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} \frac{t\,dt}{t^2+\beta^2} = \frac{1}{2}\log.\left[\frac{(\beta^2\sqrt{\varepsilon\nu}+1)\sqrt{\mu}}{(\beta^2\sqrt{\varepsilon\mu}+1)\sqrt{\nu}}\right],$$

vraus folgt, wenn man $\varepsilon = 0$ ſetzt, um zu der Grenze überzugehen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\,dt}{t^2+\beta^2} = \log.\left(\frac{\mu}{\nu}\right),$$

n Ausdruck, welcher wegen der unbeſtimmten Zahlen μ, ν ſelbſt unbe- immt iſt.

Bezeichnen wir nun durch $\alpha_1 \pm \beta_1\sqrt{-1}$, $\alpha_2 \pm \beta_2\sqrt{-1}$, ꝛc. Die rigen imaginären Wurzeln der Gleichung $Fx = 0$ und die entſprechenden Berthe von P, Q mit P_1, Q_1, P_2, Q_2, ꝛc.; ſo kommt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{fx}{Fx}\,dx = \lim. \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} \frac{fx}{Fx}\,dx = 2\pi(Q + Q_1 + Q_2 + \text{ꝛc.})$$

$$+ \frac{1}{4}(P + P_1 + P_2 + \text{ꝛc.})\log.\left(\frac{\mu}{\nu}\right).$$

ıbererſeits hat man die identiſche Gleichung:

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{2P(x-\alpha)+2Q\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{2P_1(x-\alpha_1)+2Q\beta_1}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \text{ꝛc.}$$

vraus ſich leicht ergibt, daß, wenn die Bedingungsgleichung:

$$P + P_1 + P_2 + \text{ꝛc.} = 0$$

icht erfüllt würde, der höchſte Exponent von x in fx gegen die Vorausſetzung ur um eine Einheit niedriger wäre, als der höchſte Exponent von x in Fx. Man hat alſo in der gemachten Vorausſetzung blos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{fx}{Fx}\,dx = 2\pi(Q + Q_1 + Q_2 + \text{ꝛc.}),$$

us welchem Werthe jedes Symbol der Unbeſtimmtheit verſchwunden iſt.

Wenn die Functionen fx, Fx nur gerade Potenzen von x enthalten; ſo at man auch:

$$\int_0^{\infty} \frac{fx}{Fx}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{fx}{Fx}\,dx = \pi(Q + Q_1 + Q_2 + \text{ꝛc.}).$$

§. 406. Wir wollen nun dieſe Analyſe auf das Integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}}$$

nwenden, worin wir $m < n$ annehmen und überdies m und n ganze poſitive Zahlen bezeichnen. Die Gleichung (5) wird in dieſem Falle:

$$P - Q\sqrt{-1} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{2n-2m-1}}; \qquad (6)$$

n welche man für $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ ſucceſſive die verſchiedenen Werthe ſubſti- uiren muß, welche ſich aus der Formel:

$$\cos.\frac{(2i+1)\pi}{2n}+\sqrt{-1}\cdot\sin.\frac{(2i+1)\pi}{2n},$$

ergeben, wenn man für i ſucceſſive die Zahlen 0, 1, 2, 3, ... n — 1 ſ
(§. 79).

Nun iſt aber nach der Moivre'ſchen Formel (§. 77):

$$\left[\cos.\frac{(2i+1)\pi}{2n}+\sqrt{-1}\cdot\sin.\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right]^{2m-2m-1}$$

$$=\cos.\left[(2i+1)\pi-\frac{(2m+1)(2i+1)\pi}{2n}\right]$$

$$+\sqrt{-1}\cdot\sin.\left[(2i+1)\pi-\frac{(2m+1)(2i+1)\pi}{2n}\right]$$

$$=-\cos.\frac{(2m+1)(2i+1)\pi}{2n}+\sqrt{-1}\cdot\sin.\frac{(2m+1)(2i+1)\pi}{2n},$$

und wenn wir der Kürze wegen:

$$\frac{2m+1}{2n}=k \qquad (2)$$

ſetzen; ſo gibt die Gleichung (b):

$$2n(P_i-Q_i\sqrt{-1})=\frac{1}{-\cos.(2i+1)k\pi+\sqrt{-1}\cdot\sin.(2i+1)k\pi}$$

und folglich iſt:

$$Q_i=\frac{1}{2n}\sin.(2i+1)k\pi,$$

$$\int_0^\infty\frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}=\frac{\pi}{2n}[\sin.k\pi+\sin.3k\pi+\ldots+\sin.(2n-1)k\pi]. \qquad (8$$

Dieſer Ausdruck läßt ſich vereinfachen; denn es ſei:

$$S=\sin.u+\sin.(u+v)+\sin.(u+2v)+\ldots+\sin.[u+(n-1)v];$$

wir wollen beide Theile der Gleichung mit 2 cos. v multipliciren und nach v
richteter Multiplication jedes Glied des zweiten Theiles nach der Formel:

$$2\sin.(u+rv)\cos.v=\sin.[u+(r+1)v]+\sin.[u+(r-1)v],$$

welche ſich ſelbſt aus der bekannten Relation:

$$2\sin.p\cos.q=\sin.(p+q)+\sin.(p-q)$$

ergibt, transformiren; ſo erhalten wir:

$$2S\cos.v=\sin.(u-v)-\sin.u+2S-\sin.[u+(n-1)v]+\sin.(u+n$$

woraus folgt:

$$S=\frac{-\sin.(u-v)+\sin.u+\sin.[u+(n-1)v]-\sin.(u+nv)}{2(1-\cos.v)}.$$

In dieſer letzten Gleichung wollen wir $u=k\pi$, $v=2k\pi$ ſetzen, ſo b
zeichnet S das Polynom, womit $\frac{\pi}{2n}$ in der Gleichung (8) multiplicirt iſt, u
man erhält:

$$S = \frac{2\sin.k\pi + \sin.(2n-1)k\pi - \sin.(2n+1)k\pi}{2(1-\cos.2k\pi)}.$$

ver es iſt:

$$\sin.(2n \pm 1)k\pi = \sin.(2nk\pi \pm k\pi) = \sin.[(2m+1)\pi \pm k\pi]$$
$$= \mp \sin.k\pi$$
$$1 - \cos.2k\pi = 2\sin.^2 k\pi;$$

ıd folglich:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n\sin.k\pi} = \frac{\pi}{2n\sin.\frac{(2m+1)\pi}{2n}}.$$

Dieſe merkwürdige Formel rührt von Euler her, und wenn man $y = x^{2n}$ ſetzt; ı ergibt ſich daraus:

$$\int_0^\infty \frac{y^{k-1}dy}{1+y} = \frac{\pi}{\sin.k\pi}. \qquad (d)$$

Dieſe letzte Gleichung findet für beliebige zwiſchen 0 und 1 liegende Werthe ıon k ſtatt; denn von welcher Beſchaffenheit dieſe Werthe auch ſein mögen, ıo kann man doch immer ganze Zahlen m, n finden, welche der Gleichung (7) mit jedem beliebigen Grade von Annäherung genügen, indem zugleich n < n iſt.

Durch eine ähnliche Rechnung würde man finden:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{1-x^{2n}} = \frac{\pi}{2n}[\sin.2k\pi + \sin.4k\pi + \ldots + \sin.2(n-1)k\pi]$$
$$= \frac{\pi}{2n\,\mathrm{tang}.\frac{(2m+1)\pi}{2n}}$$
$$\int_0^\infty \frac{y^{k-1}dy}{1-y} = \frac{\pi}{\mathrm{tang}.k\pi}. \qquad (e)$$

§. 407. Die Formeln (b) im §. 314 geben:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-ax}\sin.bxdx &= \frac{b}{a^2+b^2}\\ \int_0^\infty e^{-ax}\cos.bxdx &= \frac{a}{a^2+b^2}\end{aligned}\right\}. \qquad (f)$$

Multipliciren wir dieſe beiden Gleichungen mit da und integriren zwiſchen den Grenzen c, a; ſo erhalten wir:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\cdot\sin.bxdx = \mathrm{arc.\,tang.}\frac{a}{b} - \mathrm{arc.\,tang.}\frac{c}{b},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\cdot\cos.bxdx = \frac{1}{2}\log.\left(\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}\right).$$

Wenn man in den vorhergehenden Gleichungen $c = 0$, $a = \infty$ ſetzt; ſo geben ſie:

$$\int_0^\infty \frac{\sin. bx}{x} dx = \pm \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos. bx}{x} dx = \infty.$$

Den zweiten Theil der Gleichung (ε) muß man mit dem Zeichen + mit dem Zeichen — nehmen, je nachdem die Conſtante b poſitiv, oder ne iſt. Uebrigens hat der Zahlenwerth dieſer Conſtante auf den Werth de ſtimmten Integrales keinen Einfluß; denn wenn man $bx = t$ ſetzt; ſo fin Grenzen von t noch 0, ∞, und man hat:

$$\int_0^\infty \frac{\sin. bx}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin. t}{t} dt.$$

§. 408. Nach dem Coteſ'ſchen Lehrſatze (§. 79) hat man:

$$(1 - 2a \cos. \frac{\pi}{2n} + a^2)(1 - 2a \cos. \frac{3\pi}{2n} + a^2) \ldots (1 - 2a \cos. \frac{(2n-1)\pi}{n} +$$
$$= a^{2n} + 1.$$

Erhebt man beide Theile dieſer Gleichung zu der Potenz $\frac{\pi}{n}$ und nimm Logarithmen; ſo erhält man:

$$\sum_0^{n-1} \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \log. (1 - 2a \cos. \frac{2i+1}{2n} + a^2) = \log. \cdot (a^{2n} + 1)^{\frac{\pi}{n}},$$

wo $\sum_0^{n-1} U_i$ die Summe der Werthe einer Function U_i für alle ga Werthe von i von 0 bis $n-1$ incl. andeutet.

Setzen wir nun:

$$\frac{2i+1}{2n} \cdot \pi = x;$$

ſo verwandelt ſich der erſte Theil der Gleichung (9) in:

$$\sum \cdot \frac{\pi}{n} \log. (1 - 2a \cos. x + a^2),$$

und das Zeichen $\sum$ deutet eine in Beziehung auf die Veränderliche x, w nach conſtanten Differenzen $= \frac{\pi}{n}$ von $x = \frac{\pi}{2n}$ bis $x = \frac{2n-1}{2n}\pi$ incl. w genommene Summe an.

Wenn man die Zahl n ohne Ende wachſen läßt, ſo nimmt die Diff $\Delta x = \frac{\pi}{n}$ immer mehr und mehr ab, und an der Grenze geht die Summe über in das beſtimmte Integral:

$$\int_0^\pi \log. (1 - 2a \cos. x + a^2) dx.$$

Andererſeits nähert ſich die Größe:

$$(a^{2n} + 1)^{\frac{\pi}{n}}$$

ohne Ende wachſende Werthe von n der Grenze 1 oder der Grenze $a^{2\pi}$ ie Ende, je nachdem die Conſtante a kleiner oder größer iſt als 1. Man alſo für $a \lessgtr 1$:

$$\int_0^{\pi} \log.(1 - 2a\cos.x + a^2)\,dx = \begin{cases} 0 \\ \pi \log.(a^2). \end{cases}$$

er Werth dieſes beſtimmten Integrales iſt zuerſt von Poiſſon angegeben; er der ſich durch ſeine Kürze empfehlende vorhergehende Beweis rührt von elaunay her.

§. 409. Die Combination imaginärer Symbole wird bei der Entwickelung ſtimmter Integrale häufig angewandt. Wenn man in der Formel (a) die röße x in ax verwandelt; ſo erhält man:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a},$$

ıd wenn man alsdann:

$$a = \frac{(1+\sqrt{-1})\alpha}{\sqrt{2}}$$

ßt; ſo ergibt ſich:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2\sqrt{-1}}dx = \left(\frac{1-\sqrt{-1}}{2\alpha}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

der vielmehr, wenn man für die imaginäre Exponenzialgröße ihren durch ſinus und Coſinus ausgedrückten Werth ſetzt:

$$\int_0^{\infty} (\cos.\alpha^2x^2 - \sqrt{-1}\cdot\sin.\alpha^2x^2)\,dx = \left(\frac{1-\sqrt{-1}}{2\alpha}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

elche Gleichung in die beiden folgenden zerfällt:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin.\alpha^2x^2\cdot dx &= \frac{1}{2\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \int_0^{\infty} \cos.\alpha^2x^2\cdot dx &= \frac{1}{2\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}\right\}. \qquad (h)$$

Dieſe letzteren geben, wenn man x für α^2x^2 ſetzt:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin.x\,dx}{\sqrt{x}} = \int_0^{\infty} \frac{\cos.x\,dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Die Gleichungen (h) geben ferner:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin.x^2\cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos.x^2\cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \qquad (h')$$

Wenn wir in der erſten x in $x - \xi$ verwandeln; ſo bleiben die Integrationsgrenzen dieſelben, und es ergibt ſich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin.(x^2 - 2\xi x + \xi^2)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin.(x^2+\xi^2)\cos.2\xi x\,dx$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \cos.(x^2+\xi^2)\sin.2\xi x\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Aber da $\cos.(x^2+\xi^2)\sin.2\xi x$ eine impaare Function von x iſt; ſo hat man offenbar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos.(x^2+\xi^2)\sin.2\xi x\,dx = 0,$$

und folglich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin.(x^2+\xi^2)\cos.2\xi x\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

oder:

$$\cos.\xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin.x^2\cos.2\xi x dx + \sin.\xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos.x^2\cos.2\xi x dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Wenn man die zweite der Gleichungen (h') auf dieſelbe Weiſe behandelt, ſo erhält man:

$$\cos.\xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos.x^2\cos.2\xi x dx - \sin.\xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin.x^2\cos.2\xi x dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

und hieraus ergibt ſich:

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cos.x^2\cos.2\xi x\,dx &= (\cos.\xi^2 + \sin.\xi^2)\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin.x^2\cos.2\xi x\,dx &= (\cos.\xi^2 - \sin.\xi^2)\sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(i)}$$

Wenn man bemerkt, daß:

$$\sin.\frac{\pi}{4} = \cos.\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

iſt; ſo kann man dieſe Gleichungen auf folgende Form bringen:

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cos.x^2\cos.2\xi x\,dx &= \sqrt{\pi}\cdot\sin.\left(\frac{\pi}{4}+\xi^2\right) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin.x^2\cos.2\xi x\,dx &= \sqrt{\pi}\cdot\sin.\left(\frac{\pi}{4}-\xi^2\right) \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(j)}$$

§. 410. Es ſei:

$$\omega = \int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}\cos.bx\,dx, \quad \frac{d\omega}{db} = -\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}\sin.bx\cdot x\,dx;$$

ſo gibt die theilweiſe Integration:

$$\int e^{-a^2x^2}\sin.bx\cdot x\,dx = -\frac{e^{-a^2x^2}}{2a^2}\sin.bx + \frac{b}{2a^2}\int e^{-a^2x^2}\cos.bx\,dx,$$

woraus folgt:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \sin. bx \cdot x dx = \frac{b}{2a^2} \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos. bx dx,$$

ıd mithin iſt:

$$\frac{d\omega}{db} = -\frac{b}{2a^2}\omega, \quad \text{oder} \quad \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{1}{2a^2} \cdot bdb.$$

Wenn man alſo den $b = 0$ entſprechenden Werth von ω mit ω_0 bezeichnet, ſo hat man:

$$\log.\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\frac{b^2}{4a^2}, \quad \omega = \omega_0 \cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}}.$$

ber andererſeits iſt:

$$\omega_0 = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a},$$

lglich:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos. bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}}. \qquad (k)$$

Wenn man a gegen Null convergiren läßt; ſo convergirt auch der zweite Theil r vorhergehenden Gleichung gegen Null (§. 89), und folglich hat man an r Grenze, wofern b nicht Null iſt:

$$\int_0^\infty \cos. bx dx = 0,$$

as mit dem im §. 325 erhaltenen Reſultate übereinſtimmt.

§. 411. Das doppelte Integral:

$$\Omega = \int_0^\infty \int_0^\infty 2e^{-y^2(1+x^2)} \cos. bx \cdot y dy dx$$

rwandelt ſich, wenn man zunächſt die Integration in Beziehung auf y verhtet, in:

$$\Omega = \int_0^\infty \frac{\cos. bx \cdot dx}{1+x^2},$$

ıd wenn man zuerſt in Beziehung auf x integrirte; ſo hätte man nach der rmel (k):

$$\Omega = \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-\left(y^2 + \frac{b^2}{4y^2}\right)} dx = \sqrt{\pi} \cdot e^b \int_0^\infty e^{-\left(\frac{2y^2+b}{2y}\right)^2} dx.$$

Setzen wir nun:

$$t = \frac{2y^2 - b}{2y}, \quad \text{folglich:} \quad \left(\frac{2y^2+b}{2y}\right)^2 = t^2 + 2b,$$

$$dy = \frac{1}{2} dt \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+2b}}\right);$$

ſind die $y = \infty$, $y = 0$ entſprechenden Grenzen der neuen Veränderlichen $t = +\infty$, $t = -\infty$, und man erhält:

$$\Omega = \frac{\sqrt{\pi} \cdot e^{-b}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 2b}}\right) dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot e^{-b} + \frac{\sqrt{\pi} \cdot e^{-b}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2} t dt}{\sqrt{t^2 + 2b}}.$$

Nun iſt aber das im letzten Theile der vorhergehenden Gleichung vorkommende Integral $= 0$, wenn $b > 0$ iſt; denn einerſeits iſt der Factor, womit die Größe $e^{-t^2} dt$ unter dem Zeichen $\int$ multiplicirt iſt, numeriſch kleiner als 1, ſo daß der zwiſchen den Grenzen $0, \infty$ genommene Theil des Integrales einen endlichen Zahlenwerth, kleiner als $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, hat, und da alle Elemente des Integrales mit t das Zeichen verändern, ſo hat man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2} t dt}{\sqrt{t^2 + 2b}} = \int_{\infty}^{0} \frac{e^{-t^2} t dt}{\sqrt{t^2 + 2b}} + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-t^2} t dt}{\sqrt{t^2 + 2b}} = 0.$$

Es iſt alſo für $b > 0$:

$$\Omega = \int_0^{\infty} \frac{\cos. bx dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-b}. \qquad (l)$$

Es iſt zu bemerken, daß der hier zur Beſtimmung eines einfachen Integrales angewandte analytiſche Kunſtgriff in der Vergleichung zweier Reſultate beſteht, welche man erhält, wenn man bei einem doppelten Integrale die Ordnung der Integration umkehrt.

Wenn man in der Gleichung (l), mx für x und $\frac{b}{m}$ für b ſetzt; ſo erhält man:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos. bx dx}{1 + m^2 x^2} = \frac{\pi}{2m} \cdot e^{-\frac{b}{m}}, \qquad (m)$$

und wenn man alsdann $m = 0$ ſetzt; ſo ergibt ſich wie vorhin, wofern b nicht $= 0$ iſt:

$$\int_0^{\infty} \cos. bx dx = 0.$$

Wenn man in der Gleichung (l), $\frac{x}{m}$ für x und mb für b ſetzt; ſo kommt:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos. bx dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2m} \cdot e^{-mb},$$

woraus folgt, wenn man in Beziehung auf b differenzirt:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin. bx dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-mb}.$$

Wenn der Parameter b negativ wäre, ſo führte dieſelbe Analyſe auf die Formeln:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos. bx dx}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2m} \cdot e^{mb}, \quad \int_0^{\infty} \frac{x \sin. bx dx}{m^2 + x^2} = -\frac{\pi}{2} \cdot e^{mb}.$$

Elftes Kapitel.

von den als Functionen veränderlicher Parameter betrachteten bestimmten Integralen. — Euler'ſche Functionen.

§. 412. Man kann ſetzen:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,\alpha)\,d\alpha = Fx, \qquad (1)$$

nd alsdann iſt die Function F eine neue transcendente Größe, wenn ſich das n erſten Theile der Gleichung vorkommende Integral nicht algebraiſch, oder rch die Transcendenten, für welche man bereits Tafeln beſitzt, für beliebige Berthe der Grenzen α_0, α_1, oder wenigſtens für ſpecielle Werthe dieſer renzen, ausdrücken läßt. Man kann die Werthe von Fx für jeden Werth on x mit einer beliebigen Annäherung numeriſch berechnen, wofern die Funcon $f(x,\alpha)$ innerhalb der Integrationsgrenzen nicht durch das Unendliche geht §. 320). Auch kann man die Function Fx in Beziehung auf x differenziren der integriren, wenn man unter dem Zeichen $\int$ differenzirt oder integrirt, hne daß man die Integration in Beziehung auf die Hülfsveränderliche α zu errichten braucht.

Die Transcendenten, von welchen hier die Rede iſt, und welche ſich auf ine andern zurückführen laſſen, ſind von einer höhern Ordnung, als die Inegrale:

$$\int_{x_0}^{x} fx\,dx, \qquad (2)$$

elche ebenfalls als irreductibel angenommen werden. In der That beſteht er Hauptcharakter dieſer letzten Transcendenten darin, daß ihre Ableitungen unctionen fx ſind, welche ſich algebraiſch ausdrücken laſſen, oder welche aus lementaren Transcendenten, für welche man Tafeln hat, zuſammengeſetzt ſind, während die Ableitung F'x einen Ausdruck:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{df(x,\alpha)}{dx}\,d\alpha$$

von derſelben Natur, als die Function, wovon ſie abgeleitet iſt, hat. Wenn ſich die Function F'x ohne Hülfe beſtimmter Integrale ausdrücken ließe; ſo nüßte man den Ausdruck Fx auf die Form:

$$\int_{x_0}^{x} F'x\,dx$$

ringen, und alsdann würde Fx nicht mehr zu der Categorie der Transcenenten (1), ſondern in die der Transcendenten (2) gehören.

Eine Function, welche von mehreren Größen abhängt, kann zu den Transcendenten verſchiedener Categorien gezählt werden, je nachdem man dieſe oder ne der darin vorkommenden Größen als die veränderlichen betrachtet. So ehören z. B. die elliptiſchen Functionen der erſten und zweiten Art zu der ategorie der Integrale (2), wenn man den Modulus als conſtant, und die bere Grenze der Amplitude als veränderlich betrachtet, und ſie gehören dagen in die Categorie der Integrale (1), wenn man die Grenzen der Am-

plitude beide als conſtant und den Modulus als eine Größe betrachtet, welche ſich zwiſchen den Grenzen 0, 1 ſtetig ändern kann.

§. 413. Die Function f könnte innerhalb der Grenzen des Integrales durch das Unendliche gehen, ohne daß die Function Fx aufhörte, ſtetig zu ſein, und wenn $f(x,\alpha)$ für einen gewiſſen Werth von α plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem andern überginge; ſo würde die Function Fx im Allgemeinen keine Unterbrechung der Stetigkeit erfahren, Dieſes iſt eine Folgerung aus den erſten Begriffen der Theorie der Quadraturen, wobei wir uns nicht aufzuhalten brauchen.

Umgekehrt, die Function F kann Unterbrechungen der Stetigkeit erfahren für Werthe von x, welche die Function f nicht discontinuirlich machen. Es ſei z. B.:

$$Fx = \int_0^\infty \frac{\text{sin. } \alpha x}{\alpha} d\alpha;$$

ſo iſt für poſitive Werthe von x die Function $Fx = \frac{1}{2}\pi$ (§. 407), und für negative Werthe derſelben Veränderlichen x iſt $Fx = -\frac{1}{2}\pi$. Die Function Fx geht alſo für $x = 0$ plötzlich von dem Werthe $\frac{1}{2}\pi$ zu dem Werthe $-\frac{1}{2}\pi$ über, obgleich dieſer Werth von x die Function $\frac{\text{sin. } \alpha x}{\alpha}$ nicht discontinuirlich macht. Desgleichen, wenn man ſetzte:

$$Fx = \int_0^\infty \frac{\alpha \text{ sin. } \alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha,$$

ſo wäre $Fx = \frac{1}{2}\pi . e^{-x}$, oder $Fx = -\frac{1}{2}\pi e^x$, je nachdem der Werth von x poſitiv, oder negativ iſt, und die Function Fx würde in ihrem Werthe dieſelbe plötzliche Veränderung erfahren.

Hieraus folgt, daß das Integral:

$$y = \int_0^\infty \frac{\text{sin. } \alpha x}{\alpha} d\alpha \qquad (3)$$

das Syſtem zweier geraden Linien MN, M'N' (Fig. 91) ausdrückt, welche zur Axe der x parallel ſind, indem ſich die eine auf der Seite der poſitiven x und die andere auf der Seite der negativen x ins Unendliche erſtreckt und beide ſich plötzlich in den Punkten ſchließen, wo ſie die Axe der y treffen. Der Abſciſſe $x = 0$ entſpricht übrigens der Werth $y = 0$, d. h. das arithmetiſche Mittel aus den Ordinaten $OM = \frac{1}{2}\pi$, $OM' = -\frac{1}{2}\pi$. Man bemerkt leicht die Analogie zwiſchen dieſen Reſultaten und denen im §. 113, wo der Werth von y durch eine unendliche Reihe ausgedrückt wurde, während er hier vermittelſt eines beſtimmten Integrales unter endlicher Form ausgedrückt wird.

Hieraus erhellet, wie die beſtimmten Integrale, worin die Veränderliche als Parameter erſcheint, discontinuirliche Functionen ausdrücken können, und wie durch die Fortſchritte der Analyſis ſie bei den Aufgaben herbeigeführt werden müſſen, bei welchen die Discontinuität gewiſſer Functionen eine nothwendige Bedingung iſt. Die Anwendung der beſtimmten Integrale bietet alsdann vor der der Reihen den Vortheil dar, daß man mit erſtern leicht die analytiſchen Combinationen und Transformationen vornehmen kann, ſo daß die Aufgabe zuletzt auf die durch das beſtimmte Integral angezeigte arithmetiſche Quadratur zurückgeführt, oder dieſe Operation vermieden wird, wenn ſie der Aufgabe nicht nothwendig inhärirt.

§. 414. Aus der Gleichung (3) kann man durch ſchickliche Transformationen noch andere Formeln ableiten, welche andern Fällen der Discontinuität entſprechen. Es ſei z. B. die Function:

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin.\alpha \cos.\alpha x}{\alpha} d\alpha \qquad (4)$$

gegeben, ſo hat man:

$$\sin.\alpha \cos.\alpha x = \tfrac{1}{2}[\sin.(1+x)\alpha + \sin.(1-x)\alpha],$$

woraus folgt:

$$y = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin.(1+x)\alpha}{\alpha} d\alpha + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin.(1-x)\alpha}{\alpha} d\alpha.$$

Nun reducirt ſich aber nach dem Bewieſenen das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\sin.(1+x)\alpha}{\alpha} d\alpha$$

für $x > -1$ auf $\frac{1}{2}\pi$ und für $x < -1$ auf $-\frac{1}{2}\pi$, und ebenſo reducirt ſich das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\sin.(1-x)\alpha}{\alpha} d\alpha$$

für $x < 1$ auf $\frac{1}{2}\pi$ und für $x > 1$ auf $-\frac{1}{2}\pi$. Hieraus folgt, daß der Werth von $y = \frac{1}{2}\pi$ iſt, wenn x zwiſchen $+1$ und -1 liegt, und daß $= 0$ wird, wenn x außerhalb dieſer Grenzen liegt. Wenn man alſo $OP = OP' = 1$ (Fig. 92), $PM = PM' = \frac{1}{2}\pi$ nimmt; ſo wird der geometriſche Ort der Gleichung (4) von dem Theile MM' der zu der Axe der x parallelen geraden Linie; und von den geraden Linien PX, $P'X'$ gebildet, welche in den Punkten P, P' begrenzt ſind; aber nach dem andern Sinne unbeſtimmt fortlaufen.

§. 415. Aehnliche Unterbrechungen der Stetigkeit finden bei den beſtimmten Integralen ſtatt, welche ſich aus den unbeſtimmten Integralen ergeben, deren algebraiſchen Werth man kennt. Wir wollen namentlich die durch:

$$y = \int_0^\pi \frac{\sin.\alpha d\alpha}{\sqrt{1 - 2x\cos.\alpha + x^2}} \qquad (5)$$

ausgedrückte Function betrachten, ſo iſt, da die Wurzelgröße in der ganzen Ausdehnung des Integrales poſitiv bleiben muß:

$$\int \frac{\sin.\alpha d\alpha}{\sqrt{1 - 2x\cos.\alpha + x^2}} = \frac{1}{x}\sqrt{1 - 2x\cos.\alpha + x^2} + \text{const.}$$

An den Grenzen $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$ wird die Wurzelgröße reſp. gleich $\sqrt{(1-x)^2}$, $\sqrt{(1+x)^2}$, und da ſie poſitiv genommen werden muß; ſo folgt:

$$\sqrt{(1-x)^2} = \pm(1-x), \text{ je nachdem } x \lessgtr 1 \text{ iſt}$$

$$\sqrt{(1+x)^2} = \pm(1+x), \text{ je nachdem } x \gtrless -1 \text{ iſt},$$

und folglich iſt für

$$x > 1, \qquad y = \frac{2}{x},$$
$$x < 1, > -1, \quad y = 2,$$
$$x < -1, \qquad y = -\frac{2}{x}.$$

Der geometriſche Ort der Gleichung (5) wird alſo aus zwei B MN, M'N' (Fig. 93) gleichſeitiger Hyperbeln, und aus einem Theile der zu der Axe der x parallelen geraden Linie gebildet.

In dieſem Falle ſind die Unterbrechungen der Stetigkeit, welche die F tion y für $x = 1$, $x = -1$ erfährt, nur von der zweiten Ordnung, ihre Ableitung:

$$y' = \int_0^x \frac{\sin.\alpha\,(\cos.\alpha - x)}{(1 - 2x\cos.\alpha + x^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\alpha$$

erfährt für dieſelben Werthe von x Stetigkeitsunterbrechungen der erſten nung, weil ſie plötzlich von dem Werthe — 2 zu dem Werthe 0 und dieſem zu dem Werthe 2 übergeht.

Euler'ſche Functionen.

§. 416. In die Categorie der Functionen, womit wir uns jetzt beſ tigen, gehören namentlich zwei merkwürdige Arten von Transcendenten, w Legendre Euler'ſche Integrale genannt hat, zur Erinnerung an großen Geometer, welcher die Eigenſchaften derſelben zuerſt unterſucht hat, deſſen viel umfaſſende Arbeiten alle Zweige der Analyſis ſo bedeutend er tert haben. Die Euler'ſchen Transcendenten der erſten Art werden das Integral:

$$\int_0^1 (1-\alpha)^{x-1}\alpha^{y-1}d\alpha \qquad (1$$

beſtimmt, welches ſich in:

$$\int_0^\infty \frac{\beta^{y-1}d\beta}{(1+\beta)^{x+y}}$$

verwandelt, wenn man

$$\alpha = \frac{\beta}{1+\beta}$$

ſetzt, und wir wollen ſie durch das Symbol (x|y) bezeichnen. Die Eu ſchen Transcendenten der zweiten Art werden durch das Integral:

$$\int_0^1 \left(\log.\frac{1}{\alpha}\right)^{x-1} d\alpha$$

gegeben, welches ſich in:

$$\int_0^\infty e^{-\beta}\beta^{x-1}\,d\beta$$

verwandelt, wenn man:

$$\log.\frac{1}{\alpha} = \beta$$

ſetzt, und wir wollen ſie mit Legendre durch das Symbol Γx bezeich Es iſt zweckmäßig, daß wir zuerſt die Euler'ſchen Transcendenten der zw

t betrachten, welches die einfachſten ſind, weil ſie nur von einer einzigen ränderlichen abhängen.

§. 417. Die theilweiſe Integration gibt:

$$\int e^{-\beta}\beta^{x}d\beta = -e^{-\beta}\beta^{x} + x\int e^{-\beta}\beta^{x-1}d\beta,$$

raus folgt:

$$\int_0^\infty e^{-\beta}\beta^{x}d\beta = x\int_0^\infty e^{-\beta}\beta^{x-1}d\beta,$$

dem x als poſitiv vorausgeſetzt wird, oder vielmehr:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma x. \qquad (a)$$

ieſe Formel drückt die charakteriſtiſche Eigenſchaft der Function Γx aus, und ch derſelben iſt dieſe Function für alle poſitiven Werthe von x bekannt, enn man eine Tafel ihrer Werthe zwiſchen den Grenzen $x = 0$, $x = 1$, oder lgemeiner, zwiſchen den Grenzen $x = i$, $x = i+1$, wo i eine beliebige nze poſitive Zahl bezeichnet, hat. Legendre und Gauß haben in der hat zum praktiſchen Gebrauche nach Annäherungsformeln, welche hier nicht iher angegeben werden können, Tafeln der Function Γx berechnet.

Es iſt:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-\beta}d\beta = 1, \qquad (a_1)$$

d aus der Vergleichung dieſer Formel mit der vorhergehenden ergibt ſich:

$$\Gamma i = 1.2.3\ldots(i-1),$$

o i eine ganze poſitive Zahl bezeichnet.

Die Producte der um eine conſtante Differenz h verſchiedener Factoren:

$$x(x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots,$$

erden Factoriellen und numeriſche Facultäten genannt, wegen ihrer ehnlichkeit mit den Potenzen, und durch eine Vertauſchung der Veränderlichen nn man ſie leicht auf die einfacheren Factoriellen:

$$1.2.3\ldots i,$$

elche in der Theorie der Combinationen und der Wahrſcheinlichkeitsrechnung ne ſo wichtige Rolle ſpielen, zurückführen. Die ſtetige Function Γx wird desmal eine Factorielle dieſer Art, wenn x durch einen ganzen poſitiven Werth ht, und folglich kann die Tafel der Werthe der Function Γx als eine Interpolationstafel für die Factoriellen betrachtet werden.

Die Gleichungen (a), (a_1) geben $\Gamma(0) = \infty$, und folglich hat die Curve $= \Gamma x$ die Axe der y zur Aſymptote. Von dem Werthe $x = 0$ an nimmt e Function Γx bis zu einem gewiſſen Werthe von $x = 1{,}46163\ldots$ ab, und mmt dann bis zu dem Werthe $x = 2$ zu, woraus wegen der Gleichung (a) enbar folgt, daß die Function Γx für die größere Werthe von x ohne Ende d zwar ſehr ſchnell mit dieſer Veränderlichen zunehmen muß.

Für negative Werthe von x hat die Function:

$$\Gamma x = \int_0^\infty e^{-\beta}\beta^{x-1}d\beta \qquad (\beta)$$

ne angebbaren Werthe mehr, und die Gleichung (a) iſt nicht mehr anndbar.

§. 418. Wenn wir in der Gleichung (β) die Größe β in $m\alpha$ verndeln, ſo geht ſie über in:

$$\int_0^\infty e^{-m\alpha}\alpha^{x-1}d\alpha = \frac{\Gamma x}{m^x}, \qquad (b)$$

und wenn wir in dieser letzten Gleichung $x+y$ für x, und $1+\beta$ statt m setzen; so erhalten wir:

$$\int_0^\infty e^{-(1+\beta)\alpha}\alpha^{x+y-1}d\alpha = \frac{\Gamma(x+y)}{(1+\beta)^{x+y}}.$$

Multiplicirem wir die beiden Theile dieser Gleichung mit $\beta^{y-1}d\beta$ und integrirm zwischen den Grenzen $0, \infty$ in Beziehung auf β, so ergibt sich:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(1+\beta)\alpha}\alpha^{x+y-1}\beta^{y-1}d\beta d\alpha = \Gamma(x+y)\int_0\frac{\beta^{y-1}d\beta}{(1+\beta)^{x+y}}. \qquad (6)$$

Nun ist aber nach der Formel (b):

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\beta}\beta^{y-1}d\beta = \frac{\Gamma y}{\alpha^y},$$

so daß der erste Theil der Gleichung (6) nach verrichteter Integration in Beziehung auf β übergeht in:

$$\int_0^\infty \frac{\Gamma y}{\alpha y}\cdot e^{-\alpha}\alpha^{x+y-1}d\alpha = \Gamma y\int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^{x-1}d\alpha = \Gamma y\cdot\Gamma x.$$

Die Gleichung (β) gibt also:

$$\Gamma x\cdot\Gamma y = \Gamma(x+y)\cdot\int_0^\infty \frac{\beta^{y-1}d\beta}{(1+\beta)^{x+y}}, \qquad (7)$$

und wenn man $y+x=1$ setzt; so erhält man:

$$\Gamma y\cdot\Gamma(1-y) = \Gamma(1)\cdot\int_0^\infty \frac{\beta^{y-1}d\beta}{1+\beta},$$

oder wenn man y in x verwandelt und bemerkt, daß sich $\Gamma(1)$ auf die Einheit reducirt:

$$\Gamma x\cdot\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{\beta^{x-1}d\beta}{1+\beta},$$

oder endlich nach der Formel (d) im §. 406:

$$\Gamma x\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin.\pi x}. \qquad (c)$$

Nach dieser letzten Formel berechnet man die Tafel der Werthe Γx zwischen den Grenzen $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, wenn man die Tafel der Werthe derselben Function zwischen den Grenzen $x=\frac{1}{2}$, $x=1$ hat.

Für $x=\frac{1}{2}$ gibt die Formel (c):

$$[\Gamma(\tfrac{1}{2})]^2 = \pi, \quad \text{oder} \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}; \qquad (c_1)$$

aber es ist:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-\beta\sqrt{\beta}}\cdot d\beta = 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt,$$

welches einen neuen Beweis der Formel (a) im §. 403 liefert.

§. 419. Nach der Definition der Euler'schen Function der ersten Art kann die Gleichung (7) auf folgende Weise geschrieben werden:

$$(x|y) = \frac{\Gamma x \cdot \Gamma y}{\Gamma(x+y)}. \qquad (d)$$

Durch dieſe von Euler herrührende Fundamentalformel, für welche wir eben den von Poiſſon gegebenen Beweis mitgetheilt haben, wird die Berechnung der Tafel mit einem doppelten Eingange (§. 116), welche die Werthe der Function $(x|y)$ für die poſitiven Werthe der Veränderlichen x,y gäbe, auf die Berechnung der Tafel der Function Γx zurückgeführt. Hieraus folgt:

$$(x|y) = (y|x),$$

was übrigens auch direct daraus folgt, daß der Werth des Integrales (α) nicht geändert wird, wenn man α in $1-\alpha$ verwandelt.

Ferner folgt aus der Formel (d):

$$(x+z|y) \cdot \Gamma(x+y+z) = \Gamma(x+z) \cdot \Gamma y,$$
$$(x|z) \cdot \Gamma(x+z) = \Gamma x \cdot \Gamma z,$$

wo z ſowohl als x und y eine poſitive Veränderliche bezeichnet, und hieraus folgt:

$$(x+z|y) \cdot (x|z) = \frac{\Gamma x \cdot \Gamma y \cdot \Gamma z}{\Gamma(x+y+z)},$$

oder, da der zweite Theil der vorhergehenden Gleichung eine ſymmetriſche Function der Veränderlichen x, y, z iſt:

$$(x+z|y) \cdot (x|z) = (y+z|x) \cdot (y|z).$$

Aus der Verbindung der Formeln (c) und (d) ergibt ſich:

$$(1-x|x) = \frac{\pi}{\sin. \pi x}.$$

Wenn man in dem Integrale (α) $y = x$, $\alpha = \frac{1}{2}(1+\omega)$ ſetzt; ſo erhält man:

$$(x|x) = \frac{1}{2^{2x-1}} \int_{-1}^{1} (1-\omega^2)^{x-1} d\omega = \frac{1}{2^{2x-2}} \int_{0}^{1} (1-\omega^2)^{x-1} d\omega,$$

und wenn man nun $\sqrt{\alpha}$ für ω ſetzt; ſo kommt:

$$(x|x) = \frac{1}{2^{2x-1}} \int_{0}^{1} (1-\alpha)^{x-1} \alpha^{-\frac{1}{2}} d\alpha = \frac{1}{2^{2x-1}} \cdot \left(x\middle|\frac{1}{2}\right).$$

Wegen der Gleichungen (d) und (c_1) iſt dieſe letzte Formel identiſch mit der folgenden:

$$\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-2}} \cdot \frac{\Gamma(2x)}{\Gamma x},$$

woraus ſich für eine ganze Zahl i ergibt:

$$\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^i} \cdot \frac{1.2.3...(2i-1)}{2^{i-1} \cdot 1.2.3...(i-1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^i} \cdot 1.3.5...(2i-1),$$

oder gleich:

$$1.3.5...(2i-1) = \frac{2^i}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right).$$

§. 420. Es iſt identiſch:

Wir wollen nun

$$V=\int\int\int \xi^{\alpha-1}\eta^{\beta-1}\zeta^{\gamma-1}d\xi d\eta d\zeta,\quad \xi+\eta+\zeta<\theta,\quad \theta-\xi=\eta$$

ſetzen; ſo können wir ſchreiben:

$$V=\int_0^{\eta_1-\eta}\int_0^{\eta_1}\int_0^{\theta}\xi^{\alpha-1}\eta^{\beta-1}\zeta^{\gamma-1}d\xi d\eta d\zeta.$$

Aber das doppelte Integral:

$$\int_0^{\eta_1-\eta}\int_0^{\eta_1}\eta^{\beta-1}\zeta^{\gamma-1}d\eta d\zeta$$

hat nach dem Vorhergehenden den Werth:

$$\frac{\Gamma\beta\cdot\Gamma\gamma}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int_0^{\eta_1}\mu^{\beta+\gamma-1}d\mu,$$

und folglich iſt:

$$V=\frac{\Gamma\beta\cdot\Gamma\gamma}{\Gamma(\beta+\gamma)}\int_0^{\theta}\int_0^{\eta_1}\xi^{\alpha-1}\mu^{\beta+\gamma-1}d\mu d\xi.$$

Endlich hat man wieder nach der vorhergehenden Rechnung, wenn ma η_1 ſeinen Werth ſetzt und μ_1 eine neue Veränderliche bezeichnet:

$$\int_0^{\theta}\int_0^{\theta-\xi}\xi^{\alpha-1}\mu^{\beta+\gamma-1}d\mu d\xi=\frac{\Gamma\alpha\cdot\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^{\theta}\mu_1{}^{\alpha+\beta+\gamma-1}$$

folglich:

$$V=\frac{\Gamma\alpha\cdot\Gamma\beta\cdot\Gamma\gamma}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\cdot\int_0^{\theta}\mu_1{}^{\alpha+\beta+\gamma-1}d\mu_1.$$

Wenn man nun $\theta=1$ ſetzt; ſo kommt man wieder auf die auf dei dreier Veränderlicher beſchränkte Formel (φ), und da ſich die anger Analyſe offenbar ſucceſſive auf eine beliebige Anzahl von Veränderlich ſtrecken läßt; ſo folgt, daß die Formel (φ) und folglich die Formel ihrer ganzen Allgemeinheit bewieſen iſt.

§. 422. Wir wollen in der Formel (b), n für $x-1$ und x ſetzen; ſo verwandelt ſie ſich in:

$$\int_0^{\infty}x^n e^{-mx}dx=\frac{\Gamma(n+1)}{m^{n+1}},$$

und wenn n eine ganze poſitive Zahl iſt; ſo hat man folglich:

$$\int_0^{\infty}x^n e^{-mx}dx=\frac{1.2.3\ldots n}{m^{n-1}},$$

was ſich auch aus der Gleichung (a) im §. 313 ergibt, wenn man de in $-m$ verwandelt.

Wir wollen in der Formel (g), $m=a+b\sqrt{-1}$ ſetzen, wo poſitive Conſtante bezeichnet und für die imaginäre Exponentialgröße ihren Sinus und Coſinus ausgedrückten Werth ſubſtituiren; ſo verwandelt ſ Formel in:

$$\int_0^{\infty}x^n e^{-ax}(\cos.bx-\sqrt{-1}\cdot\sin.bx)dx=\frac{\Gamma(n+1)}{(a+b\sqrt{-1})^{n+1}}$$

oder, wenn man

$$a^2 + b^2 = \varrho^2, \quad \frac{b}{a} = \text{tang.}\,\lambda$$

ſetzt, iſt:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}(\cos. bx - \sqrt{-1} \cdot \sin. bx)dx$$
$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\varrho^{n+1}}[\cos.(n+1)\lambda - \sqrt{-1} \cdot \sin.(n-1)\lambda],$$

Dieſe letzte Gleichung zerfällt in die beiden andern:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} \cos. bx \cdot dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\varrho^{n+1}} \cdot \cos.(n+1)\lambda,$$
$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} \sin. bx \cdot dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\varrho^{n+1}} \cdot \sin.(n+1)\lambda;$$

und in der Vorausſetzung von $n = 0$ geben dieſe die Formeln (f) im §. 407 wieder.

Zwölftes Kapitel.

Entwickelung der Functionen in trigonometriſche Reihen. — Theorem von Fourier.

§. 423. Es bezeichne y eine periodiſche Function von x von der Form:

$$y = A_1 \sin. x + A_2 \sin. 2x + A_3 \sin. 3x + \ldots + A^n \sin. nx, \qquad (1)$$

wo jeder Coefficient A_i von x unabhängig iſt, und fx bezeichne eine Function von x, welche eine mathematiſche oder empiriſche, ſtetig, oder Stetigkeitsunterbrechungen von einer beliebigen Ordnung unterworfen ſein kann; ſo ſoll man die n Coefficienten A_i ſo beſtimmen, daß für die n beſondere zwiſchen $x = 0$ und $x = \pi$ um gleiche Differenzen wachſenden Werthe:

$$x = \frac{\pi}{n+1}, \quad x = \frac{2\pi}{n+1}, \quad x = \frac{3\pi}{n+1}, \ldots x = \frac{n\pi}{n+1}, \qquad (2)$$

$y = fx$ iſt, oder mit andern Worten, daß die durch die Gleichung (1) ausgedrückte Curve mit der Curve $y = fx$, n Punkte gemein hat, welche den Abſciſſen (2) entſprechen (§. 21).

Wir wollen die Coordinaten dieſer gemeinſchaftlichen Punkte mit $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ bezeichnen; ſo haben wir zur Beſtimmung der Coefficienten A_i die n Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= A_1 \sin. \frac{\pi}{n+1} + A_2 \sin. \frac{2\pi}{n+1} + \ldots + A_n \sin. \frac{n\pi}{n+1} \\
y_2 &= A_1 \sin. \frac{2\pi}{n+1} + A_2 \sin. \frac{4\pi}{n+1} + \ldots + A_n \sin. \frac{2n\pi}{n+1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= A_1 \sin. \frac{n\pi}{n+1} + A_2 \sin. \frac{2n\pi}{n+1} + \ldots + A_n \sin. \frac{n^2\pi}{n+1}
\end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Wenn man ſie zuſammenaddirt, nachdem man ſie reſp. durch:

$$2\sin.\frac{i\pi}{n+1},\quad 2\sin.\frac{2i\pi}{n+1},\ldots 2\sin.\frac{ni\pi}{n+1} \tag{4}$$

multiplicirt hat, ſo hat die Unbekannte A_i zum Multiplicator:

$$2\sin.\frac{i\pi}{n+1}\cdot\sin.\frac{i'\pi}{n+1}+2\sin.\frac{2i\pi}{n+1}\cdot\sin.\frac{2i'\pi}{n+1}+\ldots$$
$$\ldots+2\sin.\frac{ni\pi}{n+1}\cdot\sin.\frac{ni'\pi}{n+1},$$

d. h. die Differenz der beiden Summen:

$$\left.\begin{aligned}1+\cos.\frac{(i'-i)\pi}{n+1}+\cos.\frac{2(i'-i)\pi}{n+1}+\ldots+\cos.\frac{n(i'-i)\pi}{n+1}&=S_1\\ 1+\cos.\frac{(i'+i)\pi}{n+1}+\cos.\frac{2(i'+i)\pi}{n+1}+\ldots+\cos.\frac{n(i'+i)\pi}{n+1}&=S_2\end{aligned}\right\}. \tag{S}$$

Es ſei allgemeiner:

$$\cos.u+\cos.(u+\nu)+\cos.(u+2\nu)\ldots+\cos.(u+n\nu)=S,$$

ſo findet man durch eine ähnliche Rechnung, wie die im §. 406:

$$S=\frac{-\cos.(u-\nu)+\cos.u+\cos.(u+n\nu)-\cos.[u+(n+1)\nu]}{2(1-\cos.\nu)}$$

und für $u=0$:

$$S=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\cos.n\nu-\cos.(n+1)\nu}{1-\cos.\nu}\right].$$

Wenn man nun:

$$\nu=\frac{(i'\mp i)\pi}{n+1}$$

ſetzt, ſo erhält man:

$$\cos.(n+1)\nu=\pm 1,\quad \cos.n\nu=\pm\cos.\nu,$$

je nachdem $(i'\mp i)\pi$ ein gerades oder ungerades Vielfaches von π iſt. I dem einen und in dem andern Falle iſt alſo:

$$\cos.n\nu=\cos.\nu\cdot\cos.(n+1)\nu,\quad S=\tfrac{1}{2}[1-\cos.(n+1)\nu],$$

und folglich:

$$S_1=\tfrac{1}{2}[1-\cos.(i'-i)\pi],\quad S_2=\tfrac{1}{2}[1-\cos.(i'+i)\pi]. \tag{S'}$$

So lange der Index i' von i verſchieden iſt, ſind die Zahlen $i'-i$, $i'+$ zu gleicher Zeit gerade oder ungerade, und es iſt $S_1-S_2=0$, ſo daß a Coefficienten A mit Ausnahme von A_i aus der Summe der reſp. durch t Factoren (4) multiplicirten Gleichungen (3) verſchwinden.

Für $i'=i$ hat man vermöge der zweiten der Gleichungen (S'), $S_2=$ und die erſte der Gleichungen (S') wird illuſoriſch, weil man den Winkel in dem Werthe von S, woraus dieſe Gleichung abgeleitet iſt, nicht $=0$ ſetz kann; aber in dieſem Falle gibt die erſte der Gleichungen (S) direct $S_1=n+$

Nach allen dieſen Bemerkungen hat man zur Beſtimmung des Werth des Coefficienten A_i die Gleichung:

$$A_i=\frac{2}{n+1}\left(y_1\sin.\frac{i\pi}{n+1}+y_2\sin.\frac{2i\pi}{n+1}+\ldots+y_n\sin.\frac{ni\pi}{n+1}\right),$$

und man braucht zur Auflösung der geſtellten Aufgabe dem Index i nur ſucceſſive die Werthe 1, 2, 3, ... n beizulegen.

§. 424. Je größer die Zahl n iſt, deſto mehr Punkte hat die durch die Gleichung (1) beſtimmte Curve zwiſchen den Abſciſſen $x = 0$, $x = \pi$ mit der Curve $y = fx$ gemein, und folglich fallen die beiden Curven an der Grenze $(n = \infty)$ für alle zwiſchen den eben angegebenen Grenzen liegende Punkte zuſammen. An dieſer Grenze $n = \infty$ verwandelt ſich aber die Summe, welche den Werth von A_i ausdrückt, in ein beſtimmtes Integral, und wenn man

$$\frac{i\pi}{n+1} = \xi, \quad \frac{\pi}{n+1} = d\xi, \quad y_i = f\xi$$

ſetzt, ſo kommt:

$$A_i = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \text{sin. } i\xi \cdot f\xi d\xi,$$

und folglich:

$$fx = \frac{2}{\pi} \cdot \Sigma \cdot \text{sin. } ix \int_0^{\pi} \text{sin. } i\xi \cdot f\xi d\xi, \qquad (\alpha)$$

wo das Zeichen Σ andeutet, daß dem Index i ſucceſſive alle ganzen Zahlen von der Einheit incl. beigelegt werden ſollen, und daß man die Summe aller der ſo erhaltenen Glieder zu nehmen hat.

Der Beweis, welchen wir eben von der Formel (α) gegeben haben, iſt von Lagrange, und ſchließt ſich an die Theorie der Interpolation an, wie der, welchen wir von der Taylor'ſchen und folglich von der Maclaurin'ſchen Reihe gegeben haben (§. 98), und es war zweckmäßig, durch dieſelbe Methode zu dieſen Hauptformeln für die Entwickelung der Functionen in Reihen zu gelangen; aber es bleibt noch zu beweiſen übrig, daß die durch den zweiten Theil der Gleichung (α) ausgedrückte Reihe immer convergent iſt, von welcher Beſchaffenheit die Function f auch ſein mag, ſei ſie ſtetig oder nicht, wofern ſie nur nicht zwiſchen den Grenzen $x = 0$, $x = \pi$ unendlich wird. Die Methode, welche wir anwenden wollen, um dieſen Fundamentalſatz in aller Strenge und ohne unnütze Einſchränkungen abzuleiten, wird uns zu gleicher Zeit einen neuen und in gewiſſen Beziehungen ſogar einen directen Beweis der Formel (α) an die Hand geben.

§. 425. Suchen wir die Grenze, gegen welche das Integral:

$$\int_{\mu}^{\nu} \frac{\text{sin. } i\omega}{\text{sin. } \omega} d\omega$$

convergirt, wenn man für i eine immer größere und größere poſitive Zahl nimmt. Zu dem Zwecke wollen wir $\frac{1}{\varepsilon}$ für i ſetzen, wo ε eine poſitive Zahl bezeichnet, welche ohne Ende gegen Null convergirt und $\frac{\omega}{\varepsilon} = \theta$ ſetzen; ſo kommt:

$$\int_{\mu}^{\nu} \frac{\text{sin. } i\omega}{\text{sin. } \omega} d\omega = \int_{\frac{\mu}{\varepsilon}}^{\frac{\nu}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon}{\text{sin. } \varepsilon\theta} \cdot \text{sin. } \theta d\theta. \qquad (\omega)$$

Aber wenn man ε wie eine unendlich kleine Zahl behandelt, so verſchwindet der Factor $\frac{\varepsilon}{\sin.\varepsilon\theta}$, wofern nicht zu gleicher Zeit $\varepsilon\theta$ unendlich klein iſt, in welchem Falle:

$$\frac{\varepsilon}{\sin.\varepsilon\theta} = \frac{1}{\theta}$$

iſt, und folglich kann man an der Grenze für das gegebene Integral das folgende ſetzen:

$$\int_{\frac{\mu}{\varepsilon}}^{\frac{\nu}{\varepsilon}} \frac{\sin.\theta}{\theta}\,d\theta.$$

Nun iſt aber (§. 407):

$$\int_0^\infty \frac{\sin.\theta}{\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\pi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin.\theta}{\theta}\,d\theta = \pi$$

$$\int_0^{\frac{\nu}{\varepsilon}} \frac{\sin.\theta}{\theta}\,d\theta - \int_0^{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\sin.\theta}{\theta}\,d\theta = \int_{\frac{\mu}{\varepsilon}}^{\frac{\nu}{\varepsilon}} \frac{\sin.\theta}{\theta}\,d\theta.$$

Wenn nun μ und ν poſitive Zahlen ſind, und ε eine ſehr kleine Zahl iſt, ſo iſt jedes der beiden Integrale im erſten Theile der letzten Gleichung faſt $= \frac{1}{2}\pi$; folglich ihre Differenz oder das gegebene Integral (ω) faſt Null, und an der Grenze $i = \infty$ verſchwindet es in aller Strenge.

Aus demſelben Grunde würde (ω), wenn $\mu = 0$ wäre und ν irgend einen poſitiven Werth behielte, den Werth $\frac{1}{2}\pi$ annehmen, und wenn endlich μ eine negative, und ν eine poſitive Zahl bezeichnete; ſo würde das Integral (ω) gegen die Grenze π convergiren.

Da vorausgeſetzt wird, daß die Function f zwiſchen den Integrationsgrenzen endlich bleibt, ſo convergirt folglich das Integral:

$$\int_\mu^\nu f\omega \cdot \frac{\sin.i\omega}{\sin.\omega}\,d\omega = \int_{\frac{\mu}{\varepsilon}}^{\frac{\nu}{\varepsilon}} f(\varepsilon\theta) \cdot \frac{\sin.\theta}{\theta}\,d\theta \qquad (\Omega)$$

für immer größer werdende poſitive Werthe von i, welche immer kleiner werdenden Werthen von ε entſprechen, gegen die Grenze Null, wenn die Zahlen μ, ν daſſelbe Zeichen haben und von Null verſchieden ſind. Dieſes Integral wird $= \frac{1}{2}\pi f(0)$, wenn die Zahl $\mu = 0$ iſt und es nimmt endlich den Werth $\pi f(0)$ an, wenn die Zahlen μ, ν entgegengeſetzte Zeichen haben.

Wenn in dieſer letzten Vorausſetzung die Function $f\omega$ gegen verſchiedene Grenzen $f_1(0)$, $f_2(0)$ convergirte, je nachdem ω gegen Null convergirt, indem es negative oder poſitive Werthe durchläuft, oder mit andern Worten, wenn die Function $f\omega$ plötzlich von dem Werthe $f_1(0)$ zu dem Werthe $f_2(0)$ überginge; ſo würde die Grenze $\pi f(\omega)$ durch $\frac{1}{2}\pi[f_1(0) + f_2(0)]$ erſetzt.

Nachdem wir auf dieſe Weiſe für alle Fälle den Grenzwerth des Integrales (ω) beſtimmt haben, wollen wir zu dem Lehrſatze übergehen, zu deſſen Beweisführung wir dieſe Grenze geſucht haben, indem wir bei dieſem letzten Theile des Beweiſes einen von Dirichlet angedeuteten Weg einſchlagen. *)

*) Vergl. Crelle's Journal für reine und angew. Math. Bd. 4. S. 166.

§. 426. Die Function:

$$S_i = \frac{2}{\pi}\left[\sin. x \int_0^\pi f\xi \sin. \xi d\xi + \sin. 2x \int_0^\pi f\xi \sin. 2\xi d\xi + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \sin. ix \int_0^\pi f\xi \sin. i\xi d\xi\right],$$

oder die Summe der i ersten Glieder der Reihe (a) kann auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f\xi d\xi [2 \sin. x \sin. \xi + 2 \sin. 2x \sin. 2\xi + \ldots + 2 \sin. ix \sin. i\xi]$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f\xi d\xi \left[\begin{array}{l} 1 + \cos.(x-\xi) + \cos. 2(x-\xi) + .. + \cos. i(x-\xi) \\ -[1 + \cos.(x+\xi) + \cos. 2(x+\xi) + .. + \cos. i(x+\xi)]\end{array}\right]$$

und nach den Formeln im §. 423 hat man:

$$1 + \cos.(x \pm \xi) + \cos. 2(x \pm \xi) + \ldots + \cos. i(x \pm \xi)$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\cos. i(x \pm \xi) - \cos.(i+1)(x \pm \xi)}{1 - \cos.(x \pm \xi)}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1 + \sin.(i + \frac{1}{2})(x \pm \xi)}{\sin. \frac{1}{2}(x \pm \xi)}\right],$$

so daß sich die Summe S_i in:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f\xi \cdot \frac{\sin.(i+\frac{1}{2})(x-\xi)}{\sin. \frac{1}{2}(x-\xi)} d\xi - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f\xi \cdot \frac{\sin.(i+\frac{1}{2})(x+\xi)}{\sin. \frac{1}{2}(x+\xi)} d\xi$$

verwandelt. Wenn wir in dem ersten Integrale $x - \xi = 2\omega$ und in dem zweiten $x + \xi = 2\omega$ setzen; so folgt:

$$S_i = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{x-\pi}{2}}^{\frac{x}{2}} f(x-2\omega) \cdot \frac{\sin.(2i+1)\omega}{\sin. \omega} d\omega$$
$$- \frac{1}{\pi}\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x+\pi}{2}} f(2\omega - x) \cdot \frac{\sin.(2i+1)\omega}{\sin. \omega} d\omega.$$

Wir wollen annehmen, daß x zwischen 0 und π fällt, so daß die beiden Grenzen des zweiten Integrales positiv sind, und daß die untere Grenze des ersten negativ ist; so wird das zweite Integral nach dem im vorhergehenden Gesagten für $i = \infty$ Null. Wenn man ferner in der Function $f(x - 2\omega)$, $\omega = 0$ setzt; so reducirt sie sich auf fx, und folglich ist die Grenze, gegen welche das erste Integral convergirt, $= \frac{1}{2} \cdot \pi fx$. Der zweite Theil der Gleichung (a) ist also unter der Bedingung, daß die Veränderliche x zwischen Null und π bleibt, und daß die Function fx innerhalb dieser Grenzen nicht unendlich wird, eine convergirende Reihe, welche Fx zur Summe hat.

Wenn die Function f für den Werth a plötzlich von einem endlichen Werthe zu einem andern überginge, so wäre der Werth der Reihe (a) die halbe Summe der beiden Werthe, welche alsdann die Function f annimmt (§. 38).

Wir müssen nun noch die Werthe von S_i für die Grenzwerthe 0 und π von x angeben. Nun ist aber für $x = 0$:

$$S_i = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(-2\omega)\cdot\frac{\sin.(2i+1)\omega}{\sin.\omega}d\omega - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(2\omega)\cdot\frac{\sin.(2i+1)\omega}{\sin.\omega}d\omega$$

und für $x = \pi$ ist:

$$S_i = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-2\omega)\cdot\frac{\sin.(2i+1)\omega}{\sin.\omega}d\omega - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(2\omega-\pi)\cdot\frac{\sin.(2i+1)\omega}{\sin.\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-2\omega)\cdot\frac{\sin.(2i+1)\omega}{\sin.\omega}d\omega + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi-2\omega)\cdot\frac{\sin.(2i+1)\omega}{\sin.\omega}d\omega,$$

welche Größen für jeden Werth von i verschwinden.

§. 427. Der zweite Theil der Gleichung (a) ist eine periodische Function von x, während fx durchaus keine periodische Function zu sein braucht. Wenn also die Function fx für $x = 0$ und $x = \pi$ nicht verschwindet; so besteht die Curve, deren Ordinate durch:

$$y = \frac{2}{\pi}\Sigma\cdot\sin.ix\int_{0}^{\pi}\sin.i\xi\cdot f\xi d\xi \qquad (5)$$

ausgedrückt wird, aus getrennten Bogen, welche abwechselnd auf der einen und auf der andern Seite der Axe der x liegen (Fig. 94). Für die Abscissen der Trennungspunkte gibt die Gleichung (5) weder die eine, noch die andere der beiden gleichen Ordinaten OM, OM_1 von entgegengesetzten Zeichen, sondern die halbe Summe dieser Ordinaten, d. h. den Werth Null.

§. 428. Beispiele. 1) Es sei $fx = \frac{1}{2}x$; so ist:

$$\frac{1}{2}x = \sin.x - \frac{1}{2}\sin.2x + \frac{1}{3}\sin.3x - \frac{1}{4}\sin.4x + \text{ꝛc.}, \qquad (6)$$

eine bereits im §. 113 gefundene Formel. Da die Function $\frac{1}{2}x$ sowohl als sin. ix eine impaare ist; so findet die Gleichung (6) nicht blos für die zwischen 0 und π, sondern auch für die zwischen $-\pi$ und 0 liegende Werthe von x statt.

2) Es sei $fx = \cos.x$, so ist:

$$\cos.x = \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)\sin.2x + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\sin.4x + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\sin.6x + \text{ꝛc.}\right].$$

3) Endlich wollen wir annehmen, daß $fx = x$ sei, zwischen den Grenzen $0, \frac{1}{2}\pi$ und $= \pi - x$ zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}\pi, \pi$, so daß diese Function die Ordinate eines gleichschenkligen Dreieckes ausdrückt, dessen Grundlinie $= \pi$ und dessen Höhe $= \frac{1}{2}\pi$ ist; so hat man:

$$\int_{0}^{\pi}\sin.i\xi\cdot f\xi d\xi = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin.i\xi\cdot\xi d\xi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin.i\xi\cdot(\pi-\xi)d\xi,$$

und die Formel (5) gibt:

$$y = \frac{4}{\pi}\left(\sin.x - \frac{1}{3^2}\sin.3x + \frac{1}{5^2}\sin.5x - \frac{1}{7^2}\sin.7x + \text{ꝛc.}\right).$$

§. 429. Wenn man a priori wüßte, daß eine Function fx zwischen den Grenzen $0, \pi$ durch eine convergirende Reihe von der Form $\Sigma A_i \sin.ix$ an

gedrückt werden kann; ſo laſſen ſich die Coefficienten A_i durch eine ſehr einfache Rechnung beſtimmen. Denn aus der hypothetiſchen Gleichung:

$$fx = A_1 \sin. x + A_2 \sin. 2x + \ldots + A_i \sin. ix + \text{ꝛc.}$$

ergibt ſich:

$$\sin. i\xi \cdot f\xi d\xi = A_1 \sin. i\xi \sin. \xi d\xi + A_2 \sin. i\xi \sin. 2\xi d\xi + \ldots$$
$$\ldots + A_i \sin.^2 i\xi d\xi + \text{ꝛc.}, \qquad (7)$$

und da dieſe Gleichung nach der Vorausſetzung für jeden zwiſchen $0, \pi$ liegenden Werth von ξ ſtattfindet, ſo erhält man, wenn man zwiſchen dieſen Grenzen integrirt:

$$\int_0^\pi \sin. i\xi \cdot f\xi d\xi = A_1 \int_0^\pi \sin. i\xi \sin. \xi d\xi + A_2 \int_0^\pi \sin. i\xi \sin. 2\xi d\xi + \ldots$$
$$\ldots + A_i \int_0^\pi \sin.^2 i\xi d\xi + \text{ꝛc.}$$

Andererſeits iſt:

$$\int \sin. i\xi \sin. i'\xi d\xi = \tfrac{1}{2} \int \cos.(i - i')\xi d\xi - \tfrac{1}{2} \int \cos.(i + i')\xi d\xi$$
$$= \frac{\sin.(i - i')\xi}{2(i - i')} - \frac{\sin.(i + i')\xi}{2(i + i')} + \text{const.},$$

welcher Ausdruck die Wahl der Grenzen $0, \pi$ unzuläſſig macht, ſo lange die ganzen Zahlen i, i' von einander verſchieden ſind. Für $i = i'$ erhält man (§. 402):

$$\int_0^\pi \sin.^2 i\xi d\xi = \frac{1}{2}\pi,$$

und folglich reducirt ſich der zweite Theil der Gleichung (7) auf das Glied A_i, woraus ſich alsdann ergibt:

$$A_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin. i\xi \cdot f\xi d\xi,$$

wie wir bereits durch eine complicirtere Rechnung gefunden haben. Allein, nach der richtigen Bemerkung Poiſſon's beruht die zuletzt angegebene Methode auf einer Vorausſetzung, welche des Beweiſes bedarf, und in der Annahme beſteht, daß jede beliebige Function in eine convergirende Reihe entwickelt werden kann, deren Glieder nach den Sinuſſen der ganzen Vielfachen der Veränderlichen fortſchreiten.

§. 430. Durch eine Vertauſchung der Veränderlichen können wir nun die Formel (a) ſo abändern, daß die transformirte Formel für die zwiſchen beliebigen andern Grenzen, als 0 und π liegende Werthe der Veränderlichen ſtattfindet. Setzen wir z. B. $\frac{\pi x'}{a}$ für x und $\frac{\pi \xi'}{a}$ für ξ; ſo erhalten wir:

$$f\left(\frac{\pi x'}{a}\right) = \frac{2}{a} \Sigma \cdot \sin. \frac{i\pi x'}{a} \int_0^a \sin. \frac{i\pi \xi'}{a} \cdot f\left(\frac{\pi \xi'}{a}\right) d\xi'.$$

Aber da nichts hindert, die Accente der Veränderlichen x', ξ' hinwegzulaſſen, und da das Zeichen f eine ganz willkürliche Function andeutet, ſo darf man fx ſtatt $f\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ ſetzen, und man hat folglich:

$$fx = \frac{2}{a} \Sigma \cdot \sin. \frac{i\pi x}{a} \int_0^a \sin. \frac{i\pi \xi}{a} \cdot f\xi d\xi, \qquad (b)$$

welche letzte Formel für alle zwiſchen 0 und a liegende Werthe ſtattfindet.

Wenn wir darin 2l für a, $x' + l$ für x und $\xi' + l$ für ξ ſetzen, ſo verwandelt ſie ſich in:

$$f(x' + l) = \frac{1}{l} \Sigma \cdot \sin. \frac{i\pi(x' + l)}{2l} \int_{-l}^{l} \sin. \frac{i\pi(\xi' + l)}{2l} \cdot f(\xi' + l) d\xi',$$

oder nach dem eben Geſagten in die einfachere Formel:

$$fx = \frac{1}{l} \Sigma \cdot \sin. \frac{i\pi(x+l)}{2l} \int_{-l}^{l} \sin. \frac{i\pi(\xi + l)}{2l} \cdot f\xi d\xi, \qquad (c)$$

welche für alle zwiſchen den Grenzen $-l, +l$ liegenden Werthe von x ſtattfindet.

Die Gleichung (b) kann man auf folgende Form bringen:

$$fx = \frac{2}{\pi} \Sigma \cdot \frac{\pi}{a} \sin. \frac{i\pi x}{a} \int_0^a \sin. \frac{i\pi \xi}{a} \cdot f\xi d\xi.$$

Nehmen wir nun an, daß a unendlich groß wird und ſetzen:

$$\frac{i\pi}{a} = \alpha, \quad \frac{\pi}{a} = d\alpha,$$

ſo iſt die Grenze, gegen welche die Reihe für immer größer werdende Werthe von a convergirt:

$$fx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \sin. \alpha x \sin. \alpha \xi \cdot f\xi d\xi d\alpha, \qquad (d)$$

ſo daß der Werth von fx innerhalb der Grenzen $0, \infty$ durch ein doppeltes beſtimmtes Integral ausgedrückt wird.

Dieſer Ausdruck würde jedoch in dem Falle illuſoriſch, wo das doppelte Integral, deſſen obere Grenzen unendlich ſind, vermöge der Natur der Function f keinen endlichen und beſtimmten Werth behielte (§. 324).

Wir wollen $fx = \frac{1}{x}$ ſetzen, ſo wird die Function f an der Grenze $x = 0$ unendlich; aber dennoch ergibt ſich aus der Formel (d):

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \sin. \alpha x \frac{\sin. \alpha \xi}{\xi} d\xi d\alpha = \int_0^\infty \sin. \alpha x d\alpha,$$

was mit dem im §. 325 erhaltenen Reſultate übereinſtimmt.

§. 431. Verfährt man auf dieſelbe Weiſe, wie in den vorhergehenden §§, ſo kann man darthun, daß jede Function, wofern ſie nur nicht zwiſchen den Grenzen $0, \pi$ der Veränderlichen x unendlich wird, innerhalb dieſer Grenzen in eine convergirende Reihe entwickelt werden kann, welche nach den Coſinuſſen der Vielfachen des Bogens x fortſchreitet, und man alſo folgende Formel hat:

$$fx = A_0 + A_1 \cos. x + A_2 \cos. 2x + \ldots + A_i \cos. ix + \text{ꝛc.},$$

deren Coefficienten durch die Gleichungen:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f\xi d\xi, \quad A_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos. i\xi \cdot f\xi d\xi,$$

gegeben werden, ſo daß man ſetzen kann:

$$fx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f\xi d\xi + \frac{2}{\pi} \cdot \Sigma \cdot \cos. ix \int_0^{\pi} \cos. i\xi \cdot f\xi d\xi. \qquad (e)$$

Der Werth des zweiten Theiles dieſer Gleichung, welcher eine paare und periodiſche Function von x iſt, wird durch die Ordinate einer in Beziehung auf die Axe der y (Fig. 95) ſymmetriſchen Linie dargeſtellt, bei welcher den Abſciſſen $x = 0$, $x = \pi$ keine Unterbrechungspunkte entſprechen, ſo daß die Formel an dieſen Grenzen unverändert ſtattfindet.

Aus dieſer Formel ergibt ſich die folgende:

$$fx = \frac{1}{a}\int_0^{a} f\xi d\xi + \frac{2}{a}\Sigma \cdot \cos. \frac{i\pi x}{a} \int_0^{a} \cos. \frac{i\pi\xi}{a} \cdot f\xi d\xi, \qquad (f)$$

welche zwiſchen den Grenzen 0, a und an dieſen Grenzen ſelbſt ſtattfindet. Setzt man alsdann die obere Grenze $a = \infty$, ſo erhält man:

$$fx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha \int_0^{\infty} \cos. \alpha x \cos. \alpha\xi \cdot f\xi d\xi. \qquad (g)$$

Verfolgt man dieſelbe Analogie, ſo findet man auch die Formel:

$$fx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f\xi d\xi + \frac{1}{l}\Sigma \cdot \cos. \frac{i\pi(x+l)}{2l} \int_{-l}^{l} \cos. \frac{i\pi(\xi+l)}{2l} \cdot f\xi d\xi, \qquad (h)$$

welche zwiſchen den Grenzen $-l, +l$ und an dieſen Grenzen ſelbſt ſtattfindet.

§. 432. Um von dieſen letzten Formeln einige Anwendungen mitzutheilen, wollen wir ſucceſſive:

$$fx = \tfrac{1}{2}x, \quad fx = \sin. x, \quad fx = \tfrac{1}{4}\pi$$

ſetzen, ſo haben wir vermöge der Gleichung (e) zwiſchen den Grenzen $0, \pi$:

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi}\left[\cos. x + \frac{1}{3^2}\cos. 3x + \frac{1}{5^2}\cos. 5x + \text{ꝛc.}\right]$$

$$\sin. x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos. 2x}{1.3} + \frac{\cos. 4x}{3.5} + \frac{\cos. 6x}{5.7} + \text{ꝛc.}\right]$$

$$\tfrac{1}{4}\pi = \cos. x - \tfrac{1}{3}\cos. 3x + \tfrac{1}{5}\cos. 5x - \tfrac{1}{7}\cos. 7x + \text{ꝛc.}$$

In jeder dieſer letzten Formeln braucht man nur $x = 0$ oder $x = \pi$ zu ſetzen, um ebenſo viele merkwürdige Ausdrücke der transcendenten Zahl π zu erhalten, welche ſich ins Unendliche abändern laſſen.

Wenn wir die beiden Theile der letzten Gleichung mit dx multipliciren, zwiſchen den Grenzen 0, x integriren und durch $\frac{1}{2}\pi$ dividiren, ſo kommt:

$$\frac{1}{2}x = \frac{2}{\pi}\left[\sin. x - \frac{1}{3^2}\sin. 3x + \frac{1}{5^2}\sin. 5x - \frac{1}{7^2}\sin. 7x + \text{ꝛc.}\right]. \qquad (11)$$

Da die Reihe (g) convergent iſt, ſo iſt es die Reihe (11) um ſo mehr, und die Vergleichung dieſer beiden Formeln zeigt, daß dieſelbe Function mehrere convergente Reihenentwickelungen, welche nach den Sinuſſen der vielfachen Bogen fortſchreiten, haben kann, wodurch ſich die Reihen, von welchen in dem gegenwärtigen Kapitel die Rede iſt, von den Reihenentwickelungen nach den Potenzen der Veränderlichen, welche nach der Maclaurin'ſchen Formel nur auf eine einzige Weiſe möglich ſind, weſentlich unterſcheiden. Aus dieſer Bemerkung folgt auch, daß das Verfahren im §. 429 nicht alle möglichen Reihenentwickelungen der Function nach den Sinuſſen und Coſinuſſen der vielfachen Bogen gibt.

§. 433. Wenn man die correſpondirenden Theile der Gleichungen (a) und (e) zuſammenaddirt und von der Summe die Hälfte nimmt, ſo erhält man:

$$fx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f\xi d\xi +$$

$$\frac{1}{\pi}\Sigma[\sin. ix \int_0^{\pi} \sin. i\xi \cdot f\xi d\xi + \cos. ix \int_0^{\pi} \cos. i\xi \cdot f\xi d\xi]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f\xi d\xi + \frac{1}{\pi}\Sigma \cdot \int_0^{\pi} \cos. i(x-\xi) \cdot f\xi d\xi. \qquad (i)$$

Der geometriſche Ort der Gleichung:

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f\xi d\xi + \frac{1}{\pi}\Sigma \cdot \int_0^{\pi} \cos. i(x-\xi) \cdot f\xi d\xi$$

beſteht: 1) aus einem Syſteme einzelner Bogen $M_{,}N_{,}$, MN, $M''N''$, ... (Fig. 96) und 2) aus Theilen der Abſciſſenaxe, welche zwiſchen den Ordinaten der Unterbrechungspunkte dieſer Bogen liegen. Hieraus folgt, daß die Formel (i) nur an den Grenzen 0 und π ſtattfindet, wenn $0 = f(0) = f(\pi)$ iſt. Im entgegengeſetzten Falle gibt die Reihe $\frac{1}{2}f(0)$ für $x = 0$ und $\frac{1}{2}f(\pi)$ für $x = \pi$. Wenn man die Formeln (b) und (f), (d) und (g), (c) und (h) auf dieſelbe Weiſe verbindet, ſo findet man:

$$fx = \frac{1}{2a}\int_0^{a} f\xi d\xi + \frac{1}{a}\Sigma \cdot \int_0^{a} \cos. \frac{i\pi(x-\xi)}{a} \cdot f\xi d\xi, \qquad (k)$$

$$fx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \cos. \alpha(x-\xi) \cdot f\xi d\xi d\alpha,$$

$$fx = \frac{1}{4l}\int_{-l}^{l} f\xi d\xi + \frac{1}{2l}\Sigma \cdot \int_{-l}^{l} \cos. \frac{i\pi(x-\xi)}{2l} \cdot f\xi d\xi. \qquad (l)$$

§. 434. Alle dieſe Formeln ſind noch vieler Transformationen fähig; allein wir wollen nur noch eine derſelben angeben.

Es ſei fx eine Function, welche von 0 bis a den Werth φx und von 0 bis $-a$ den Werth ψx hat, ſo reducirt ſich die Function:

$$\frac{1}{2a}\int_0^{a} \varphi\xi d\xi + \frac{1}{a}\Sigma \cdot \int_0^{a} \cos. \frac{i\pi(x-\xi)}{a} \cdot \varphi\xi d\xi$$

nach der Formel (k) für die zwiſchen 0 und a liegende Werthe von x auf φx und für die zwiſchen 0 und $-a$ liegende Werthe von x auf Null. Eben ſo reducirt ſich die Function:

$$-\frac{1}{2a}\int_0^{-a} \psi\xi d\xi - \frac{1}{a}\Sigma \cdot \int_0^{-a} \cos. \frac{i\pi(x-\xi)}{a} \cdot \psi\xi d\xi$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{0} \psi\xi d\xi + \frac{1}{a}\Sigma \cdot \int_{-a}^{0} \cos. \frac{i\pi(x-\xi)}{a} \cdot \psi\xi d\xi$$

für die zwiſchen 0 und $-a$ liegenden Werthe von x auf ψx und für die zwiſchen 0 und a liegenden Werthe von x auf Null. Folglich reducirt ſich die Function:

$$\frac{1}{2a}\left[\int_0^{a} \varphi\xi d\xi + \int_{-a}^{0} \psi\xi d\xi\right]$$

$$+\frac{1}{a}\Sigma\left[\int_0^{a} \cos. \frac{i\pi(x-\xi)}{a} \cdot \varphi\xi d\xi + \int_{-a}^{0} \cos. \frac{i\pi(x-\xi)}{a} \cdot \psi\xi d\xi\right]$$

x die zwiſchen $-a$ und 0 liegenden Werthe von x auf ψx, und für die viſchen 0 und a liegenden Werthe von x auf φx, d. h. die Formel:

$$fx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f\xi d\xi + \frac{1}{a}\Sigma \cdot \int_{-a}^{a} \cos.\frac{i\pi(x-\xi)}{a} \cdot f\xi d\xi \qquad (m)$$

ndet für alle zwiſchen $-a$ und $+a$ liegenden Werthe von x ſtatt. Man nnte a in l verwandeln und man erhielte eine von der Gleichung (l) verhiedene, obgleich beide für die zwiſchen denſelben Grenzen liegenden Werthe n x ſtattfinden.

§. 435. Durch ein ähnliches Verfahren, wie das im §. 430 ergibt ſich us der Gleichung (m), wenn man darin $a = \infty$ ſetzt:

$$fx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos.\alpha(x-\xi) \cdot f\xi d\xi d\alpha, \qquad (n)$$

nd dieſe letzte Formel findet für alle reellen Werthe von x ſtatt, weil das ntegral in Beziehung auf ξ zwiſchen $-\infty$ und $+\infty$ genommen wird, und an nennt ſie die Fourier'ſche Formel, weil der berühmte Geometer Fourier ie Analyſis durch dieſe Formel bereichert hat. Der Beweis dieſer Formel rgibt ſich aus dem Vorhergehenden; aber wegen ihrer Wichtigkeit wollen wir och einen andern einfachern und directern Beweis mittheilen, welcher von Defl ers herrührt.

Es ſei:

$$y = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos.\alpha(x-\xi) \cdot f\xi d\xi d\alpha,$$

nd wir wollen zuvörderſt das Integral in Beziehung auf α zwiſchen den Grenzen $0, \alpha$ nehmen, ſo kommt, unter dem Vorbehalte, daß nach der zweiten Integration $\alpha = \infty$ geſetzt wird:

$$y = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin.\alpha(x-\xi)}{x-\xi} \cdot f\xi d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin.z}{z} \cdot f\left(x - \frac{z}{\alpha}\right) dz,$$

enn $\xi = x - \frac{z}{\alpha}$ geſetzt wird.

Setzt man nun $\alpha = \infty$, ſo hat man:

$$f\left(x - \frac{z}{\alpha}\right) = fx,$$

ausgenommen für die Werthe von z, welche ſelbſt unendlich ſind, und welche nberückſichtigt bleiben können, weil der Factor $\frac{\sin.z}{z}$ den correſpondirenden Theil des Integrales unendlich klein macht. Man hat alſo einfach:

$$y = \frac{1}{\pi} fx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin.z}{z} dz = fx.$$

Wenn die Function f ſo beſchaffen iſt, daß ſich die in der Formel (n) angezeigte Integration in Beziehung auf die Veränderliche ξ verrichten läßt, ſo beſtimmt dieſe Formel die Werthe der einfachen beſtimmten Integrale, wie die Formeln in den beiden letzten Kapiteln. Geſetzt z. B., fx müßte ſich zwiſchen den Grenzen $0, \infty$ auf e^{-x} reduciren, ſo hat man nach §. 407:

$$\int_0^\infty \cos.\,\alpha\xi \cdot e^{-\xi} d\xi = \frac{1}{1+\alpha^2},$$

und folglich gibt die Formel (n) für alle poſitiven Werthe von x:

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos.\,\alpha x\, d\alpha}{1+\alpha^2},$$

was mit der Formel (m) im §. 411 übereinſtimmt.

§. 436. Alle in dieſem Kapitel abgeleiteten Formeln laſſen ſich ver meinern und auf Functionen von einer beliebigen Anzahl veränderlicher G ausdehnen. Setzt man z. B. $f(x,y)$ ſtatt fx, ſo ergibt ſich aus der Fou ſchen Formel:

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \cos.\,\alpha(x-\xi) \cdot f(\xi,y)\, d\xi\, d\alpha$$

und aus demſelben Grunde iſt:

$$f(\xi,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \cos.\,\beta(y-\eta) \cdot f(\xi,\eta)\, d\eta\, d\beta,$$

wo β, η zwei neue Hülfsveränderliche bezeichnen. Man hat alſo die For

$$f(x,y) =$$

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \cos.\,\alpha(x-\xi) \cdot \cos.\,\beta(y-\eta) \cdot f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta\, d$$

welche für alle reellen Werthe der Veränderlichen x,y ſtattfindet. Wenn Integrationsgrenzen in Beziehung auf die Veränderlichen ξ, η durch den riß einer in der Ebene der xy beſchriebenen Curve gegeben ſind, ſo red ſich das vierfache Integral für die innerhalb des von dieſer Curve eingeſ ſenen Raumes liegenden Punkte auf $f(x,y)$ und für alle außerhalb d Raumes liegende Punkte auf Null. Eben ſo reducirt ſich das ſechsfache tegral:

$$\frac{1}{\pi^3}\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \iiint \cos.\,\alpha(x-\xi) \cdot \cos.\,\beta(y-\eta) \cdot \cos.\,\gamma(z-\zeta) \cdot f(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\alpha\, d$$

für welches die Grenzen der Integrationen in Beziehung auf die Verä lichen ξ, η, ζ dieſelben ſind, als die des Volumens eines gegebenen Kör für alle innerhalb dieſes Körpers liegende Punkte auf $f(x,y,z)$ und für außerhalb dieſes Körpers liegende Punkte auf Null.

Sechstes Buch.

Integration der Differenzialgleichungen mit einer einzigen unabhängigen veränderlichen Größe.

Erstes Kapitel.

Von der Integration der Differenzialgleichungen mit zwei Veränderlichen und von der ersten Ordnung.

§. 437. Man kann das Problem der Integration der Differenzialgleichungen zwischen zwei Veränderlichen aus zwei verschiedenen Gesichtspunkten betrachten. Aus dem ersten Gesichtspunkte betrachtet, kommt es darauf an, zwischen der unabhängigen Veränderlichen und der Function eine Gleichung zu finden, welche der gegebenen Differenzialgleichung vermittelst der Werthe, welche man daraus für die Differenzialcoefficienten der verschiedenen Ordnungen ableitet, auf die allgemeinste Weise Genüge leistet, oder mit andern Worten, es kommt darauf an, die allgemeinste Gleichung der Curven zu finden, welche in allen ihren Punkten die Eigenschaft haben, welche durch die gegebene Differenzialgleichung ausgedrückt wird.

Aus dem zweiten Gesichtspunkte betrachtet, besteht das Problem der Integration in der Bestimmung der Reihe von Zahlenwerthen, welche eine Function, von einem bestimmten Zahlenwerthe ausgehend, durchlaufen muß, wenn das Gesetz der unendlich kleinen Veränderungen der Function durch eine gegebene Differenzialgleichung ausgedrückt wird. Wir werden sehen, daß Fälle vorkommen, wo sich das Problem der Integration der Differenzialgleichungen nicht auf dieselbe Weise lösen läßt, wenn man es aus dem einen oder aus dem andern der eben erwähnten Gesichtspunkte betrachtet.

Im Vorhergehenden (Buch 3. Kap. 5) haben wir den Zusammenhang nachgewiesen, welcher zwischen einer Differenzialgleichung von beliebiger Ordnung und den Integralen oder ursprünglichen Gleichungen der verschiedenen Ordnungen, aus denen man sich die gegebene Differenzialgleichung durch unmittelbare Differenziation oder durch Differenziation, verbunden mit der Elimination der Constanten, abgeleitet, vorstellen kann, stattfindet, und indem wir uns auf die an dem angeführten Orte aufgestellten Sätze beziehen, machen wir mit der Untersuchung der Hauptfälle, worin man das Integral, woraus eine gegebene Differenzialgleichung abgeleitet ist, wiederfinden kann, den Anfang, worauf wir die Theorie der Differenzialgleichungen, aus dem zweiten Gesichtspunkte betrachtet, untersuchen wollen.

I. Trennung der Veränderlichen.

§. 438. Die allgemeine Form der Differenzialgleichung der e Ordnung mit zwei Veränderlichen iſt:

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (1$$

Wenn dieſe Gleichung algebraiſch und in Beziehung auf y' vom erſten (iſt, ſo kann man ſie auf folgende Form bringen:

$$\varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy = 0. \qquad (2$$

Die Gleichung (2) läßt ſich immer integriren, oder wenigſtens kann di tegration auf einfache Quadraturen zurückgeführt werden, wenn die Ver lichen getrennt ſind, d. h. wenn dieſe Gleichung auf die Form:

$$fxdx + fydy = 0$$

gebracht iſt. Das allgemeine Integral derſelben iſt alsdann:

$$\int fxdx + \int fydy = C,$$

wo C eine willkürliche Conſtante bezeichnet, oder wenn man zu den be ten Integralen übergeht, und den x_0 entſprechenden Werth von y mit y zeichnet:

$$\int_{x_0}^{x} fxdx + \int_{y_0}^{y} fydy = 0.$$

Es ſei z. B. die Differenzialgleichung:

$$ydx - xdy = 0$$

gegeben, ſo bringt man ſie auf die Form:

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0,$$

wo die Veränderlichen ſchon getrennt ſind, und wenn man integrirt, hält man:

$$\log. y - \log. x = C, \text{ folglich } y = cx,$$

wo c die Zahl bezeichnet, deren Logarithmus C iſt.

Die Trennung der Veränderlichen läßt ſich unmittelbar jedesmal b ſtelligen, wenn die Gleichung (1) unter der Form:

$$y' = fx \cdot fy, \quad \text{folglich:} \quad \frac{dy}{fy} = fxdx$$

erſcheint.

§. 439. In andern Fällen läßt ſich die Trennung der Verände nur durch eine Transformation oder durch eine Vertauſchung der Verände bewerkſtelligen. Wenn z. B. die in der Gleichung (2) vorkommenden tionen φ, ψ in Beziehung auf die Veränderlichen x, y, homogen ſind (§. ſo ſetze man $y = xt$, folglich:

$$\varphi(x,y) = x^n ft, \quad \psi(x,y) = x^n ft,$$

wo n die Summe der Exponenten von x und von y in jedem Gliede d gebenen Gleichung bezeichnet. Dieſe Gleichung (2) verwandelt ſich alſ der Hinweglaſſung des Factors x^n in:

$$ft \cdot dx + ft \cdot (xdt + tdx) = 0,$$

woraus ſich die Gleichung:

$$\frac{dx}{x} + \frac{f't \cdot dt}{ft + tf't} = 0$$

in welcher die Veränderlichen getrennt ſind.
f dieſe Weiſe verwandelt ſich z. B. die Gleichung:

$$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dx$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = 0,$$

folgt, wenn man durch Logarithmen integrirt, und dann wieder von
rithmen zu den Zahlen übergeht:

$$= \frac{x}{t + \sqrt{1+t^2}} = \frac{x^2}{y + \sqrt{x^2+y^2}} = -y + \sqrt{x^2+y^2},$$

$$x^2 - 2cy - c^2 = 0.$$

That erhält man die gegebene Differenzialgleichung wieder, wenn man
Gleichung differenzirt, und zwiſchen der urſprünglichen Gleichung und
mittelbaren Differenziale die Conſtante c eliminirt (§. 162).
gewiſſen Fällen kann man eine Gleichung, welche nicht homogen iſt,
ne Vertauſchung der Veränderlichen oder der Coordinaten homogen
und das einfachſte Beiſpiel einer ſolchen Transformation bietet uns
chung:

$$(ax + by + c)dx + (a'x + b'y + c')dy = 0$$

etzt man: $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$, d. h. verlegt man den Anfangs-
r Coordinaten x, y, ohne die Richtung der Axen zu verändern, und
ie willkürlichen Conſtanten α, β ſo an, daß die Bedingungsgleichungen:

$$a\alpha + b\beta + c = 0, \quad a'\alpha + b'\beta + c' = 0$$

erden, ſo verwandelt ſich die gegebene Gleichung in:

$$(a\xi + b\eta)d\xi + (a'\xi + b'\eta)d\eta = 0$$

homogen gemacht. Die vorhergehende Transformation würde nicht
glich ſein, wenn $ab' - ba' = 0$ wäre, weil alsdann die Werthe von
endlich würden, allein in dieſem Falle wird die gegebene Gleichung
: Elimination von b' auf folgende Form gebracht:

$$(ax + by)\left(dx + \frac{a'}{a}dy\right) + cdx + c'dy = 0,$$

n man $ax + by = t$ ſetzt, ſo erhält man eine Gleichung mit t, dt, dx,
ch die Veränderlichen leicht trennen laſſen, wie in allen den Gleichun-
von der einen Veränderlichen nur das Differenzial vorkommt.

II. Lineare Differenzialgleichungen der erſten Ordnung.

440. In der Gleichung:

$$y' + yfx = fx, \tag{3}$$

ine **lineare Differenzialgleichung der erſten Ordnung** ge-
ird, weil ſie weder Potenzen, noch Producte der Function y und ihrer
y' enthält, wird die Trennung der Veränderlichen durch eine ſehr
Transformation bewürkt. Es ſei:

$$y = \theta t, \quad dy = \theta dt + t d\theta,$$

wo θ und t zwei unbekannte Hülfsfunctionen von x bezeichnen, so verw sich die gegebene Gleichung in:

$$\theta dt + t d\theta + \theta t \cdot fx dx = f x dx.$$

Die unbeſtimmten Functionen t und θ kann man ſo annehmen, d vorhergehende Gleichung in die beiden folgenden zerfällt:

$$\theta dt = f x dx, \quad d\theta + \theta \cdot fx dx = 0,$$

wovon die zweite die Trennung der Veränderlichen geſtattet und gibt:

$$\theta = e^{-\int fx dx}.$$

Subſtituirt man dieſen Werth in die erſte, ſo erhält man:

$$dt = f x dx \cdot e^{\int fx dx}, \quad t = \int f x dx \cdot e^{\int fx dx} + C,$$

folglich:

$$y = [\int f x dx \cdot e^{\int fx dx} + C] \cdot e^{-\int fx dx}.$$

Beiſpiele: 1) Es ſei:

$$y' + y = -x,$$

ſo kommt:

$$\int fx dx = x, \quad \int f x dx \cdot e^x = -\int e^x x dx = (1 - x) e^x + C,$$

$$y = 1 - x + C e^{-x}$$

2) Es ſei:

$$y' + y = -x^3,$$

ſo hat man:

$$\int fx dx = x, \quad \int f x dx \cdot e^x = -e^x [x^3 - 3x^2 + 6(x - 1)] + C$$

$$y = -[x^3 - 3x^2 + 6(x - 1)] + C e^{-x}.$$

3) Es ſei:

$$y' + \frac{y}{x} = -x,$$

ſo verſchwinden in dieſem Falle die Exponentialgrößen, weil

$$\int fx dx = \int \frac{dx}{x} = \log. x, \quad e^{\int fx dx} = e^{\log. x} = x$$

iſt, woraus ſich leicht ergibt:

$$y = \frac{C}{x} - \frac{1}{3} x^2.$$

Ebenſo integrirt man die Gleichung:

$$y^{m-1} y' + y^m fx = fx,$$

denn man braucht nur $y^m = u$ zu ſetzen, um ſie auf die Form der G (3) zurückzuführen.

Wenn endlich die Differenzialgleichung:

$$y' + yfx = y^n fx$$

gegeben wäre, ſo könnte man ſie ebenfalls auf die Form (3) zurü wenn man $y^{n-1} = \frac{1}{u}$ ſetzte. Die Gleichung (5) iſt unter dem Nam Bernoulli'ſchen Gleichung bekannt.

§. 441. Wenn man eine Differenzialgleichung integrirt, indem man mit Trennung der Veränderlichen beginnt, so kann das Integral unter einer unzweckmäßigen und complicirten Form erscheinen und es kann z. B. eine transcendente Form haben, obgleich die gegebene Gleichung ein algebraisches Integral gestattet, wie wir dieses im §. 438 bei der sehr einfachen Gleichung $-xdy=0$ gesehen haben, deren Integration durch die Trennung der Veränderlichen auf das transcendente Zeichen log. führt, welches man alsdann den bekannten Eigenschaften der logarithmischen Functionen fortschaffen . Wir wollen z. B. die Differenzialgleichung:

$$\sqrt{1-y^2}\cdot dx+\sqrt{1-x^2}\cdot dy=0 \qquad (6)$$

chten, welche sich durch die Trennung der Veränderlichen in:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$$

andelt und alsdann auf das Integral:

$$\text{arc. sin. } x+\text{arc. sin. } y=k \qquad (7)$$

einer transcendenten Form führt, indem k die willkürliche Constante bezeichnet. Aber wenn man jedes Glied der Gleichung (6) theilweise integrirt durch μ eine andere willkürliche Constante bezeichnet, so erhält man:

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}+\int\frac{xydy}{\sqrt{1-y^2}}+\int\frac{xydx}{\sqrt{1-x^2}}=\mu.$$

beiden Glieder dieser Gleichung mit dem Integralzeichen $\int$ lassen sich in einziges:

$$\int xy\left[\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

nmenfassen, wofern man y als eine durch die Gleichung (6) bestimmte twickelte Function von x betrachtet. Nun ist aber vermöge derselben Gleig (6) der Factor, womit xy unter dem Zeichen $\int$ multiplicirt ist, bestän- $=0$, und folglich ist:

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\mu, \qquad (8)$$

wenn man die Wurzelgrößen wegschafft:

$$(x^2-y^2-\mu^2)^2=4\mu^2y^2(1-x^2),$$

algebraische Integral der gegebenen Differenzialgleichung.

Der Werth der Constante μ in der Gleichung (8) ist der Werth, welchen Veränderliche y für $x=0$ annimmt, und wenn man in der Gleichung (7) zleicher Zeit $x=0$, $y=\mu$ setzt, so verwandelt sie sich in:

$$\text{arc. sin. } \mu=k,$$

urch diese Gleichung auf die Form:

$$\text{arc. sin. } x+\text{arc. sin. } y=\text{arc. sin. } \mu \qquad (9)$$

racht wird. Die beiden Gleichungen (8) und (9), welche resp. unter alcaischer und transcendenter Form die vollständigen Integrale der gegebenen ferenzialgleichung sind, müssen identisch sein, und in der That ergibt sich Identität dieser beiden Gleichungen aus der Formel:

$$\text{sin. a cos. b}+\text{sin. b cos. a}=\text{sin. (a}+\text{b).}$$

Wenn diese Relation nicht aus der Elementartrigonometrie bekannt wäre, ergäbe sie sich aus der Vergleichung der Formeln (8) und (9), und man

konnte auf dieſe Weiſe eine Fundamentaleigenſchaft der transcendenten tion arc. sin. x oder des beſtimmten Integrales:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

darthun. Durch ein ganz ähnliches Verfahren haben wir im Kap. 4 des hergehenden Buches die Formeln für die Addition der elliptiſchen Funct aufgeſtellt.

III. Von dem integrirenden Factor.

§. 442. Wenn der erſte Theil der Gleichung (2) ein genaues D renzial $d \cdot \omega(x,y)$ iſt, ſo findet man die Function ω durch die im §. angegebene Rechnung, und das Integral erſcheint unter der Form $\omega(x,y)$ wo c eine willkürliche Conſtante bezeichnet. Umgekehrt, wenn man, nac das Integral der Gleichung (2) durch irgend ein Mittel erhalten iſt, da auf die Form $\omega(x,y) = c$ bringt und die erhaltene Gleichung in Bezie auf die durch die Integration eingeführte willkürliche Conſtante auflöſ't, ſ hält man durch Differenziation die Gleichung:

$$\frac{d\omega}{dx}dx + \frac{d\omega}{dy}dy = 0,$$

deren erſter Theil nothwendig ein genaues Differenzial iſt, und welche der Gleichung (2) zu gleicher Zeit ſtattfinden muß. Man hat alſo:

$$\frac{\frac{d\omega}{dx}}{\varphi(x,y)} = \frac{\frac{d\omega}{dy}}{\psi(x,y)} = \mu,$$

wo μ im Allgemeinen eine Function von x und y bezeichnet. Wenn folglich den erſten Theil der Gleichung (2) durch den Factor μ multipl ſo wird derſelbe mit dem Totaldifferenziale $d\omega$ identiſch und leiſtet der dingung der Integrabilität Genüge.

So leiſtet z. B. der erſte Theil der Gleichung (a) der Bedingung Integrabilität kein Genüge, aber da wir im §. 438 für das Integral d Gleichung $\frac{y}{x} = c$ gefunden haben, woraus folgt:

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0,$$

ſo ſieht man, daß der Factor $\frac{1}{x^2}$ den erſten Theil der gegebenen Gleichun einem genauen Differenziale macht. Desgleichen, da das Integral der Gleich

$$(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$$

nach §. 439 auf die Form:

$$-y + \sqrt{x^2 + y^2} = c$$

gebracht werden kann, woraus folgt:

$$\frac{xdx + (y - \sqrt{x^2 + y^2}dy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

ſo ergibt ſich, daß:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot(y+\sqrt{x^2+y^2})} = -\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x\sqrt{x^2+y^2}}$$

r Factor iſt, durch welchen man die gegebene Gleichung multipliciren muß, den erſten Theil derſelben zu einem genauen Differenziale zu machen.

§. 443. Es iſt zu bemerken, daß man, wenn man einen Werth des ctors μ kennt, daraus unendlich viele andere ableiten kann; denn da:

$$\mu[\varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dy] = d\omega$$

; ſo hat man:

$$\mu f(\omega)[\varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dy] = f(\omega)d\omega, \qquad (10)$$

) $f(\omega)$ eine beliebige Function der Größe ω, deren Bildung aus x,y be- nnt iſt, bezeichnet. Nun iſt aber der Ausdruck $f(\omega)d\omega$ nothwendig ein ge- mes Differenzial, und die Beſtimmung der Function, woraus daſſelbe ent- nden iſt, hängt von einer einfachen Quadratur ab. Folglich iſt der erſte heil der Gleichung (10) ebenfalls ein genaues Differenzial. Mit andern orten, der Factor $\mu f(\omega)$, worin die Functionen μ, ω bekannt ſind, und e Function f auf unendlich viele verſchiedene Arten particulariſirt werden nn, hat, wie der Factor μ, die Eigenſchaft, den erſten Theil der Gleichung) zu einem genauen Differenziale zu machen.

Nehmen wir z. B. die Gleichung (a), und ſetzen blos $f(\omega) = \omega$, ſo ben wir in dieſem Falle:

$$\mu = \frac{1}{x^2}, \quad \omega = \frac{y}{x}, \quad \text{folglich } \mu f(\omega) = \frac{y}{x^3}.$$

eſer letzte Factor macht folglich den erſten Theil der gegebenen Gleichung einem genauen Differenziale, und in der That hat man:

$$\frac{y}{x^3}(xdy - ydx) = \frac{x^2ydy - y^2xdx}{x^4} = \frac{1}{2}d\cdot\left(\frac{y^2}{x^2}\right).$$

§. 444. Um den Factor μ a priori zu beſtimmen, müßte man der eichung:

$$\frac{d\cdot\mu\varphi(x,y)}{dy} = \frac{d\cdot\mu\psi(x,y)}{dx},$$

er:

$$\varphi\frac{d\mu}{dy} - \psi\frac{d\mu}{dx} + \mu\left(\frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\psi}{dx}\right) = 0$$

enüge leiſten; allein die Integration dieſer Gleichung, welche in Beziehung uf die Function μ der beiden Veränderlichen x,y eine partielle Differenzial- leichung iſt, ſetzt, wie wir in der Folge ſehen werden, im Allgemeinen die ntegration der Gleichung (2) als bekannt voraus, und nur in ganz ſpeciellen ällen kann man den Factor μ angeben, und folglich die Integration der ge- ebenen Gleichung auf die Quadraturen zurückführen.

Wenn z. B. der Factor μ nur die Veränderliche x enthalten müßte, ſo educirte ſich die vorhergehende Gleichung auf:

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{\psi}\left(\frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\psi}{dx}\right),$$

nd der zweite Theil dieſer letzten Gleichung müßte ſich nach der Voraus- tzung auf eine Function fx der einen Veränderlichen x reduciren. Man hätte

also $\mu = e^{\int f x dx}$. Ueberdies würde die Allgemeinheit der Voraussetzung beeinträchtigt, wenn man $\psi = 1$ setzte, weil man immer annehmen kann die Gleichung (2) durch den Coefficienten von dy dividirt ist, und al muß der Coefficient $\frac{d\varphi}{dy}$ unabhängig sein von y, oder es muß

$$\varphi(x,y) = y f x + fx$$

sein, d. h. in diesem Falle erscheint die gegebene Gleichung unter der einer linearen Differenzialgleichung der ersten Ordnung.

§. 445. Wenn die Gleichung (2) homogen ist, so kann sie auf fo Form gebracht werden:

$$x^n f\left(\frac{y}{x}\right) dx + x^n f\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0,$$

und sie verwandelt sich alsdann nach §. 439 in die Gleichung:

$$\frac{dx}{x} + \frac{f\left(\frac{y}{x}\right) d \cdot \frac{y}{x}}{f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)} = 0,$$

worin die Veränderlichen getrennt sind, und welche folglich ein genaues ferenzial ist. Der Factor, durch welchen die Gleichung (11) hat mult werden müssen, um die Gleichung (12) zu erhalten, ist:

$$\mu = \frac{1}{x^{n+1}\left[f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)\right]} = \frac{1}{x\varphi(x,y) + y\psi(x,y)}.$$

Wird die Bedingung der Integrabilität auf die Function:

$$\frac{\varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy}{x\varphi(x,y) + y\psi(x,y)},$$

welche ein genaues Differenzial sein muß, wenn die Functionen φ, ψ ho und von demselben Grade sind, angewandt, so ergibt sich:

$$\frac{x\frac{d \cdot \varphi(x,y)}{dx} + y\frac{d \cdot \varphi(x,y)}{dy}}{\varphi(x,y)} = \frac{x\frac{d \cdot \psi(x,y)}{dx} + y\frac{d \cdot \psi(x,y)}{dy}}{\psi(x,y)}.$$

Folglich hat jeder Theil dieser letzten Gleichung einen von der Form Functionen φ, ψ unabhängigen Werth, und wenn man $\psi(x,y) = x^n$ se erhält man nach dem Lehrsatze über die homogenen Functionen (§. 122)

$$x\frac{d \cdot \varphi(x,y)}{dx} + y\frac{d \cdot \varphi(x,y)}{dy} = n\varphi(x,y).$$

IV. Ueber die lineare Differenzialgleichungen von einer höhern als von der e Ordnung.

§. 446. Wenn die Gleichung (1) die Ableitung y' zum Quadrate zu höhern Potenzen erhoben erhält, so ergeben sich daraus durch algebr Auflösung eben so viele andere Gleichungen:

$$y' - f_1(x,y) = 0, \quad y' - f_2(x,y) = 0, \text{ ꝛc.}$$

ls der Grad der gegebenen Gleichung in Beziehung auf y' Einheiten hat. Diese Gleichungen integrirt man einzeln, wenn es möglich ist, so leistet jedes rch eine willkürliche Constante ergänzte Integral der gegebenen Genüge, und folglich leistet das Product aller dieser Integrale der gegebenen ifferenzialgleichung auf die allgemeinste Weise Genüge, oder mit andern Worten, dieses Product ist das allgemeine Integral derselben. Man könnte e willkürlichen Constanten, welche in den einzelnen Factoren vorkommen, durch rschiedene Buchstaben bezeichnen; allein die Allgemeinheit des Integrales wird cht beeinträchtigt, wenn man alle diese willkürlichen Constanten durch denben Buchstaben bezeichnet, weil man offenbar, wenn man diesem einen Buchben alle möglichen Zahlenwerthe beilegt, alle particulären Integrale erhält, lche jeder Factor des allgemeinen Integrales zu liefern im Stande ist.

So gibt z. B. die Auflösung der Gleichung:

$$y'^2 - ax = 0$$

Gleichungen:

$$y' - \sqrt{ax} = 0, \quad y' + \sqrt{ax} = 0,$$

en Integrale:

$$c + y - \tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3} = 0, \quad c_1 + y + \tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3} = 0$$

d, und wenn man das Product derselben bildet, so erhält man zum allgeinen Integrale der gegebenen Differenzialgleichung:

$$(c + y - \tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3})(c_1 + y + \tfrac{2}{3}\sqrt{ax^3}) = 0,$$

ssen Allgemeinheit nicht vermindert wird, wenn man $c_1 = c$ setzt, wodurch die rationale Form:

$$(c + y)^2 - \tfrac{4}{9}ax^3 = 0$$

nimmt.

Aus der Theorie der Zusammensetzung der algebraischen Gleichung ist leuchtend, daß das allgemeine Integral in allen Fällen in Beziehung auf y rational sein wird, wenn man die in den einzelnen irrationalen Factoren rkommenden willkürlichen Constanten identificirt, und wenn die gegebene ifferenzialgleichung selbst in Beziehung auf x, y, y' rational ist.

§. 447. In gewissen Fällen kann man die Auflösung der gegebenen ifferenzialgleichung in Beziehung auf y' auch umgehen. Wenn z. B. die eränderliche y nicht darin vorkommt und sie sich auf die Form $x = fy'$ brin- n läßt, so erhält man, wenn man die Regel der theilweisen Integration auf e Function $dy = y'dx$ anwendet:

$$y = y'x - \int x dy' + C = y'fy' - \int fy' dy' + C.$$

Wenn sich die im letzten Theile dieser Gleichung angedeutete Quadratur gebraisch verrichten läßt, so hat man blos noch y' zwischen dieser Gleichung d der gegebenen zu eliminiren, um das durch die willkürliche Constante C rvollständigte Integral zu erhalten. Auf eine ähnliche Weise würde man die leichung $y = fy'$ behandeln, nachdem man $y' = \frac{1}{x'}$ gesetzt, d. h. nachdem man zur unabhängigen Veränderlichen genommen hat.

§. 448. Wenn die gegebene Differenzialgleichung von der Form $y = f(x, y')$, so ergibt sich daraus:

$$y' = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx}.$$

Dieſe letzte Gleichung iſt in Beziehung auf die Veränderlichen x, y' von der erſten Ordnung, und wenn man annimmt, daß ſie in die Categorie der Differenzialgleichungen gehört, welche man integriren kann, ſo braucht man nur y' zwiſchen dem erhaltenen Integrale und der gegebenen Gleichung zu eliminiren, um das Integral der gegebenen Gleichung ſelbſt zu erhalten.

Wenn die gegebene Gleichung z. B. von der Form iſt:

$$y = x\varphi y' + \psi y',$$

ſo hat man:

$$y' = \varphi y' + (\psi' y' + x\varphi' y') \frac{dy'}{dx}, \text{ oder } \frac{dx}{dy'} - x \frac{\varphi' y'}{y' - \varphi y'} = \frac{\psi' y'}{y' - \varphi y'},$$

und folglich (§. 440):

$$x = \left[\int \frac{\psi' y' dy'}{y' - \varphi y'} \cdot e^{-\int \frac{\varphi' y' dy'}{y' - \varphi y'}} + C \right] \cdot e^{\int \frac{\varphi' y' dy'}{y' - \varphi y'}}.$$

Insbeſondere iſt die Gleichung:

$$y = xy' + \psi y' \tag{13}$$

zu bemerken, woraus ſich durch Differenziation ergibt:

$$0 = (\psi' y' + x) \frac{dy'}{dx}. \tag{14}$$

Der Gleichung (14) wird genügt, wenn man:

$$\frac{dy'}{dx} = 0, \quad \text{folglich } y' = c$$

ſetzt, und die Subſtitution dieſes Werthes von y' in die Gleichung (13) gibt zum allgemeinen Integrale:

$$y = cx + \psi c, \tag{15}$$

d. h. die Gleichung einer geraden Linie, welche ſich auf der Ebene der xy verrückt, wenn man die willkürliche Conſtante c variiren läßt.

Der Gleichung (14) wird auch Genüge geleiſtet, wenn man

$$\psi' y' + x = 0 \tag{16}$$

ſetzt, und wenn man y' zwiſchen den Gleichungen (13) und (16) eliminirt, ſo erhält man eine Gleichung zwiſchen x und y, welche der Gleichung (13) genügt, aber nicht das allgemeine Integral derſelben iſt, weil ſie keine willkürliche Conſtante erhält, und welche auch keine particuläres Integral mehr iſt, weil ſich aus der Gleichung (16) ein durch x ausgedrückten Werth von y' ergibt, welcher mit den aus dem allgemeinen Integrale abgeleiteten Werthen $y' = c$ unverträglich iſt. Dieſe reſultirende Gleichung zwiſchen x, y iſt folglich ein ſinguläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung (§. 164).

Es iſt zu bemerken, daß die Elimination c zwiſchen der Gleichung (15) und ihrer Ableitung in Beziehung auf c:

$$\psi' c + x = 0$$

dieſelbe Endgleichung zwiſchen x und y gibt, als die Elimination von y' zwiſchen den Gleichungen (13) und (16), was auch der Fall ſein muß, weil das ſinguläre Integral nach §. 189 die Curve ausdrückt, welche alle die ge-

ien Linien umſchließt, die man erhält, wenn man in der Gleichung (15) i Parameter c ſich ſtetig ändern läßt.

Zweites Kapitel.

über die Integration der Differenzialgleichungen der höhern Ordnun- n, und insbeſondere über die Integration der linearen Differenzial- gleichungen.

I. Von der Erniedrigung der Ordnung der Differenzialgleichungen.

§. 449. Die Integration der Differenzialgleichungen einer beliebigen rdnung von der Form:

$$y^{(n+1)} = fy^{(n)}, \quad \text{oder} \quad \frac{dy^{(n)}}{dx} = fy^{(n)}, \tag{1}$$

it ſich immer auf die Quadraturen zurückführen; denn es ergibt ſich daraus:

$$x = \int \frac{dy^{(n)}}{fy^{(n)}} + C. \tag{2}$$

ner iſt:

$$y^{(n-1)} = \int y^{(n)} dx = \int \frac{y^{(n)} dy^{(n)}}{fy^{(n)}} + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)} dx = \int \left[\int \frac{y^{(n)} dy^{(n)}}{fy^{(n)}} + C_1 \right] \frac{dy^{(n)}}{fy^{(n)}} + C_2;$$

b wenn man ſo fortfährt, ſo erhält man den Werth von y als eine Func- n von $y^{(n)}$ durch eine Reihe von Quadraturen. Es kommt alsdann blos h darauf an, $y^{(n)}$ zwiſchen der zuletzt erhaltenen Gleichung und der Glei- ng (2) zu eliminiren, um das durch $n + 1$ willkürliche Conſtanten vervoll- ndigte Integral der Gleichung (1) zu erhalten.

So gibt z. B. die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$-\frac{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}{y''} = a$$

ächſt:

$$dx = -\frac{a dy'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{folglich} \quad x = C - \frac{ay'}{\sqrt{1-y'^2}}. \tag{3}$$

rauf hat man:

$$y = \int y' dx = -a \int \frac{y' dy'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} + C_1 = \frac{a}{\sqrt{1+y'^2}} + C_1,$$

) wenn man y' eliminirt, ſo kommt man auf die Gleichung eines Kreiſes:

$$(x-C)^2 + (y-C_1)^2 = a^2. \tag{4}$$

In der That drückt die gegebene Gleichung aus, daß der Krümmungshalbmesser der ebenen Curve, deren veränderliche Coordinaten x, y bezeichnen, der Constanten a gleich ist.

Wenn man die Gleichung (2) in Beziehung auf $y^{(n)}$ auflösen kann, und man erhält:

$$y^{(n)} = f(x, C),$$

so hat man:

$$y^{(n-1)} = \int f(x, C)dx + C_1,$$
$$y^{(n-2)} = \int dx \int f(x, C)dx + C_1 x + C_2,$$

und wenn man so fortfährt, so erhält man den Werth von y als eine Function von x mit $n + 1$ willkürlichen Constanten durch eine Reihe von Quadraturen.

So ergibt sich z. B. aus der Gleichung (3):

$$y' = \pm \frac{x - C}{\sqrt{a^2 - (x - C)^2}},$$

folglich:

$$y = \pm \int \frac{(x - C)dx}{\sqrt{a^2 - (x - C)^2}} + C_1 = \mp \sqrt{a^2 - (x - C)^2} + C_1,$$

welches wieder auf die Gleichung (4) führt.

§. 450. Auch die Integration jeder Differenzialgleichung von der Form:

$$y^{(n+2)} = fy^{(n)}, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2y^{(n)}}{dx^2} = fy^{(n)}$$

kann auf die Quadraturen zurückgeführt werden; denn es folgt daraus

$$dy^{(n)} \cdot \frac{d^2y^{(n)}}{dx^2} = fy^{(n)}dy^{(n)},$$

und wenn man integrirt:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy^{(n)}}{dx}\right)^2 = \int fy^{(n)}dy^{(n)} + \text{const.},$$

folglich:

$$\frac{dy^{(n)}}{dx} = \sqrt{2\int fy^{(n)}dy^{(n)} + C},$$

$$x = \int \frac{dy^{(n)}}{\sqrt{2\int fy^{(n)}dy^{(n)} + C}} + C_1. \qquad (5)$$

Alsdann ist:

$$y^{(n-1)} = \int y^{(n)}dx = \int \frac{y^{(n)}dy^{(n)}}{\sqrt{2\int fy^{(n)}dy^{(n)} + C}} + C_2,$$

und wenn man auf dieselbe Weise weiter fortfährt, so erhält man den Werth von y als Function von $y^{(n)}$ durch eine Reihe von Quadraturen. Man hat alsdann blos noch $y^{(n)}$ zwischen der letzten erhaltenen Gleichung und der Gleichung (5) zu eliminiren, und die resultirende Gleichung ist das gesuchte allgemeine Integral.

Wenn sich die Gleichung (5) auf die Form:

$$y^{(n)} = f(x, C, C_1)$$

ngen läßt, ſo erhält man den Werth von y als Function von x mit der : Allgemeinheit des Integrales erforderlichen Anzahl willkürlicher Conſtanten, e vorhin, unmittelbar durch ſucceſſive Quadraturen.

Das vollſtändige Integral der Gleichung:

$$y'' = fy, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = fy,$$

elche in der Mechanik oft vorkommt, iſt:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int fydy + C}} + C_1,$$

o die Veränderliche x in dieſer Formel gewöhnlich die Zeit bezeichnet.

§. 451. Die Ordnung der Differenzialgleichungen, welche nur eine einge urſprüngliche Veränderliche enthalten, läßt ſich wenigſtens um eine Einheit erniedrigen. Dieſer Satz iſt für alle die Differenzialgleichungen für ſich ar, welche nur die unabhängige Veränderliche und die Ableitungen der Funcon enthalten, oder welche die Form:

$$F(x, y^{(n)}, y^{(n+1)}, \ldots y^{(n+\nu)}) = 0 \qquad (6)$$

aben, weil dieſe Gleichung, welche in Beziehung auf die Veränderlichen x, y on der $n + \nu^{ten}$ Ordnung iſt, nur noch von der ν^{ten} Ordnung iſt, wenn an $x, y^{(n)}$ zu den urſprüngtichen Veränderlichen nimmt.

Wenn die Function y ſtatt der unabhängigen Veränderlichen x in der gebenen Differenzialgleichung vorkäme, ſo könnte man die unabhängige Veränderliche vertauſchen (§. 134 und folg.) und die Ordnung der transformirten Gleichung würde wenigſtens um eine Einheit niedriger ſein.

Nachdem man das Integral der Gleichung (6) erhalten hat, indem $x, y^{(n)}$ n den urſprünglichen Veränderlichen genommen wurden, löſ't man die Integralgleichung in Beziehung auf x oder $y^{(n)}$ auf, und wenn man das eine der das andere der bereits angegebenen Verfahren anwendet; ſo erhält man en Werth von y als Function von x mit $n + \nu$ willkürlichen Conſtanten urch eine Reihe von Quadraturen.

§. 452. Wenn die zu integrirende Gleichung von der Form:

$$y^{(n)} = fx, \quad \text{oder} \quad \frac{d^n y}{dx^n} = fx$$

ſt, ſo erhält man, wenn man n mal hinter einander in Beziehung auf x integrirt, und der Kürze wegen $f^{(2)}$ ſtatt ff, $f^{(3)}$ ſtatt fff, ꝛc. ſetzt:

$$y = f^{(n)}fxdx^n = \int dx \int dx \ldots \int fxdx + Cx^{n-1} + C_1x^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + C_{n-2}x + C_{n-1}.$$

Aber vermittelſt der theilweiſen Integration kann man das vielfache Integral n letzten Theile der vorhergehenden Gleichung durch eine Reihe einfacher ntegrale erſetzen; denn wenn man zuerſt die Conſtanten hinwegläßt, ſo hat an:

$$f^{(2)}fxdx^2 = \int dx \int fxdx = x\int fxdx - \int fx \cdot xdx,$$
$$f^{(3)}fxdx^3 = \int dx f^{(2)}fxdx^2 = \int xdx \int fxdx - \int dx \int fx \cdot xdx,$$
$$\int xdx \int fxdx = \tfrac{1}{2}x^2 \int fxdx - \tfrac{1}{2}\int fx \cdot x^2 dx,$$
$$\int dx \int fx \cdot xdx = x\int fx \cdot xdx - \int fx \cdot x^2 dx,$$

gleich:

$$\int^{(3)} fx dx^3 = \frac{1}{1.2}(x^2 \int fx dx - 2x \int fx \cdot x dx + \int fx \cdot x^2 dx).$$

Eben ſo fände man:

$$\int^{(4)} fx dx^4$$

$$= \frac{1}{1.2.3}(x^3 \int fx dx - 3x^2 \int fx \cdot x dx + 3x \int fx \cdot x^2 dx - \int fx \cdot x^3 dx),$$

woraus durch Induction folgt:

$$\int^{(n)} fx dx^n = \frac{1}{1.2.3...(n-1)}\left[x^{n-1} \int fx dx - \frac{n-1}{1} x^{n-2} \int fx \cdot x dx \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} x^{n-3} \int fx \cdot x^2 dx \ldots \pm \int fx \cdot x^{n-1} dx\right],$$

oder ſymboliſch ausgedrückt:

$$\int^{(n)} fx dx^n = \frac{(x-\xi)^{n-1} \int fx dx}{1.2.3...(n-1)},$$

wenn nach der Entwickelung die Potenzen von ξ unter das Zeichen $\int$ geſe
werden, und man alsdann ξ mit x vertauſcht.

Man beweiſ't dieſe Formel wie die Binomialformel und wie alle äh
lichen Formeln, indem man darthut, daß ſie, wenn ſie für einen beſonde
Werth von n richtig iſt, auch für den folgenden Werth $n + 1$ ſtattfindet.

Wir haben alſo, wenn wir die durch alle Integrationen eingeführten wi
kürlichen Conſtanten wieder herſtellen, und der Kürze wegen die vorhin ang
wandte ſymboliſche Bezeichnung beibehalten:

$$y = \frac{(x-\xi)^{n-1} \int fx dx}{1.2.3...(n-1)} + Cx^{n-1} + C_1 x^{n-2} + \ldots + C^{n-2}x + C^{n-1}.$$

II. Von den integrirenden Factoren der Differenzialgleichungen der höhern Ordnung

§. 453. Man kann ſich immer vorſtellen, daß eine Differenzialgleichu
der n^{ten} Ordnung auf die Form:

$$f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \quad (7$$

gebracht iſt, und wenn man andererſeits durch:

$$\omega(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-2)}, y^{(n-1)}) = C \quad (8$$

die Differenzialgleichung der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, woraus die gegebene abg
leitet iſt, darſtellt, indem C die willkürliche Conſtante bezeichnet, welche b
dem Uebergange von der Gleichung (8) zu der Gleichung (7) verſchwinde
ſo erhält man durch Differenziation:

$$\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dy} y' + \frac{d\omega}{dy'} y'' + \ldots + \frac{d\omega}{dy^{(n-2)}} y^{(n-1)} + \frac{d\omega}{dy^{(n-1)}} y^{(n)} = 0 \quad (9$$

oder:

$$\left[\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dy} y' + \frac{d\omega}{dy'} y'' + \ldots + \frac{d\omega}{dy^{(n-2)}} y^{(n-1)}\right] : \frac{d\omega}{dy^{(n-1)}} + y^{(n)} = 0. \quad (10$$

Die Gleichungen (7) und (10) müſſen nach der Vorausſetzung identiſ
ſein; folglich umgekehrt, wenn man die Gleichung (7) durch einen gewiſſ
Factor:

$$\mu = \frac{d\omega}{dy^{(n-1)}}$$

, welcher, wie die Function ω ſelbſt, nur von den Größen
. $y^{(n-1)}$ abhängen kann; ſo macht man die gegebene Gleichung mit
ung (9) identiſch, d. h. man macht den erſten Theil der gegebenen
lgleichung zu einem genauen Differenziale. Uebrigens iſt einleuch-
nicht blos der Factor μ, ſondern auch alle die unendlich vielen in
$\mu f(\omega)$, wo f eine beliebige Function bezeichnet, enthaltenen Fac-
Eigenſchaft beſitzen, den erſten Theil der Gleichung (7) zu einem
ifferenziale zu machen.
ie gegebene Differenzialgleichung von der n^{ten} Ordnung iſt, ſo ge-
n erſte Integrale von der Ordnung $n-1$ (§. 164), und es ſei:

$$\omega_1(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-2)}, y^{(n-1)}) = C_1$$

s dieſer erſten Integrale, ſo wird die gegebene Differenzialgleichung
ben Grunde, wie vorhin, zu einem genauen Differenziale gemacht,
ſie durch den Factor:

$$\mu_1 = \frac{d\omega_1}{dy^{(n-1)}}$$

, oder allgemeiner durch einen der unendlich vielen Factoren, welche
mel $\mu_1 f_1(\omega_1)$ enthalten ſind, wo f_1 eine andere willkürliche Func-
net.
neiner, wenn man durch $\Phi(\omega, \omega_1)$ eine beliebige Function der bei-
n ω, ω_1 bezeichnet, ſo haben alle in der Formel:

$$\mu \frac{d\Phi(\omega, \omega_1)}{d\omega} + \mu_1 \frac{d\Phi(\omega, \omega_1)}{d\omega_1}$$

$$\frac{d\omega}{dy^{(n-1)}} \cdot \frac{d\Phi(\omega, \omega_1)}{d\omega} + \frac{d\omega_1}{dy^{(n-1)}} \cdot \frac{d\Phi(\omega, \omega_1)}{d\omega_1}$$

Factoren die Eigenſchaft, daß ſie den erſten Theil der gegebenen
lgleichung zu einem genauen Differenziale machen, weil dieſer erſte
ann das Differenzial der Function $\Phi(\omega, \omega_1)$ wird.
i man alſo endlich durch:

$$\omega = C, \quad \omega_1 = C_1, \quad \omega_2 = C_2, \ldots \omega_{n-1} = C_{n-1}$$

n Integrale der gegebenen Differenzialgleichung, und durch Φ eine
function der Größen $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$, bezeichnet; ſo ſind die
welche den erſten Theil der gegebenen Differenzialgleichung zu einem
ifferenziale machen können, in der allgemeinen Gleichung:

$$\frac{d\omega}{y^{(n-1)}} \cdot \frac{d\Phi}{d\omega} + \frac{d\omega_1}{dy^{(n-1)}} \cdot \frac{d\Phi}{d\omega_1} + \ldots + \frac{d\omega_{n-1}}{dy^{(n-1)}} \cdot \frac{d\Phi}{d\omega^{n-1}}$$

54. Wir wollen dieſes auf die Gleichung der zweiten Ordnung:

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0$$

welche ſich, je nachdem man ſie durch x multiplicirt oder dividirt,
e Gleichungen:

$$xy'' - y' = 0, \quad \frac{y''}{x} - \frac{y'}{x^2} = 0$$

verwandelt, deren erſte Theile reſp. die genauen Differenziale der Functionen:

$$\omega = xy' - 2y, \quad \omega_1 = \frac{y'}{x} \tag{11}$$

ſind.

Die Integrale der erſten Ordnung der gegebenen Differenzialgleichung ſind:

$$xy' - 2y = C, \quad \frac{y'}{x} = C_1$$

und das Integral der zweiten Ordnung, welches ſich aus der Elimination der Function y' zwiſchen den beiden Integralen der erſten Ordnung ergibt, iſt:

$$C_1 x^2 - 2y = C.$$

In dieſem Falle werden die Factoren, welche die Eigenſchaft beſitzen, den erſten Theil der gegebenen Gleichung zu einem genauen Differenziale zu machen, durch die Formel:

$$x \cdot \frac{d\Phi(\omega, \omega_1)}{d\omega} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d\Phi(\omega, \omega_1)}{d\omega_1}$$

ausgedrückt, wo die Zuſammenſetzung der Functionen ω, ω_1 durch die Gleichungen (11) gegeben wird, und die Function Φ willkürlich bleibt.

III. Von den linearen Differenzialgleichungen einer beliebigen Ordnung.

§. 455. Unter einer *linearen* Differenzialgleichung verſteht man eine ſolche, welche weder höhern Potenzen als die erſte, noch Producte der Function und ihrer Ableitungen der verſchiedenen Ordnungen enthält, und welche folglich von der Form:

$$y^{(n)} + Py^{(n-1)} + Qy^{(n-2)} + \ldots + Uy = V \tag{a}$$

iſt, indem $P, Q, \ldots U, V$ Functionen der unabhängigen Veränderlichen x allein bezeichnen. Allgemein, wenn die Gleichung:

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$$

das Geſetz einer Erſcheinung genau ausdrückt, und wenn außerdem die Größen $y, y', y'', \ldots y^{(n)}$ nach der Natur dieſer Erſcheinung immer ſehr klein bleiben müſſen, ſo daß man die Producte und die höhern Potenzen dieſer Größen vernachläſſigen kann; ſo verwandelt ſich die Function Φ in eine lineare Function derſelben veränderlichen Größen, und die Gleichung der Aufgabe wird eine lineare Differenzialgleichung. Die Theorie der Integration der Gleichungen dieſer Art muß alſo unſere Aufmerkſamkeit beſonders auf ſich ziehen und zwar nicht blos wegen der ſehr merkwürdigen analytiſchen Reſultate, zu welche man kommt, ſondern auch wegen der Wichtigkeit der Anwendungen.

Wir wollen daher zunächſt annehmen, daß der zweite Theil der Gleichung (a) Null ſei, oder daß man die Gleichung:

$$y^{(n)} + Py^{(n-1)} + Qy^{(n-2)} + \ldots + Uy = 0 \tag{b}$$

zu integriren habe, ſo beſteht die charakteriſtiſche Eigenſchaft einer Differenzialgleichung dieſer Form darin, daß, wenn verſchiedene beſondere Werthe $y_1, y_2, y_3, \ldots$ von y als Functionen von x derſelben Genüge leiſten, auch die Summe dieſer reſp. mit den willkürlichen Conſtanten C_1, C_2, C_3, ꝛc. multiplicirten Werthe, d. h.:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \text{ꝛc.}$$

derſelben genügen. Die Form der Rechnung, worauf dieſer Satz beruht, folgt ſo unmittelbar aus der Form der Gleichung (b) ſelbſt, daß ſie blos angedeutet zu werden braucht.

Wenn man alſo n beſondere und verſchiedene Werthe $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ kennt, welche der Gleichung (b) genügen, ſo iſt das allgemeine Integral derſelben:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n;$$

denn dieſer Werth von y genügt der gegebenen Differenzialgleichung, und wegen der darin vorkommenden n verſchiedenen willkürlichen Conſtanten hat derſelbe alle Allgemeinheit, welche ein ſolches Integral nur geſtattet.

§. 456. Nun gibt es aber einen Fall, wo man leicht n beſondere Werthe von y findet, welche der Gleichung (b) genügen können, und dieſes iſt der Fall, wo ſich alle die Coefficienten $P, Q, \ldots U$ auf Conſtanten reduciren; denn wenn man $y = e^{mx}$ ſetzt, ſo iſt für jeden Werth von i, $y^{(i)} = m^i e^{mx}$, ſo daß die Subſtitution dieſes Werthes von y in die Gleichung (b) das Reſultat:

$$e^{mx}(m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} + \ldots + U) = 0$$

gibt, und alsdann leiſtet die Function $y = e^{mx}$ offenbar der Gleichung (b) Genüge, wofern der der Zahl m beigelegte Werth eine der Wurzeln der Zahlengleichung:

$$m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} + \ldots + U = 0, \qquad (m)$$

iſt. Wenn man alſo die n Wurzeln dieſer Gleichung mit $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ willkürliche Conſtanten bezeichnet, ſo iſt das allgemeine Integral der Gleichung (b):

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x} + \ldots + C_n e^{m_n x}. \qquad (c)$$

§. 457. Ehe wir weiter gehen, wird es gut ſein, zu zeigen, weswegen der eben betrachtete, anſcheinend ſo particuläre Fall in den Anwendungen nichtsdeſtoweniger eine ſolche Wichtigkeit hat, daß er beſonders unterſucht zu werden verdient.

Zuvörderſt iſt klar, daß dieſer Fall den mit in ſich begreift, wo der zweite Theil der Gleichung (b), ſtatt Null zu ſein, irgend eine Zahl V iſt, denn man braucht blos $y = \eta + \frac{V}{U}$ zu ſetzen, um den zweiten Theil der transformirten Gleichung mit η auf Null zu reduciren.

Ferner wollen wir bemerken, daß in den meiſten Anwendungen der Analyſis auf die Phyſik die Zeit die hier mit x bezeichnete unabhängige veränderliche Größe iſt, und daß dieſe Veränderliche gewöhnlich nur durch ihre Differenziale in den Gleichungen der Aufgaben vorkommt. Wenn es ſich z. B. um eine mechaniſche Aufgabe handelt, ſo ändern ſich die auf ein materielles Syſtem wirkenden Kräfte gewöhnlich nur mit den gegenſeitigen Entfernungen der Theile des Syſtemes, ſind zu einer beliebigen Zeit entwickelte Functionen dieſer Entfernungen und hängen von der ſeit dem zum Anfangspunkte genommenen Augenblicke verfloſſenen Zeit implicite ab.

§. 458. Wenn alle Wurzeln der Gleichung (m) reell und ungleich ſind, ſo läßt ſich leicht darthun, daß die willkürlichen Conſtanten $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$ immer vermittelſt der $x = 0$ entſprechenden anfänglichen Werthe:

$$y_0, y'_0, y''_0, \ldots y_0^{(n-1)}, \qquad (o)$$

numeriſch beſtimmt werden können. Es ſei z. B. $n = 3$, ſo hat man:

$$y_0 = C_1 + C_2 + C_3$$
$$y'_0 = m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3$$
$$y''_0 = m_1^2 C_1 + m_2^2 C_2 + m_3 C_3,$$

woraus folgt:

$$C_1 = \frac{m_2 m_3 y_0 - (m_2 + m_3) y'_0 + y''_0}{(m_1 - m_2)(m_1 - m_3)}$$
$$C_2 = \frac{m_1 m_3 y_0 - (m_1 + m_3) y'_0 + y''_0}{(m_2 - m_1)(m_2 - m_3)}$$
$$C_3 = \frac{m_1 m_2 y_0 - (m_1 + m_2) y'_0 + y''_0}{(m_3 - m_1)(m_3 - m_2)}.$$

Aus der Symmetrie dieſer Formeln erhellet das Bildungsgeſetz der Ausdrücke zur Genüge, welche man erhalten würde, wenn man vermittelſt der anfänglichen Werthe der Function und ihrer Ableitungen eine größere Anzahl willkürlicher Conſtanten zu beſtimmen hätte.

Wenn man nach der Natur der Aufgabe wüßte, daß die Größe y nicht ohne Ende mit x wachſen kann, ſo muß man die willkürlichen Conſtanten C_i welche den poſitiven Wurzeln m_i der Gleichung (m) entſprechen, nothwendig $= 0$ ſetzen. Alsdann können die anfänglichen Werthe (0) nicht mehr willkürlich gegeben werden, ſondern es müſſen zwiſchen ihnen ſo viele Bedingungsgleichungen ſtattfinden, als die Gleichung (m) poſitive Wurzeln hat. Dieſe Reductionsart der Anzahl der willkürlichen Conſtanten nach den Betrachtungen der Form der Functionen, unabhängig von den Zahlenwerthen ihrer Parameter, verdient bemerkt zu werden; denn Betrachtungen derſelben Art kommen häufig bei den Anwendungen der Analyſis auf phyſikaliſche Aufgaben vor.

§. 459. Wenn die Gleichung (m) imaginäre Wurzeln hätte, ſo würden ſich die imaginär gewordene Exponentialgrößen paarweiſe vereinigen, und in Sinus oder Coſinus reeller Bogen verwandelt. Wenn z. B. durch $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ zwei zuſammengehörige imaginäre Wurzeln der Gleichung (m) bezeichnet werden, ſo verwandeln ſich die Exponentialglieder, welche durch dieſe Wurzeln in das allgemeine Integral eingeführt werden, nämlich:

$$C_1 e^{x(\alpha + \beta\sqrt{-1})} + C_2 e^{x(\alpha - \beta\sqrt{-1})}$$

in:

$$e^{\alpha x}(C_1 e^{\beta x\sqrt{-1}} + C_2 e^{-\beta x\sqrt{-1}})$$
$$= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos.\beta x + (C_1 - C_2)\sqrt{-1} \cdot \sin.\beta x]$$

und nehmen zuletzt die Form an:

$$e^{\alpha x}(M \cos.\beta x + N \sin.\beta x),$$

wenn man zwiſchen den unbeſtimmten Conſtanten C_1, C_2, M, N die beiden Relationen:

$$C_1 + C_2 = M, \quad (C_1 - C_2)\sqrt{-1} = N$$

aufſtellt. Man kann dieſen Ausdruck auch noch vereinfachen, wenn man

$$M = \lambda \cos.\varepsilon, \quad N = -\lambda \sin.\varepsilon$$

ſetzt, welches gibt:

$$e^{\alpha x}(M \cos. \beta x + N \sin. \beta x) = \lambda e^{\alpha x} \cos.(\beta x + \varepsilon),$$

alsdann λ, ε zwei willkürliche Conſtanten ſind.

Wenn der reelle Theil α des betrachteten Paares imaginärer Wurzeln tiv iſt, ſo nimmt der Factor $e^{\alpha x}$ für zunehmende Weethe von x ohne e ab, während der Factor $\lambda \cos.(\beta x + \varepsilon)$ zwiſchen den Werthen $-\lambda$ $+\lambda$ periodiſche Schwankungen macht, und die aus dem Producte dieſer n Factoren beſtehende Function bietet folglich periodiſche Schwankungen deren Amplitude für zunehmende Werthe von x ſchnell abnimmt. Wenn gen α poſitiv wäre, ſo würde die Amplitude der Schwankungen der Funcſehr ſchnell und über jede Grenze hinaus zunehmen, was offenbar mit Geſetze jeder Naturerſcheinung unverträglich iſt, und ein ſolcher Fall würde ich nur in der reinen Abſtraction vorkommen können.

Wenn die Gleichung (m) nur imaginäre Wurzeln hat, deren reelle Theile hwinden, ſo iſt der vollſtändige Werth von y eine Reihe von Gliedern der Form:

$$\lambda \cos.(\beta x + \varepsilon). \qquad (\eta)$$

len wir uns y als die mit x veränderliche Größe, deren mittlerer Werth ößer oder kleiner iſt, als eine andere Größe, welche die Aſtronomen die **Ungleichheit** von η der Kürze wegen nennen, ſo iſt dieſe Ungleichheit die me mehrerer periodiſcher Ungleichheiten, wovon jede durch ein Glied von Form (η) ausgedrückt wird.

Die Conſtante λ wird der **Coefficient** der Ungleichheit genannt, bet die Amplitude derſelben und iſt, wie die Conſtante ε, von den anlichen Werthen der Function und ihrer Ableitungen abhängig. Die Zahl ſtimmt die **Ausdehnung** der Periode, weil die Ungleichheit für Werthe x, deren Unterſchied $= \frac{2\pi}{\beta}$ iſt, wieder dieſelben Werthe annimmt, und Größe β wird durch die Differenzialgleichung unabhängig von den anlichen Werthen der Function und ihrer Ableitungen gegeben. Alle dieſe chtungen kommen bei periodiſchen Erſcheinungen häufig zur Anwendung.

§. 460. Wenn einige Wurzeln der Gleichung (m) einander gleich wer- ſo iſt die vorhergehende Analyſe unzuläſſig. Es ſei z. B. $m_1 = m_2$, ſo nigen ſich die beiden Glieder $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$ in ein einziges $+ C_2) e^{m_1 x}$, und der Coefficient $C_1 + C_2$ iſt nur noch ſo gut, wie eine e willkürliche Conſtante (§. 164), ſodaß das Integral (c) nicht mehr rforderliche Allgemeinheit hat. Wenn wir in dieſem Falle

$$y_1 = e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x) \qquad (12)$$

, ſo gibt die Subſtitution dieſes Werthes in die Gleichung (b):

$$e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x)(m_1^n + Pm_1^{n-1} + Qm_1^{n-2} + \ldots + Tm_1 + U)$$
$$B_1 e^{m_1 x}[nm_1^{n-1} + (n-1)Pm_1^{n-2} + (n-2)Qm_1^{n-3} + \ldots + T] = 0.$$

Der Factor:

$$m_1^n + Pm_1^{n-1} + Qm_1^{n-2} + \ldots + Tm_1 + U$$

windet, weil m_1 Wurzel der Gleichung (m) iſt, und das Polynom, wo- $_1 e^{m_1 x}$ multiplicirt iſt, verſchwindet auch, weil m_1 nach der Vorausſetzung doppelte Wurzel der Gleichung (m) und folglich auch eine Wurzel der iten Gleichung:

$$nm^{n-1} + (n-1)Pm^{n-2} + (n-2)Qm^{n-3} + \ldots + T = 0$$

Wenn alſo $m_3, \ldots m_n$ wieder die einfachen Wurzeln der Gleichung (m) men, und man ſetzt:

$$y = e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x) + C_3 e^{m_3 x} + \ldots + C_n e^{m_n x},$$

ſo wird der Gleichung (b) genügt, deren allgemeines Integral man au
Weiſe erhält, weil die n Conſtanten $A_1, B_1, C_3, \ldots C_n$ unter ſich in
bel ſind.

Eben ſo würde man finden, daß man in dem Falle drei gleicher W
das Trinom:

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x}$$

durch:

$$e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x + C_1 x^2)$$

erſetzen muß, u. ſ. f.

Die Form, welche das allgemeine Integral in dem Falle annimm
die Gleichung (m) gleiche Wurzeln hat, ergibt ſich auch aus folgender Re

Statt unmittelbar $m_2 = m_1$ zu ſetzen, wollen wir zuvörderſt $m_2 = m$
ſetzen, welches

$$C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} = e^{m_1 x}(C_1 + C_2 e^{\varepsilon x})$$

$$= e^{m_1 x}[C_1 + C_2(1 + \frac{\varepsilon x}{1} + \frac{\varepsilon^2 x^2}{1.2} + \frac{\varepsilon^3 x^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.})]$$

gibt, indem für $e^{\varepsilon x}$ die immer convergirende Reihenentwickelung geſetzt i
iſt erlaubt, dieſen Ausdruck dadurch auf eine andere Form zu bringen
man die willkürlichen Conſtanten verändert, und zu dem Zwecke $C_1 + C_2 :$
$C_2 \varepsilon = B_1$ ſetzt. Auf dieſe Weiſe verwandelt ſich der vorhergehende
druck in:

$$e^{m_1 x}\left[A_1 + B_1 x + B_1\left(\frac{\varepsilon x^2}{1.2} + \frac{\varepsilon^2 x^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}\right)\right],$$

und wenn man nun $\varepsilon = 0$ ſetzt, ſo reducirt er ſich auf den zweiten Th
Gleichung (12).

Da in dem Falle, wo die beiden Wurzeln m_1, m_2, einander gleic
den, das Trinom (13) durch:

$$e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x) + C_3 e^{m_3 x}$$

erſetzt iſt, ſo kann man $m_3 = m_1 + \varepsilon$ ſetzen, wodurch der vorherg
Ausdruck in folgenden verwandelt wird:

$$e^{m_1 x}(A_1 + B_1 x + C_3 e^{\varepsilon x})$$

$$= e^{m_1 x}[A_1 + B_1 x + C_3(1 + \frac{\varepsilon x}{1} + \frac{\varepsilon^2 x^2}{1.2} + \frac{\varepsilon^3 x^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.})].$$

Auch kann man die Conſtanten verändern, indem man

$$A_1 + C_3 = D_1, \quad B_1 + C_3 \varepsilon = E_1, \quad \tfrac{1}{2} C_3 \varepsilon^2 = F_1$$

ſetzt, ſo daß ſich der zweite Theil der vorhergehenden Gleichung in:

$$e^{m_1 x}\left[D_1 + E_1 x + F_1 x^2 + F_1\left(\frac{\varepsilon x^3}{3} + \text{ꝛc.}\right)\right]$$

verwandelt und ſich für $\varepsilon = 0$ auf:

$$e^{m_1 x}(D_1 + F_1 x + F_1 x^2)$$

reducirt. Dieſelbe Methode iſt offenbar auch auf den Fall einer beli
Anzahl gleicher Wurzeln anwendbar. Es iſt zweckmäßig, dieſe Meth
kennen, welche die Analyſten in ähnlichen und complicirtern Fällen oft
wandt haben, obgleich ſie einigen Schwierigkeiten unterliegt, welche verſ

n, wenn man die dem allgemeinen Integrale in der Vorausſetzung, wo die Gleichung (m) gleiche Wurzeln bekommt, gegebene Form direct rechtfertigt, ie wir es zuvor gethan haben.

§. 461. Die Gleichung (b) läßt ſich ſelten integriren, wenn die Coefficienten Functionen von x ſind. Betrachtet man z. B. die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

nd ſetzt:

$$y = e^{\int z dx}, \qquad (d)$$

verwandelt ſie ſich in:

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + Pz + Q = 0,$$

nd wenn ſich dieſe Gleichung der erſten Ordnung zwiſchen z und x durch rennung der Veränderlichen, oder auf andere Weiſe integriren läßt, ſo erhält man den Werth von y als Function von x durch die Quadraturen.

llgemein, wenn man in die Gleichung (b) den durch die Gleichung (d) gegebenen Werth von y als Function von z ſubſtituirt, ſo iſt die transformirte Gleichung mit z und x nur noch von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, aber keine neare Gleichung mehr.

Die linearen Differenzialgleichungen von der Form:

$$(a+bx)^n y^{(n)} + P(a+bx)^{n-1} y^{(n-1)} + Q(a+bx)^{n-2} y^{(n-2)} \ldots$$
$$\ldots + T(a+bx) + U = 0, \qquad (e)$$

o P, Q, ... T, U wieder conſtante Coefficienten bezeichnen, werden integrirt, enn man $y = (a+bx)^m$ ſetzt, ſo daß man zur Beſtimmung von m die algebraiſche Gleichung des m^{ten} Grades:

$$m(m-1)\ldots(m-n+1) + \frac{P}{b} \cdot m(m-1)\ldots(m-n+2)$$
$$+ \frac{Q}{b^2} \cdot m(m-1)\ldots(m-n+3) + \ldots + \frac{Tm}{b^{n-1}} + \frac{U}{b^n} = 0$$

it, und wenn man die n Wurzeln dieſer Gleichung mit $m_1, m_2, \ldots m_n$ und it $C_1, C_2, \ldots C_n$ willkürliche Conſtanten bezeichnet, ſo iſt das allgemeine ntegral der Gleichung (e):

$$y = C_1(a+bx)^{m_1} + C_2(a+bx)^{m_2} + \ldots + C_n(a+bx)^{m_n},$$

elches folglich transcendent iſt, wofern die Gleichung mit m nicht lauter ationale Wurzeln hat.

§. 462. Wenn man einen particulären Werth y_1 könnte, welcher der Gleichung (b) zu genügen vermag, ſo könnte man die Ordnung der Gleiung (b), und ſelbſt die der Gleichung (a) um eine Einheit erniedrigen, zu elchem Zwecke man nur

$$y = y_1 \int z dx \qquad (f)$$

ſetzen braucht, wo z, wie oben, eine neue Veränderliche, die eine Function on x iſt, bezeichnet. In dieſer Beziehung wollen wir bemerken, daß man, enn u, v beliebige Functionen derſelben unabhängigen veränderlichen Größe bezeichnen, hat:

$$d \cdot uv = udv + vdu$$
$$d^2 \cdot uv = ud^2u + 2dudv + vd^2u$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d^n \cdot uv = ud^nv + \frac{n}{1} \cdot dud^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2ud^{n-2}v + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{1} \cdot dvd^{n-1}u + d^nu.$$

und vermöge dieſer Formeln gibt die Subſtitution des Werthes von y in die Gleichung (a):

$$y_1 z^{(n-1)} + (ny'_1 + Py_1)z^{(n-2)}$$
$$+ \left[\frac{n(n-1)}{1.2} y''_1 + (n-1)Py'_1 + Qy_1\right] z^{(n-3)} + \ldots$$
$$\ldots + (y_1^{(n)} + Py_1^{(n-1)} + Qy_1^{(n-2)} + \ldots + Uy_1) \int z dx = V.$$

Nun iſt aber der Coefficient von $\int z dx$ in dieſer Gleichung nach der Vorausſetzung $= 0$, weil y_1 ein particuläres Integral der Gleichung (b) iſt, und wenn man dieſe Gleichung durch y_1, welches eine bekannte Function von x iſt, dividirt; ſo wird ſie folglich auch die Form:

$$z^{(n-1)} + P_1 z^{(n-2)} + Q_1 z^{(n-3)} + \ldots + T_1 z = \frac{V}{y_1}, \qquad (a_1)$$

zurückgeführt, indem $P_1, Q_1, \ldots T_1$ wie $P, Q, \ldots T$ bekannte Functionen von x ſind, und die Ordnung der Gleichung (a) iſt um eine Einheit erniedrigt.

Wenn man nicht die Gleichung (a), ſondern die Gleichung (b) integriren will, ſo hat man ſtatt der letzten erhaltenen Gleichung folgende:

$$z^{(n-1)} + P_1 z^{(n-2)} + Q_1 z^{(n-3)} + \ldots + T_1 z = 0. \qquad (b_1)$$

Wenn man in dieſer Vorausſetzung einen zweiten particulären Werth y kennte, welcher der Gleichung (b) genügte, ſo müßte einer der aus der Gleichung (b_1) gezogenen Werthe von z der Gleichung (f), nachdem darin y_2 für y geſetzt iſt, genügen, und wenn man dieſen particulären Werth von z mit z_1 bezeichnete, ſo hätte man folglich:

$$y_2 = y_1 \int z_1 dx, \quad \text{oder} \quad z_1 = \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx}.$$

Wenn man alſo zwei particuläre Integrale der Gleichung (b) kennt, ſo kennt man dadurch ein particuläres Integral der Gleichung (b_1), und folglich wird die Ordnung der Gleichung (b_1) durch die Transformation $z = z_1 \int u dx$ um eine Einheit erniedrigt. Da ſich dieſe Schlüſſe allmälig weiter fortſetzen laſſen, ſo folgt, daß, wenn man m particuläre Integrale der Gleichung (b) kennt, die allgemeine Integration dieſer Gleichung, und ſelbſt die der Gleichung (a) auf die Integration einer Differenzialgleichung von der Ordnung $n - m$ zurückgeführt iſt, ſo daß man, wenn dieſe integrirt wird, das allgemeine Integral der Gleichung (a) durch einfache Quadraturen erhält. Dieſes ſchöne Theorem verdankt man Lagrange; allein der vorhin gegebene Beweis deſſelben, gewährt, wie Libri in einer ſehr intereſſanten Abhandlung *) g hat, den Vortheil, die zwiſchen der Theorie der algebraiſchen Gleichungen

*) Crelle's Journal der Math. Bd. 10.

der der Integration der linearen Differenzialgleichungen ſtattfindenden Analogien in das hellſte Licht zu ſetzen.

§. 463. Wenn die Coefficienten P, Q, ... U der Gleichung (a) conſtante Zahlen ſind, indem das letzte Glied V allein eine Function von x iſt, ſo kennt man n particuläre Integrale der Gleichung (b):

$$y_1 = e^{m_1 x}, \quad y_2 = e^{m_2 x}, \ldots y_n = e^{m_n x},$$

wo $m_1, m_2, \ldots m_n$ wieder die Wurzeln der Gleichung (m) bezeichnen. Die allgemeine Integration der Gleichung (a) iſt alſo auf die Quadraturen zurückgeführt.

Es ſei z. B. die lineare Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$y'' + Py' + Qy = V$$

gegeben, wo P, Q conſtante Zahlen bezeichnen, ſo ſind m_1, m_2 die Wurzeln der Zahlengleichung:

$$m^2 + Pm + Q = 0, \qquad (g)$$

und man hat:

$$y_1 = e^{m_1 x}, \quad y_2 = e^{m_2 x}.$$

Setzt man:

$$y = y_1 \int z dx = e^{m_1 x} \int z dx,$$

ſo iſt die transformirte Gleichung mit z, wegen $P = -(m_1 + m_2)$, folgende:

$$z' + (2m_1 + P)z = Ve^{-m_1 x}, \quad \text{oder} \quad z' - (m_2 - m_1)z = Ve^{-m_1 x}.$$

Setzt man außerdem:

$$z = z_1 \int u dx = \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx} \int u dx = (m_2 - m_1) e^{(m_2 - m_1)x} \int u dx,$$

ſo gibt die transformirte Gleichung mit u:

$$u = \frac{Ve^{-m_2 x}}{m_2 - m_1},$$

woraus folgt:

$$z = e^{(m_2 - m_1)x} \int Ve^{-m_2 x} dx$$

$$y = e^{m_1 x} \int dx [e^{(m_2 - m_1)x} \int Ve^{-m_2 x} dx],$$

oder, wenn man theilweiſe integrirt:

$$y = \frac{e^{m_2 x} \int Ve^{-m_2 x} dx - e^{m_1 x} \int Ve^{-m_1 x} dx}{m_2 - m_1}, \qquad (h)$$

wo jedes der beiden unbeſtimmten Integrale, als eine willkürliche Conſtante enthaltend, betrachtet wird.

Wenn m_1, m_2 zwei conjugirte imaginäre Wurzeln ſind, von der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, ſo verwandelt ſich der vorhergehende Ausdruck in:

$$y = \frac{e^{\alpha x}}{\beta} (\sin. \beta x \int Ve^{-\alpha x} \cos. \beta x \cdot dx - \cos. \beta x \int Ve^{-\alpha x} \sin. \beta x \cdot dx).$$

Wenn endlich $m_2 = m_1$ wäre, ſo erſchiene der zweite Theil der Gleichung (h) unter der Form $\frac{0}{0}$; aber wenn man in Beziehung auf den Parameter m_2 vom Zähler und Nenner die Ableitungen nimmt, und dann $m_2 = m_1$ ſetzt, ſo findet man für dieſen Fall:

$$y = e^{m_1 x} (x \int Ve^{-m_1 x} dx - \int Ve^{-m_1 x} x dx).$$

§. 464. Wir können dieſen Gegenſtand nicht verlaſſen, ohne die Methode anzugeben, welche man gewöhnlich zum Beweiſe des Lehrſatzes im §. 462 anwendet.

Wir wollen zuvörderſt annehmen, man kenne n particuläre Integrale der Gleichung (b), ſo daß das allgemeine Integral dieſer Gleichung:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n \qquad (i)$$

iſt; ſo behaupten wir, daß dieſer Werth von y auch für das allgemeine Integral der Gleichung (a) genommen werden kann, wenn man die Factoren $C_1, C_2 \ldots C_n$ nicht als Conſtanten, ſondern als Functionen von x betrachtet, welche gehörig beſtimmt werden müſſen.

Denn in dieſer Vorausſetzung hat man:

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C_3 y'_3 + \ldots + C_n y'_n + y_1 C'_1 + y_2 C'_2 + y_3 C'_3 + \ldots + y_n C'_n,$$

wo C'_i die Ableitung von C_i in Beziehung auf x bezeichnet, und wenn die Functionen C_i der Gleichung:

$$y_1 C'_1 + y_2 C'_2 + y_3 C'_3 + \ldots + y_n C'_n = 0$$

genügen müſſen, ſo bleibt:

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C_3 y'_3 + \ldots + C_n y'_n,$$

wie in dem Falle, wo die Factoren C_i Conſtanten ſind. Aus dieſer letzten Gleichung ergibt ſich:

$$y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + C_3 y''_3 + \ldots + C_n y''_n + y'_1 C'_1 + y'_2 C'_2 + y'_3 C'_3 + \ldots + y'_n C'_n,$$

oder blos:

$$y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + C_3 y''_3 + \ldots + C_n y''_n,$$

wenn die Ableitungen C'_i der Bedingungsgleichung:

$$y'_1 C'_1 + y'_2 C'_2 + y'_3 C'_3 + \ldots + y'_n C'_n = 0$$

genügen müſſen.

Fährt man auf dieſe Weiſe fort, ſo findet man, daß der durch die Gleichung (i) gegebene Werth von y, welcher nach der Vorausſetzung der Gleichung (b) genügt, auch der Gleichung (a) Genüge leiſtet, wofern die Ableitungen C'_i dem Syſteme von Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
&y_1 C'_1 + y_2 C'_2 + y_3 C'_3 + \ldots + y_n C'_n = 0\\
&y'_1 C'_1 + y'_2 C'_2 + y'_3 C'_3 + \ldots + y'_n C'_n = 0\\
&y''_1 C'_1 + y''_2 C'_2 + y''_3 C'_3 + \ldots + y''_n C'_n = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_1^{(n-1)} C'_1 + y_2^{(n-1)} C'_2 + y_3^{(n-1)} C'_3 + \ldots + y_n^{(n-1)} C'_n = V
\end{aligned}$$

genügen.

Aus dieſen n Gleichungen ergibt ſich nun der Werth jeder Unbekannten C_i als eine gewiſſe Function $\omega_i x$, und folglich gibt eine einfache Quadratur:

$$C_i = \int \omega_i x \, dx + c_i,$$

wo c_i eine neue willkürliche Conſtante bezeichnet. Man erhält alſo auf dieſe Weiſe durch einfache Quadraturen das allgemeine Integral der Gleichung mit den n willkürlichen Conſtanten, welche es geſtattet.

Wir wollen nun annehmen, daß man nur $n-1$ particuläre Integrale der Gleichung (b) kenne, und der Einfachheit der Darſtellung wegen ſtatt der Gleichungen (a) und (b) die Differenzialgleichungen der vierten Ordnung:

$$y^{IV} + Py''' + Qy'' + Ty' + Uy = V \qquad (14)$$
$$y^{IV} + P''' + Qy'' + Ty' + Uy = 0$$

en, wo y_1, y_2, y_3 drei bekannte Functionen von x bezeichnen, welche der a Gleichung genügen. Soll die Function:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 \qquad (15)$$

Gleichung (14) genügen, ſo kann man zwiſchen den unbekannten Factoren C_2, C_3 noch die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y_1 C'_1 + y_2 C'_2 + y_3 C'_3 &= 0 \\ y'_1 C'_1 + y'_2 C'_2 + y'_3 C'_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

llen, vermöge welcher die Werthe von y', y'' dieſelbe Form behalten, wenn die Factoren C_1, C_2, C_3 conſtant wären; aber die Werthe von y^{IV} enthalten die erſten und zweiten Ableitungen derſelben Factoren, und die Function (15) der Gleichung (14) genügt, müſſen die Factoren C_2, C_3 noch der dritten Bedingungsgleichung:

$$C_1(2y'''_1 + Py''_1) + C'_2(2y'''_2 + Py''_2) + C'_3(2y'''_3 + Py''_3)$$
$$+ C''_1 y''_1 + C''_2 y''_2 + C''_3 y''_3 = V \qquad (17)$$

ige leiſten. Aus den Gleichungen (16) und ihren Differenzialgleichungen man die Werthe von C'_2, C'_3, C''_2, C''_3 als Functionen von C'_1, C''_1 nd ſubſtituirt ſie in die Gleichung (17), welche in Beziehung auf C_1, x der zweiten, oder in Beziehung auf C'_1, x von der erſten Ordnung wird. dieſe Gleichung integrirt, ſo erhält man den Werth von C_1 als Funcvon x, und folglich die von C_2, C_3 vermittelſt einfacher Quadraturen als tionen von x. Durch die vier Integrationen oder Quadraturen ſind vier irliche Conſtanten eingeführt, ſo daß das Integral (15) alle erforderliche meinheit hat.

Verfolgt man ganz denſelben Weg, ſo kann man allgemein darthun, daß ntegration der Gleichung (a) nur von der Integration einer Gleichung $n-m)^{ten}$ Ordnung, und von m auf einander folgenden Quadraturen igt, wenn man m particuläre Integrale der Gleichung (b) kennt.

Drittes Kapitel.

r die Integration der Differenzialgleichungen durch Reihen und durch beſtimmte Integrale.

§. 465. Im Allgemeinen kann man eine Function nach dem Maclauchen Lehrſatze in eine nach den ganzen Potenzen der unabhängigen verlichen Größe geordnete Reihe entwickeln, wenn man zwiſchen der unabgen Veränderlichen und der Function eine Differenzialgleichungen von einer igen Ordnung hat. Denn es ſei:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)})$$

Differenzialgleichung, ſo ergeben ſich daraus durch neue Differenziationen Berthe von $y^{(n+1)}, y^{(n+2)}$ und im Allgemeinen die der Ableitungen von

einer beliebigen höhern, als der n^{ten} Ordnung als Functionen von $x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$. Andererſeits gibt die Maclaurin'ſche Formel:

$$y = y_0 + y'_0 \frac{x}{1} + y''_0 \frac{x^2}{1.2} + y'''_0 \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\ldots + y_0^{(n-1)} \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + y_0^{(n)} \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + y_0^{(n+1)} \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}$$

$+ \text{ꝛc.},$

wo y_0, y'_0, ꝛc. die $x = 0$ entſprechenden Werthe von y, y', ꝛc. bezeichnen. Wenn man alſo in dem aus der gegebenen Differenzialgleichung und ihren ſucceſſiven Ableitungen abgeleiteten Ausdrücken von $y^{(n)}, y^{(n+1)}$, ꝛc., $x = 0$, $y = y_0, y' = y'_0$, ꝛc. ſetzt, ſo kann man alle Coefficienten der Reihe als Functionen der n frühere Coefficienten $y_0, y'_0, y_0^{(n-1)}$ beſtimmen, wo aber die letztere willkürlich bleiben und dem Ausdrucke von y alle Allgemeinheit ertheilen, welche er nur geſtattet. Eine ſolche Reihe kann zur Berechnung der Zahlenwerthe von y für alle Werthe von x, für welche die Reihe convergent wird, dienen.

Nehmen wir z. B. die Differenzialgleichung $y' = -(y + x^3)$, ſo gibt die eben angedeutete Rechnung:

$$y = y_0 - \frac{x}{1} + y_0 \frac{x^2}{1.2} - y_0 \frac{x^3}{1.2.3}$$

$$+ (y_0 - 6) \frac{x^4}{1.2.3.4} - (y_0 - 6) \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{ꝛc.}$$

Die gegebene Differenzialgleichung gehört zu denen, welche ſich unter endlicher Form integriren laſſen, und folglich gehört die vorhergehende Reihe auch zu denjenigen, welche ſummirt werden können. In der That kann man den Ausdruck von y auf die Form:

$$y = (y_0 - 6)\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ 6\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3}\right) = (y_0 - 6)e^{-x} + 6(1 - x) + 3x^2 - x^3,$$

bringen, und dieſer Werth von y ſtimmt mit dem überein, welchen die Gleichung (4) im §. 440 gibt, wenn man für die willkürliche Conſtante $y_0 - 6$ die ebenfalls willkürliche Conſtante C ſetzt.

Betrachten wir noch die Differenzialgleichung:

$$y'' = -xy, \tag{1}$$

ſo iſt die entſprechende Reihenentwickelung:

$$y = y_0 + y'_0 \frac{x}{1} - y_0 \frac{x^3}{1.2.3} - 2y'_0 \frac{x^4}{1.2.3.4}$$

$$+ 4y_0 \frac{x^5}{1.2.3.4.5.6} + 10y'_0 \frac{x^7}{1.2.3\ldots 7} + \text{ꝛc.} \tag{2}$$

§. 466. Wenn die Differenzialcoefficienten von einer beliebigen Ordnung an für den Werth $x = 0$ unendlich würden, ſo müßte man die Reihe nicht mehr nach den Potenzen von x, ſondern nach den Potenzen von $x - a$ ordnen, wo a ein Werth von x iſt, welcher die Differenzialcoefficienten nicht unendlich macht. Man hätte folglich:

$$y = y_a + y'_a \frac{x-a}{1} + y''_a \frac{(x-a)^2}{1.2} + y'''_a \frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}, \qquad (3)$$

o y_a, y'_a, y''_a, ꝛc. die $x = a$ entſprechenden Werthe von y, y', y'', ꝛc. be-
eichnen.

Es ſei z. B.:

$$y' = -\left(\frac{y}{x} + x\right), \text{ oder } xy' + y + x^2 = 0$$

e gegebene Differenzialgleichung, ſo macht der Werth $x = 0$ die Größe y'_0
endlich, wofern y_0 nicht verſchwindet. Alsdann kann die Maclaurin'ſche
eihe, mit Ausnahme dieſes beſondern Falles, nicht unter der gewöhnlichen
rm angewandt werden, und wenn man die angedeutete Transformation da-
t vornimmt, ſo findet man:

$$y = y_a - \frac{y_a + a^2}{a} \cdot \frac{x-a}{1}$$

$$+ \frac{2y_a}{a^2} \cdot \frac{(x-a)^2}{1.2} - \frac{2(3y_a + a^2)}{a^3} \cdot \frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.} \qquad (4)$$

) a einen beliebigen von Null verſchiedenen Werth von x bezeichnet.

Die Differenziation der gegebenen Gleichung gibt:

$xy'' + 2y' + 2x = 0$, $xy''' + 3y'' + 2 = 0$, $xy^{IV} + 4y''' = 0$, ꝛc.,

raus in der Vorausſetzung, daß zugleich $x = 0$, $y = 0$ iſt, indem keine
r abgeleiteten Functionen unendlich wird, folgt:

$$y'_0 = 0, \quad y''_0 = -\tfrac{2}{3}, \quad y'''_0 = 0, \quad y^{IV}_0 = 0, \text{ ꝛc.}$$

ſt alſo $y = -\frac{1}{3}x^2$ ein der Vorausſetzung $y_0 = 0$ entſprechendes parti-
läres Integral der gegebenen Differenzialgleichung. In der That iſt nach
440 das Integral dieſer Gleichung unter endlicher Form:

$$y = \frac{C}{x} - \frac{1}{3}x^2$$

b dieſer Werth von y, welcher ſich nicht nach den Potenzen von x ent-
ckeln läßt, ſo lange die Conſtante C nicht Null iſt, gibt die Reihe (4)
eder, wenn man ſie nach den ganzen Potenzen von $x - a$ entwickelt, wo-
n man, wie es geſtattet iſt, $C = a\,y_a + \frac{1}{3}a^3$ ſetzt.

§. 467. Es ſei ferner die Differenzialgleichung:

$$y'' = -\frac{y}{x}, \text{ oder } xy'' + y = 0 \qquad (5)$$

geben, ſo macht der Werth $x = 0$ die Größe y''_0 unendlich, wofern y_0
ht verſchwindet. Man muß alſo die Reihe (3) anwenden, welche ſich in:

$$= y_a + y'_a \cdot \frac{x-a}{1} - \frac{y_a}{a} \cdot \frac{(x-a)^2}{1.2} + \frac{y_a - ay'_a}{a^2} \cdot \frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.} \qquad (6)$$

rwandelt, und von zwei willkürlichen Conſtanten y_a, y'_a abhängt.

Die ſucceſſiven Ableitungen der gegebenen Gleichung ſind:

$$xy''' + y'' - y' = 0, \quad xy^{IV} + 2y''' + y'' = 0$$
$$xy^{V} + 3y^{IV} + y''' = 0, \text{ ꝛc.,}$$

daß in der Vorausſetzung, daß y für $x = 0$ verſchwindet, und keine der
leitungen y', y'', y''' für dieſen Werth von x unendlich wird:

$$y''_0 = -y'_0, \quad y'''_0 = \frac{y'_0}{1.2}, \quad y^{IV}_0 = -\frac{y'_0}{1.2.3}, \text{ ꝛc.}$$

und folglich:

$$y = y'_0\left(x - \frac{1}{1}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}\right) \quad (7)$$

iſt. Aber da dieſe Entwickelung nur von der willkürlichen Conſtanten y'_0 abhängt, ſo drückt ſie nur ein particuläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung aus, welches der Vorausſetzung $y_0 = 0$ entſpricht.

Wir wollen durch y_1 die Function von x bezeichnen, welche die convergente Reihe:

$$x - \frac{1}{1}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}$$

beſtimmt, ſo kann man das allgemeine Integral der Gleichung (5), welche in Beziehung auf $y = C_1 y_1$ linear iſt, wofern man C_1 nicht mehr als eine Conſtante, ſondern als eine Function von x betrachtet, welche man nach dem Verfahren im §. 464 beſtimmen muß, erhalten. Auf dieſe Weiſe ergibt ſich:

$$y_1 C''_1 + 2C'_1 y'_1 = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{C'_1}\cdot\frac{dC'_1}{dx} + \frac{2}{y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx} = 0,$$

woraus durch zwei ſucceſſive Integrationen folgt:

$$C'_1 = \frac{c_1}{y_1^2}, \quad C_1 = c_1\int\frac{dx}{y_1^2} + c_2,$$

wo c_1, c_2 zwei willkürliche Conſtanten bezeichnen. Das allgemeine Integral der Gleichung (5) wird alſo außer der Reihe (6) auch durch:

$$y = y_1\left(c_1\int\frac{dx}{y_1^2} + c_2\right), \quad \text{oder} \quad y = c_1 y_1\left(\int\frac{dx}{y_1^2} + c_2\right)$$

ausgedrückt.

§. 468. Die durch eine Differenzialgleichung beſtimmte Function kann oft in eine nach den negativen oder gebrochenen Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortſchreitende Reihe entwickelt werden. Wenn ſolche Entwickelungen möglich ſind, ſo erhält man ſie durch die Methode der unbeſtimmten Coefficienten, deren Anwendung faſt immer vor der directen Anwendung der Maclaurin'ſchen Reihe den Vorzug verdient, ſelbſt, wenn die Entwickelung nach den ganzen und poſitiven Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortſchreiten kann, wie das folgende Beiſpiel zeigen wird.

Wir wollen die Differenzialgleichung:

$$y'' = kx^n y \quad (8)$$

nehmen, welche die Gleichungen (1) und (5) als beſondere Fälle unter ſich begreift, ſo kommt es darauf an, zu wiſſen, ob man das Integral derſelben durch die Reihe:

$$y = Ax^\alpha + A_1 x^{\alpha_1} + A_2 x^{\alpha_2} + A_3 x^{\alpha_3} + \text{ꝛc.}$$

darſtellen kann, wenn man die Coefficienten A_i und die Exponenten α_i, welche poſitiv oder negativ, ganz oder gebrochen ſein können, gehörig beſtimmt.

Die Subſtitution dieſes Werthes von y in die gegebene Differenzialgleichung gibt:

$$Aa(\alpha-1)x^{\alpha-2}+A_1\alpha_1(\alpha_1-1)x^{\alpha_1-2}+A_2\alpha_2(\alpha_2-1)x^{\alpha_2-2}+\text{ꝛc.}$$
$$=kAx^{\alpha+n}+kA_1x^{\alpha_1+n}+kA_2x^{\alpha_2+n}+\text{ꝛc.}$$

Dieſe Gleichung kann aber nur dann identiſch ſein, wenn die Gleichungen:

$$\alpha(\alpha-1)=0 \qquad (9)$$
$$\alpha_i=\alpha+i(n+2)$$
$$A_i\alpha_i(\alpha_i-1)=kA_{i-1}$$

ſtattfinden, vermittelſt welcher alle Exponenten α_i numeriſch beſtimmt ſind, und alle Coefficienten A_i ſich als Functionen des Coefficienten A, welcher die Stelle der willkürlichen Conſtante vertritt, ausdrücken laſſen.

Der Gleichung (9) kann man auf zwei Arten genügen, indem man $\alpha=0$, oder $\alpha=1$ ſetzt. Dieſen beiden Auflöſungen entſprechen zwei verſchiedene Reihen, wovon jede einen willkürlichen Coefficienten enthält, und welche beide der Gleichung (8), wovon ſie particuläre Integrale ſind, Genüge leiſten. Die Summe beider Reihen gibt folglich das allgemeine Integral (§. 455) und wenn man durch C_0, C_1 reſp. die $\alpha=0$, $\alpha=1$ entſprechenden Werthe des Coefficienten A bezeichnet; ſo findet man für das vollſtändige Integral leicht folgenden Reihenausdruck:

$$y=C_0[1+\frac{kx^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{k^2x^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)}+\text{ꝛc.}]$$
$$+C_1x[1+\frac{kx^{n+2}}{(n+2)(n+3)}+\frac{k^2x^{2n+4}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)}+\text{ꝛc.}].$$

So oft der Exponent n eine ganze poſitive Zahl iſt, ſchreitet dieſe Reihe nach den ganzen und poſitiven Potenzen von x fort und ſtimmt nothwendig mit der überein, welche ſich aus der Maclaurin'ſchen Formel ergeben würde, und die Conſtanten C_0, C_1 drücken alsdann die Werthe von y_0, y'_0 aus. Setzt man insbeſondere $k=-1$, $n=1$, ſo kommt man wieder auf die Reihe (2), und dieſe letzte Ableitung derſelben hat den Vortheil, das Bildungsgeſetz der ſucceſſiven Coefficienten deutlich vor Augen zu legen.

Wenn in der Reihe weniger Coefficienten unbeſtimmt bleiben, als der Ordnungse.ponent der Differenzialgleichung Einheiten hat, ſo drückt die Reihe nur ein particuläres Integral aus, und dieſes iſt ein Beweis, daß ſich die Function nur in eine Reihe von dieſer Form entwickeln läßt, wenn die willkürlichen Conſtanten Bedingungen genügen müſſen, welche die Anzahl derſelben vermindern, und die Allgemeinheit der gegebenen Differenzialgleichung beſchränken.

Wenn man z. B. in der Gleichung (8), $k=-1$, $n=-1$ ſetzte, ſo daß ſie mit der Gleichung (5) übereinſtimmte; ſo würden die verſchiedenen Glieder der Reihe, womit C_0 multiplicirt iſt, von dem zweiten an unendlich Dieſe Reihe muß alſo verworfen werden, weil ſie kein particuläres Integral der Gleichung (8) mehr ausdrückt, und wobei wohl zu bemerken iſt, daß die Reihe, womit C_1 multiplicirt iſt, alsdann mit der übereinſtimmt, womit y'_0 in der Gleichung (7) multiplicirt iſt.

§. 469. Nach dem im §. 461 Geſagten ſinkt die Gleichung (8) zur erſten Ordnung herab, indem ſie aber aufhört, eine lineare Differenzialgleichung zu ſein, wenn man $y=e^{\int z dx}$ ſetzt, ſo daß man für die transformirte Gleichung mit z

$$\frac{dz}{dx} + z^2 = kx^n$$

hat.

Umgekehrt, wenn die Differenzialgleichung der ersten Ordnung:

$$y' + ay^2 = bx^n \qquad (10)$$

gegeben ist, welche die Riccati'sche Gleichung genannt wird, und der Gegenstand vieler Untersuchungen gewesen ist, so kann man die Integration derselben auf die der Gleichung (8), welche wegen ihrer binomischen und linearen Form einfacher ist, zurückführen, wenn man

$$y = \frac{1}{au} \cdot \frac{du}{dx}$$

setzt, so daß man für die transformirte Gleichung mit u

$$\frac{d^2u}{dx^2} = abux^n$$

erhält, welche mit der Gleichung (8) identisch ist, wenn man y für u und k für ab setzt. Die Gleichung (8) wird auch auf die Form:

$$y'' + \frac{g}{x} y' = hy \qquad (11)$$

zurückgeführt, wenn man die unabhängige Veränderliche vertauscht, und $x^{\frac{n}{2}+1} = t$ setzt; denn auf diese Weise findet man:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{n}{n+2} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{ky}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}, \qquad (12)$$

und um die Gleichungen (11) und (12) übereinstimmend zu machen, braucht man nur t mit x zu vertauschen und

$$g = \frac{n}{n+2}, \quad h = \frac{k}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}$$

zu nehmen.

Endlich kommt die Gleichung:

$$y'' - \frac{m(m-1)}{x^2} y = hy \qquad (13)$$

auch auf die Gleichungen (8), (10) und (11) zurück, weil man blos $y = x^m u$ zu setzen braucht, um sie in:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2m}{x} \cdot \frac{du}{dx} = hu$$

zu verwandeln. Die Gleichungen (11) und (13) kommen in den Problemen der mathematischen Physik vor, und in dieser Beziehung bieten sie mehr Interesse dar, als die Gleichungen (8) und (10).

§. 470. Wenn wir die zu der Reihenentwickelung des Integrales der Gleichung (8) angewandte Methode direct auf die Gleichung (13) angewandt hätten, so hätten wir die Gleichung:

$$A[\alpha(\alpha-1)-m(m-1)]x^{\alpha-2}+A_1[\alpha_1(\alpha_1-1)-m(m-1)]x^{\alpha_1-2}$$
$$+A_2[\alpha_2(\alpha_2-1)-m(m-1)]x^{\alpha_2-2}+\text{ꝛc.}$$
$$=hAx^{\alpha}+hA_1x^{\alpha_1}+hA_2x^{\alpha_2}+\text{ꝛc.}$$

dentiſch zu machen, oder die Bedingungsgleichungen

$$\alpha(\alpha-1)-m(m-1)=0 \qquad (14)$$
$$\alpha_i=\alpha+2i$$
$$A_i[\alpha_i(\alpha_i-1)-m(m-1)]=hA_{i-1}$$

n erfüllen gehabt. Die dritte dieſer Bedingungsgleichungen verwandelt ſich, enn man für α_i ſeinen aus der zweiten abgeleiteten Werth ſetzt, in:

$$A_i[\alpha(\alpha-1)+2i(2i+2\alpha-1)-m(m-1)]=hA_{i-1},$$

der vermöge der erſten Bedingungsgleichung einfacher in:

$$2i(2i+2\alpha-1)A_i=hA_{i-1}. \qquad (15)$$

Die Wurzeln der Gleichung (14) ſind $\alpha=m$, $\alpha=1-m$, und man erhält olglich für den Werth des vollſtändigen Integrales den Reihenausdruck:

$$y=C_0x^m\left[1+\frac{hx^2}{2(2m+1)}+\frac{h^2x^4}{2.4.(2m+1)(2m+3)}+\text{ꝛc.}\right]$$
$$+C_1x^{1-m}\left[1+\frac{hx^2}{2(3-2m)}+\frac{h^2x^4}{2.4.(3-2m)(5-2m)}+\text{ꝛc.}\right].$$

§. 471. Die eben erhaltenen Reihen haben das Bemerkenswerthe, daß e ſummirt und durch beſtimmte Integrale von der Art, wie wir ſie in den rei letzten Kapiteln des vorhergehenden Buches betrachtet haben, erſetzt wer- en können. In der That erhält man, wenn man in der Formel (ν) im . 309, $x=\omega$, $\mu=2\alpha-1$, und $\nu=2i$ ſetzt:

$$\int\cos.^{2i}\omega\sin.^{2\alpha-1}\omega d\omega=\frac{\cos.^{2i}\omega\sin.^{2\alpha}\omega}{2i+2\alpha-1}$$
$$+\frac{2i-1}{2i+2\alpha-1}\int\cos.^{2i-2}\omega\sin.^{2\alpha-1}\omega d\omega$$

ch wenn man $0, \pi$ für die Grenzen der Integrale nimmt, ſo verſchwindet s Glied außerhalb des Zeichens $\int$ jedesmal, wenn α eine poſitive reelle röße, oder eine imaginäre Größe mit einem reellen poſitiven Beſtandtheile t, ſo daß man hat:

$$\int_0^{\pi}\cos.^{2i}\omega\sin.^{2\alpha-1}\omega d\omega$$
$$=\frac{2i-1}{2i+2\alpha-1}\int_0^{\pi}\cos.^{2i-2}\omega\sin.^{2\alpha-1}\omega d\omega. \qquad (16)$$

ermöge dieſer letzten Relation wird der Gleichung (15) genügt, wenn man

$$A_i=\frac{Ah^i}{1.2.3\ldots(2i-1)2i}\int_0^{\pi}\cos.^{2i}\omega\sin.^{2\alpha-1}\omega d\omega$$

ßt, und man kann folglich das erhaltene Integral auf die Form:

$$y = C_0 x^m \int_0^\pi (1 + \frac{hx^2}{1.2} \cos.^2\omega + \frac{h^2x^4}{1.2.3.4} \cos.^4\omega + \text{ꝛc.}) \sin.^{2m-1}\omega d$$

$$+ C_1 x^{1-m} \int_0^\pi (1 + \frac{hx^2}{1.2} \cos.^2\omega + \frac{h^2x^4}{1.2.3.4} \cos.^4\omega + \text{ꝛc.}) \sin.^{1-2m}\omega d$$

bringen, wenn man der Größe α ſucceſſive die Werthe m und $1 - m$, welche die Wurzeln der Gleichung (14) ſind, beilegt.

Nun iſt aber:

$$1 + \frac{hx^2}{1.2} \cos.^2\omega + \frac{h^2x^4}{1.2.3.4} \cos.^4\omega + \frac{h^3x^6}{1.2.3.4.5.6} \cos.^6\omega + \text{ꝛc.}$$

$$= \cos.(\sqrt{-1} \cdot x\sqrt{h} \cdot \cos.\omega) = \tfrac{1}{2} e^{x\sqrt{h}.\cos.\omega} + \tfrac{1}{2} e^{-x\sqrt{h}.\cos.\omega}$$

folglich:

$$y = C_0 x^m \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} e^{x\sqrt{h}.\cos.\omega} + \frac{1}{2} e^{-x\sqrt{h}.\cos.\omega}\right) \sin.^{2m-1}\omega d\omega$$

$$+ C_1 x^{1-m} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} e^{x\sqrt{h}.\cos.\omega} + \frac{1}{2} e^{-x\sqrt{h}.\cos.\omega}\right) \sin.^{1-2m}\omega d\omega.$$

Dieſer Ausdruck läßt ſich noch vereinfachen, denn wegen der Wahl der Grenzen, und wegen der Natur der Functionen $\sin.\omega$, $\cos.\omega$ hat man:

$$\int_0^\pi e^{-\mu\cos.\omega} \sin.^\nu\omega d\omega = \int_0^\pi e^{\mu\cos.\omega} \sin.^\nu\omega d\omega$$

folglich:

$$y = C_0 x^m \int_0^\pi e^{x\sqrt{h}.\cos.\omega} \sin.^{2m-1}\omega d\omega$$

$$+ C_1 x^{1-m} \int_0^\pi e^{x\sqrt{h}.\cos.\omega} \sin.^{1-2m}\omega d\omega. \qquad (17)$$

Die Gleichung (16) findet nur unter der Bedingung ſtatt, daß α eine reelle poſitive Größe, oder eine imaginäre Größe mit einem reellen poſitiven Beſtandtheile bezeichnet, und folglich findet die Gleichung (17), um nur den Fall reeller Werthe zu betrachten, nur unter der Bedingung ſtatt, daß m und $1 - m$ poſitive Zahlen bezeichnen, oder daß die Größe m zwiſchen den Grenzen 0, 1 liegt. Unter dieſer Beſchränkung gibt die Gleichung (17) das vollſtändige Integral der Gleichung (13), durch beſtimmte Integrale ausgedrückt.

An den Grenzen $m = 0$, $m = 1$ reducirt ſich die Gleichung (13) auf $y'' = hy$, und in dieſem Falle iſt ihr vollſtändiges Integral bekanntlich:

$$y = C_0 e^{x\sqrt{h}} + C_1 e^{-x\sqrt{h}}.$$

Wenn man in der Formel (17), $m = \frac{1}{2}$ ſetzt, ſo gibt ſie:

$$y = (C_0 + C_1)\sqrt{x} \int_0^\pi e^{x\sqrt{h}.\cos.\omega} d\omega,$$

und da die beiden willkürlichen Conſtanten C_0, C_1 in eine einzige zuſammenfallen, ſo hat man nur noch ein particuläres Integral. Jedoch erhält man ſelbſt in dieſem Falle das vollſtändige Integral durch einen bereits im §. 46 angewandten Rechnungskunſtgriff. Wir wollen in dem Gliede, womit C_0 multiplicirt iſt, $m = \frac{1}{2}$, und in dem Gliede, womit C_1 multiplicirt iſt, $m = \frac{1}{2} + \varepsilon$ ſetzen; ſo kommt:

$$y = C_0 \sqrt{x} \int_0^{\pi} e^{x\sqrt{h}\,.\cos.\omega} d\omega$$

$$+ C_1 \sqrt{x} \int_0^{\pi} e^{x\sqrt{h}\,.\cos.\omega} (x \sin.^2 \omega)^{-\varepsilon} d\omega. \qquad (18)$$

un iſt aber:

$$u^{-\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1} \log. u + \frac{\varepsilon^2}{1.2} (\log. u)^2 - \frac{\varepsilon^3}{1.2.3} (\log. u)^3 + \text{ꝛc.},$$

daß, wenn man den Ausdruck (18) nach den Potenzen von ε entwickelt nd $C_0 + C_1 = A$, $C_1 \varepsilon = -B$ ſetzt, kommt:

$$y = A\sqrt{x} \int_0^{\pi} e^{x\sqrt{h}.\cos.\omega} d\omega$$

$$+ B\sqrt{x} \int_0^{\pi} e^{x\sqrt{h}.\cos.\omega} \log. (x \sin.^2 \omega) d\omega + \varepsilon BX,$$

o X eine Größe bezeichnet, welche einen endlichen Werth behält, wenn ε erſchwindet. Wenn man nun $\varepsilon = 0$ ſetzt, ſo erhält man:

$$y = A\sqrt{x} \int_0^{\pi} e^{x\sqrt{h}.\cos.\omega} d\omega$$

$$+ B\sqrt{x} \int_0^{\pi} e^{x\sqrt{h}.\cos.\omega} \log. (x \sin.^2 \omega) d\omega$$

ir das vollſtändige Integral der Gleichung (13), welche ſich in dieſem alle in:

$$y'' + \frac{y}{4x^2} = hy$$

rwandelt.

§. 472. Wenn m einen größern poſitiven Werth hat, als die Einheit, muß das Glied mit dem Coefficienten C_1 in der Gleichung (17) hinweg-laſſen werden, wogegen man nur dieſes Glied beibehalten muß, wenn m nen negativen Werth hat. In dem einen wie in dem andern Falle erhält an alſo unmittelbar unter endlicher Form nur ein particuläres Integral der leichung (13). Es ſei y_1 dieſes particuläre Integral, worin die willkürliche onſtante der Einfachheit wegen der Einheit gleich geſetzt iſt; ſo findet man rch eine ähnliche Rechnung, wie die im §. 467, daß das allgemeine Inte-al durch:

$$y = c_1 y_1 \left(\int \frac{dx}{y_1^2} + c_2 \right) \qquad (19)$$

sgedrückt wird.

Wenn man $\cos. \omega = \zeta$ ſetzt, ſo wird die Gleichung (17) auf die Form:

$$y = C_0 x^m \int_{-1}^{+1} e^{x\sqrt{h}.\zeta} (1-\zeta^2)^{m-1} d\zeta$$

$$+ C_1 x^{1-m} \int_{-1}^{+1} e^{x\sqrt{h}.\zeta} (1-\zeta^2)^{-m} d\zeta$$

bracht, und das particuläre Integral der Gleichung (13) wird für $m > 1$ sgedrückt durch:

$$y = C_0 x^m \int_{-1}^{+1} e^{x\sqrt{h}\cdot\zeta} (1-\zeta^2)^{m-1} d\zeta \qquad (20)$$

und für $m < 0$ durch:

$$y = C_1 x^{1-m} \int_{-1}^{+1} e^{x\sqrt{h}\cdot\zeta} (1-\zeta^2)^{-m} d\zeta. \qquad (21)$$

Nach §. 313 ist einleuchtend, daß sich die in der Formel (20) angedeutete bestimmte Integration verrichten läßt, wenn m eine ganze positive Zahl bezeichnet, und daß dasselbe mit der in der Formel (21) angedeuteten Integration der Fall ist, wenn m eine ganze negative Zahl bezeichnet. So oft also m eine ganze positive, oder negative Zahl bezeichnet, hat man unter endlicher Form ein von dem Zeichen $\int$ befreites particuläres Integral der Gleichung (13) und nach der Formel (19) wird die Bestimmung des allgemeinen Integrales derselben Gleichung auf die Quadraturen zurückgeführt.

§. 473. Erinnern wir nun, daß die Riccati'sche Differenzialgleichung:

$$y' + ay^2 = bx^n, \qquad (10)$$

wenn man:

$$y = \frac{1}{au}\cdot\frac{du}{dx}, \quad ab = k,$$

setzt, sich in die Gleichung:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = kux^n$$

verwandelt, welche ihrerseits übergeht in:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2m}{t}\cdot\frac{du}{dt} = hu,$$

und endlich in:

$$\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{m(m-1)}{t^2}v = hv, \qquad (22)$$

wenn man

$$x^{\frac{n}{2}+1} = t, \quad m = \frac{n}{2(n+2)}, \quad h = \frac{k}{\frac{n}{2}+1}, \quad v = t^m u$$

setzt. Es sei $m = \pm i$, wo i eine ganze positive Zahl bezeichnet, so ergibt sich aus der zweiten der vorhergehenden Gleichungen:

$$n = \frac{-4i}{2i \mp 1}. \qquad (23)$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (22) läßt sich jedesmal auf die Quadraturen zurückführen, wenn m eine ganze positive Zahl ist, und folglich wird das allgemeine Integral der Riccati'schen Differenzialgleichung auch für alle in der Formel (23) enthaltenen Werthe von n auf die Quadraturen zurückgeführt, was man auch fände, wenn man untersuchte, in welchen Fällen sich die Veränderlichen in der Riccati'schen Differenzialgleichung trennen lassen.

Viertes Kapitel.

ieorie der singulären Integrale der Differenzialgleichungen mit zwei Veränderlichen.

I. Singuläre Integrale der Differenzialgleichungen der ersten Ordnung.

§. 474. Es sei:

$$f(x, y, y') = 0 \qquad (f)$$

ie Differenzialgleichung der ersten Ordnung, deren vollständiges Integral n der Form:

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (a)$$

, wo a eine durch die Integration eingeführte willkürliche Constante ist; so tet nach dem Vorhergehenden (Buch 4 Kap. 2) die Gleichung:

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad (\varphi)$$

lche sich aus der Elimination von a zwischen dem Integrale (a) und einer Gleichungen:

$$\frac{dF}{da} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = \infty \qquad (a')$$

ibt, auch der Gleichung (f), wovon sie ein singuläres Integral ist, Genüge, fern sie nicht mit einem particulären Integrale zusammenfällt, indem sich der einer der Gleichungen (a') abgeleitete Werth von a auf eine Constante, r auf eine Function von x, y reducirt, welche sich vermöge der Gleichung) selbst auf eine Constante reducirt. Ferner gehört bekanntlich die Gleiung (φ) einer Linie an, welche alle die Linien berührt oder umschließt, en System durch das allgemeine Integral (a) ausgedrückt wird, so lange Parameter a unbestimmt bleibt.

Hieraus ergibt sich eine sehr einfache Regel zur Bestimmung der singun Integrale einer Differenzialgleichung der ersten Ordnung, deren allgenes Integral vorher bestimmt ist. Wir behaupten ferner, daß diese singären Integrale angegeben werden können, ohne daß man das allgemeine egral zu kennen braucht, und selbst dann, wenn man für das allgemeine egral keinen analytischen Ausdruck unter endlicher Form würde angeben nen, was gewöhnlich der Fall ist.

In der That kann die Umschließungslinie, welche das singuläre Integral stellt, nur existiren, wenn zwischen den Linien, welche particuläre Integrale llen, und welche verschiedenen Werthen der willkürlichen Constante entchen, Durchschnitte stattfinden. Folglich muß für die diesen Durchschnittsten entsprechenden Werthe von x, y der aus der Gleichung (f) abgeleitete durch x, y ausgedrückte Werth von y' ein vielfacher sein, d. h., diese als braisch vorausgesetzte Gleichung muß nach Fortschaffung der Wurzelgrößen Beziehung auf y' vom zweiten oder von einem höhern Grade sein.

Hieraus folgt, daß im Allgemeinen die den Werthen von x, y, welche y' t imaginär machen, entsprechenden Durchschnittspunkte wenigstens Durchittspunkte von zweien der Linien, welche die particulären Integrale darn, sind.

Aber für die auf der Umſchließungs- oder Berührungscurve aller dieſer Curven liegenden Punkte findet kein Durchſchnitt mehr ſtatt, oder es verſchwindet wenigſtens ein Durchſchnitt, und folglich muß die Gleichung (f), worin man y' als Unbekannte betrachtet, vielfache Wurzeln bekommen, ſo daß die Bedingung:

$$\frac{df}{dy'} = 0 \qquad (f')$$

erfüllt wird. Die Gleichung (f') beſtimmt alſo umgekehrt die zwiſchen x und y ſtattfindende Relation, welche die Berührungslinie oder das ſinguläre Integral charakteriſirt.

Wir wollen z. B. die Differenzialgleichung:

$$y'^2(x^2 - r^2) - 2xyy' = x^2 \qquad (1)$$

nehmen, deren allgemeines Integral:

$$x^2 - 2ay = r^2 + a^2 \qquad (2)$$

iſt, wo a eine willkürliche Conſtante bezeichnet.

Die erſte der Gleichungen (a') gibt in dieſem Falle $a = -y$, und wenn man dieſen Werth von a in die Gleichung (2) ſubſtituirt, ſo erhält man das ſinguläre Integral $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Nun gibt aber die Gleichung (f') ohne daß man das Integral (2) zu kennen braucht, die Relation:

$$y' = -\frac{xy}{r^2 - x^2},$$

und wenn dieſer Werth von y' in die Gleichung (1) ſubſtituirt wird, ſo erhält man das zuerſt aus dem allgemeinen Integrale abgeleitete ſinguläre Integral wieder.

§. 475. Der Erfolg dieſer Methode hängt davon ab, daß die Differenzialgleichung ſo vorbereitet iſt, daß ſie keine Wurzelgrößen mehr enthält. Wenn ſie dagegen in Beziehung auf y' aufgelöſ't oder auf die Form $y' = f(x,y)$ gebracht wäre, ſo würde die Methode nicht mehr anwendbar ſein. Allein es iſt zu bemerken, daß man, wenn man die Gleichung (f) in Beziehung auf y' und in Beziehung auf x differenzirt, indem man y' als eine durch dieſe Gleichung implicite beſtimmte Function von x,y betrachtet,

$$\frac{dy'}{dy} = -\frac{df}{dy} : \frac{df}{dy'}, \qquad \frac{dy'}{dx} = -\frac{df}{dx} : \frac{df}{dy'}$$

hat. Nun macht aber der dem ſingulären Integrale entſprechende, durch y ausgedrückte Werth von y die Größe $\frac{df}{dy'}$ verſchwinden, und folglich muß derſelbe Werth die Differenzialcoefficienten $\frac{dy'}{dy}$, $\frac{dy'}{dx}$, nachdem für y' ſein aus der Gleichung (f) abgeleiteter und durch x,y ausgedrückter Werth ſubſtituirt iſt, unendlich machen. Wenn man alſo aus den Gleichungen:

$$\frac{df(x,y)}{dy} = \infty, \qquad \frac{df(x,y)}{dx} = \infty$$

einen durch x ausgedrückten Werth von y ableiten kann, welcher auch der Gleichung (f) Genüge leiſtet, ſo gibt dieſer Werth das ſinguläre Integral wieder.

So gibt z. B. die in Beziehung auf y' aufgelöſ'te Gleichung (1):

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2 - r^2}(y \pm \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}),$$

folglich:

$$\frac{df(x,y)}{dy} = \frac{x}{x^2 - r^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2} + y}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}},$$

$$\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{-(x^2 + r^2)y\sqrt{x^2 + y^2 - r^2} \mp r^2(x^2 + y^2 - r^2) \mp x^2y^2}{(x^2 - r^2)^2\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}},$$

und dieſe Werthe werden unendlich, wenn man $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ ſetzt, wodurch der Gleichung (1) genügt wird, von welcher man alſo ein ſinguläres Integral erhält.

§. 476. Wenn man die Gleichnng (f) differenzirt, indem man y, y' als unentwickelte Functionen von x betrachtet, ſo erhält man:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y' + \frac{df}{dy'}y'' = 0, \qquad (f'')$$

folglich:

$$y'' = -\left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y'\right) : \frac{df}{dy'}. \qquad (c)$$

Aber der Werth von y als Function von x, welcher das ſinguläre Integral gibt, macht $\frac{df}{dy'} = 0$, und reducirt die Gleichung (f'') auf:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y' = 0.$$

Derſelbe durch x ausgedrückte Werth von y bewirkt alſo, daß der durch die Gleichung (c) gegebene Werth:

$$y'' = \frac{\varphi(x,y,y')}{\psi(x,y,y')}$$

unter der Form $\frac{0}{0}$ erſcheint, welches noch ein anderes Verfahren zur Beſtimmung der ſingulären Integrale an die Hand gibt. Denn wenn man

$$\varphi(x,y,y') = 0, \quad \psi(x,y,y') = 0$$

ſetzt, und dann ſucceſſive y' zwiſchen jeder dieſer beiden Gleichungen und der gegebenen Gleichung (f) eliminirt, und die beiden reſultirenden Gleichungen haben einen gemeinſchaftlichen Factor; ſo gibt dieſer Factor das geſuchte ſinguläre Integral.

Verfährt man auf dieſe Weiſe mit der Gleichung (1), ſo findet man:

$$y'' = \frac{yy' + x}{y'(x^2 - r^2) - xy},$$

und wenn man y' zwiſchen der gegebenen Gleichung und jeder der Gleichungen:

$$yy' + x = 0, \quad y'(x^2 - r^2) - xy = 0$$

eliminirt; ſo erhält man die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2-r^2)=0, \quad \frac{x^2}{x^2-r^2}(x^2+y^2-r^2)=0,$$

welche offenbar den gemeinſchaftlichen Factor $x^2+y^2-r^2$ haben.

§. 477. Es iſt wohl zu bemerken, daß die geometriſche Betrachtung, worauf wir uns in den drei vorhergehenden §§. geſtützt haben, auf alle Berührungslinien der Curven, welche durch das allgemeine Integral gegeben werden, ſowie auf die, welche die particulären und ſingulären Integrale darſtellen können, anwendbar iſt. Nachdem man alſo durch eins der vorhin angegebenen Verfahren die ſingulären Integrale beſtimmt hat, müßte man ſich alſo noch überzeugen, daß man ſie nicht auf das allgemeine Integral zurückführen kann, indem man die Conſtante gehörig particulariſirt, welche Prüfung aber ſo lange unmöglich iſt, als das allgemeine Integral nicht gegeben iſt. Der unterſcheidende Charakter der ſingulären Integrale muß alſo aus analytiſchen Betrachtungen abgeleitet werden, und zu dem Zwecke müſſen wir die Unterſuchung aus einem neuen Geſichtspunkte betrachten.

Betrachten wir eine Differenzialgleichung der erſten Ordnung von der Form:

$$y'-f(x,y)=0, \tag{d}$$

welcher die Gleichung $y=X$ genügt, wo X eine gewiſſe Function von x ohne willkürliche Conſtante bezeichnet, ſo daß identiſch:

$$\frac{dX}{dx}-f(x,X)=0 \tag{e}$$

iſt. Soll die Gleichung $y=X$ mit einem particulären Integrale übereinſtimmen, ſo muß das allgemeine Integral auf die Form:

$$y=X+\varepsilon\varphi \tag{g}$$

gebracht werden können, wo ε eine willkürliche Conſtante ſelbſt, φ eine Function von x und ε bezeichnet, welche für $\varepsilon=0$ weder verſchwindet, noch unendlich wird. Zu gleicher Zeit hat man:

$$f(x,y)=f(x,X)+(\varepsilon\varphi)^k\cdot\omega, \tag{h}$$

wo k den Exponenten der höchſten Potenz von ε, welche ein Factor von

$$f(x,X+\varepsilon\varphi)-f(x,X)$$

iſt, und ω eine Function von x und $\varepsilon\varphi$ bezeichnet, welche für $\varepsilon=0$ weder Null, noch unendlich wird.

Wir wollen

$$\varphi=\varphi_0+\varepsilon^{\alpha_1}\varphi_1+\varepsilon^{\alpha_2}\varphi_2+\text{ꝛc.}$$

$$\omega=\omega_0+(\varepsilon\varphi)^{\beta_1}\omega_1+(\varepsilon\varphi)^{\beta_2}\omega_2+\text{ꝛc.}$$

ſetzen, wo φ_i, ω_i Functionen von x, und α_i, β_i poſitive Exponenten bezeichnen, welche eine zunehmende Reihe bilden. Da die Function f gegeben iſt, ſo iſt die Entwickelung von $f(x,X+\varepsilon\varphi)$ nach den Potenzen von $\varepsilon\varphi$ bekannt, und folglich werden die Function ω_i, ſowie die Zahlen β_i als bekannt angeſehen, und es kommt darauf an, die Functionen φ_i und die Exponenten α_i ſo zu beſtimmen, daß der Gleichung (h) unabhängig von ε Genüge geſchieht.

Nun gibt aber die Subſtitution, nachdem man die Glieder, welche ſich vermöge der Gleichung (e) gegenſeitig aufheben, hinweggelaſſen hat:

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon\frac{d\varphi_0}{dx}+(\alpha_1+1)\varepsilon^{\alpha_1}\frac{d\varphi_1}{dx}+(\alpha_2+1)\varepsilon^{\alpha_2}\frac{d\varphi_2}{dx}+\text{ꝛc.}\\&=\varepsilon^k(\varphi_0+\varepsilon^{\alpha_1}\varphi_1+\varepsilon^{\alpha_2}\varphi_2+\text{ꝛc.})^k\omega_0\\&+\varepsilon^{k+\beta_1}(\varphi_0+\varepsilon^{\alpha_1}\varphi_1+\varepsilon^{\alpha_2}\varphi_2+\text{ꝛc.})^{k+\beta_1}\omega_1+\text{ꝛc.}\end{aligned}\right\}\quad(\alpha)$$

Setzt man $k=1$, so hat man zur Bestimmung von φ_0 die Gleichung:

$$\frac{d\varphi_0}{dx}=\varphi_0\,\omega_0,\quad\text{woraus folgt:}\quad\varphi_0=e^{\int\omega_0 dx},$$

worauf man

$$\alpha_1=\beta_1+1,\quad(\beta_2+2)\frac{d\varphi_1}{dx}=\varphi^{\beta_1+1}\omega_1$$

setzen muß, und wenn man so fortfährt, so bestimmt man allmälig alle in der Entwickelung von φ vorkommenden Größen, d. h. man entwickelt das allgemeine Integral in eine nach den Potenzen von ε geordnete Reihe.

Wenn $k>1$ ist, so kann man die Gleichung α nur noch identisch machen, wenn man zuvörderst:

$$\frac{d\varphi_0}{dx}=0,\quad\text{oder}\quad\varphi=\text{const.}$$

setzt.

Der Einfachheit wegen wollen wir diese Constante $=1$ setzen, und dann:

$$\alpha_1=k,\quad(\alpha_1+1)\frac{d\varphi_1}{dx}=\omega_0,\quad\text{folglich}\quad\varphi_1=\frac{1}{k+1}\int\omega_0 dx,$$

und wenn man dieselbe Rechnung weiter fortsetzt, so erhält man successive wieder alle Glieder der Entwickelung des allgemeinen Integrales.

Aber wenn dagegen $k<1$ ist, so ist es nicht mehr möglich, die Gleichung (α) identisch zu machen, und folglich kann die Auflösung $y=X$ nicht aus dem allgemeinen Integrale durch Particularisirung einer willkürlichen Constante hervorgehen, und ist mithin ein singuläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung.

Nun macht aber der Werth X, für welchen der Exponent $k<1$ ist nach dem im §. 106 über den Ausnahmefall der Taylor'schen Reihe Gesagten die Ableitung:

$$\frac{df(x,y)}{dy}=\frac{dy'}{dy}$$

unendlich; folglich ist die Gleichung $\frac{dy'}{dy}=\pm\infty$ das wahre Kriterium der singulären Integrale, und enthält sie alle als Factoren, mit Ausnahme derer, welche von der Form $x=\text{const.}$ sind, und welche man erhält, wenn man in der gegebenen Gleichung die Veränderliche y als unabhängig betrachtet.

Wenn also die Werthe von y als Functionen von x, welche $\frac{df}{dy'}=0$ machen, den Ableitungen $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dx}$ endliche Werthe geben, so entsprechen diese Werthe singulären Integralen von (f); aber wenn sie diese Ableitungen verschwinden machen, so muß man durch die gewöhnlichen Verfahrungsarten die Werthe der zweiten Theile der Gleichungen (b), welche alsdann unter einer

unbeſtimmten Form erſcheinen, ſuchen. Wenn dieſe Werthe unendlich ſind, ſo bilden die zu prüfenden Auflöſungen ebenfalls ſinguläre Integrale, und wenn dieſes nicht der Fall iſt, ſo gehören ſie in die Categorien der particulären Integrale, drücken aber nichts deſto weniger die Umſchließungslinien aus. Der eben nach Poiſſon gegebene Beweis unterliegt wegen der Anwendung der Reihen, welche divergent werden können, einigen Schwierigkeiten, und wir werden Gelegenheit haben, wieder auf dieſen Gegenſtand zurückzukommen, wenn wir von der Conſtruction der Differenzialgleichungen reden werden.

§. 478. Vermöge der Gleichungen (d), (e), (f), (h) hat man:

$$\frac{d(y-X)}{dx} = f(x,y) - f(x,X) = (\varepsilon\varphi)^k \omega = (y-X)^k \omega,$$

und wenn man die Veränderlichen vertauſcht, indem man $y - X = u$ ſetzt; ſo verwandelt ſich dieſe Gleichung in:

$$\frac{du}{dx} = u^k \omega,$$

wo ω alsdann eine Function der Veränderlichen x, u bezeichnet, welche für $u = 0$ weder verſchwindet, noch unendlich groß wird. Wir können die Veränderlichen nochmals vertauſchen, und zu dem Ende $u^{1-k} = v$ ſetzen, wodurch die Differenzialgleichung der Form:

$$v^{\frac{k}{1-k}}\left(\frac{dy}{dx} - (1-k)\omega\right) = 0$$

annimmt. Für $k < 1$ zerfällt dieſe letzte Gleichung von ſelbſt in die beiden andern:

$$v = 0, \quad \frac{dy}{dx} - (1-k)\omega = 0,$$

wovon die erſte, welche gleichbedeutend iſt mit $y - X = 0$, das ſinguläre Integral gibt, wogegen der zweiten durch dieſes ſinguläre Integral nicht mehr genügt werden kann, weil ω eine Function iſt, welche nicht mit v verſchwindet.

Wenn alſo eine Differenzialgleichung der erſten Ordnung ein ſinguläres Integral geſtattet, ſo kann man ſie durch eine Vertauſchung der Veränderlichen in eine andere verwandeln, worin das ſinguläre Integral als gemeinſchaftlicher Factor erſcheint, ſo daß nach Hinweglaſſung dieſes Factors die transformirte Gleichung kein ſinguläres Integral mehr hat, und bei einem rechtwinkligen Coordinatenſyſteme eine Reihe von Linien ausdrückt, welche keine Umſchließungslinien mehr haben.

§. 479. Wir wollen dieſes auf die Gleichung:

$$y'^2 - 4xy' + 4y = 0, \quad \text{oder} \quad y' = 2(x \pm \sqrt{x^2 - y}), \qquad (3)$$

anwenden, deren allgemeines Integral:

$$y = 2ax - a^2 \qquad (4)$$

iſt, und folglich ein Syſtem von geraden Linien ausdrückt, welche die Parabel $x^2 - y = 0$ zur Berührungslinie haben. Wir wollen $x^2 - y = u = v^2$ ſetzen, ſo verwandelt ſich die Gleichung (3) in:

$$\frac{du}{dx} = \mp 2\sqrt{u}, \quad \text{oder} \quad v\left(\frac{dv}{dx} \pm 1\right) = 0.$$

ach der Hinweglaſſung des Factors v bleibt die Gleichung $\frac{dv}{dx} \pm 1 = 0$, deren

lgemeines Integral:

$$v = \mp(x - a) \qquad (5)$$

, und welches, wenn man x zur Abſciſſe und v zur rechtwinkligen Ordinate immt, ein Syſtem von parallelen geraden Linien ausdrückt, welche folglich ine Berührungslinie haben. Uebrigens würde man wieder auf die Glei- ung (5) kommen, wenn man für y ſeinen durch v und x ausgedrückten Werth in die Gleichung (4) ſubſtituirte.

Die Anwendung dieſer Methode auf die Gleichung (1) würde einigen chwierigkeiten unterliegen, wenn man x als unabhängige Veränderliche bei- ehalten wollte. Aber wenn man dieſe Gleichung auf die Form:

$$(x^2 - r^2)dy = xdx(y \pm \sqrt{x^2 + y^2 - r^2})$$

ingt, und dann x^2 und xdx vermittelſt der Hülfsgleichungen:

$$x^2 + y^2 - r^2 = u^2, \quad xdx + ydy = udu$$

rtſchafft; ſo nimmt ſie die ſehr einfache Form $u(du \mp dy) = 0$ an, ſo daß e nach der Hinweglaſſung des Factors u kein ſinguläres Integral mehr ge- attet.

§. 480. Umgekehrt kann man eine Differenzialgleichung, welche kein inguläres Integral geſtattet, ſo transformiren, daß ſie eine gegebene Glei- ung, als ſinguläres Integral darbietet. Es ſei z. B. die oben gefundene Differenzialgleichung $\frac{dv}{dx} \pm 1 = 0$ gegeben, in welche man für v eine Function on x und von einer neuen Veränderlichen z von ſolcher Beſchaffenheit ſub- ituiren ſoll, daß nach der Subſtitution die reſultirende Gleichung die lineare leichung:

$$z - mx = 0 \qquad (6)$$

ls ſinguläres Integral darbietet.

Man multiplicire die gegebene Gleichung durch $(z - mx)^k$, wo k eine wiſchen 0 und 1 liegende Zahl bezeichnet; ſo verwandelt ſie ſich in:

$$(z - mx)^k dv \pm (z - mx)^k dx = 0. \qquad (7)$$

Alsdann wollen wir die Veränderliche z, welche eine Function von v und x ein muß, ſo beſtimmen, daß

$$\frac{dz}{dv} = (z - mx)^k$$

wird; ſo ergibt ſich durch Integration:

$$\frac{(z - mx)^{1-k}}{1 - k} = v + X,$$

wo X eine willkürliche Function von x bezeichnet, und folglich iſt:

$$dz - mdx = (z - mx)^k (dv + dX)$$

Leiten wir hieraus den Werth von dv ab und ſubſtituiren denſelben in die Gleichung (7), ſo verwandelt ſie ſich in:

$$dz - mdx - (z - mx)^k (dX \mp dx) = 0,$$

nd es iſt einleuchtend, daß die Gleichung (6) derſelben als ſinguläres Inte- ral Genüge leiſtet.

§. 481. Im §. 448 haben wir geſehen, daß die Differenzialgleichu
der erſten Ordnung:

$$y = xy + \psi y'$$

durch eine zweite Differenziation die Differenzialgleichung der zweiten Ordnu

$$(x + \psi y')y'' = 0$$

gibt, welche unmittelbar in zwei Factoren zerfällt, wovon der eine das a
meine, und der andere das ſinguläre Integral der gegebenen Differenz
gleichung liefert. Dieſes analytiſche Factum müſſen wir nun verallgemein
und zeigen, daß man, wenn eine Differenzialgleichung der erſten Ordnung
ſinguläres Integral geſtattet, ſie immer unter eine ſolche Form bringen k
daß ihre Ableitung in zwei Factoren zerfällt, wovon der eine durch Elimin
von y' vermittelſt der gegebenen Gleichung das ſinguläre Integral gibt, w
rend der andere, welcher durch den aus dem allgemeinen Integrale abgeleite
und durch eine Function von x ausgedrückten Werth von y' verſchwinden
macht wird, nicht mehr für den aus dem ſingulären Integrale abgeleite
Werth verſchwindet.

Wird die Differenzialgleichung:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' = 0 \qquad (a'_1)$$

in Beziehung auf a aufgelöſ't, ſo gibt ſie:

$$a = \omega(x, y, y'), \qquad (i)$$

und wenn man dieſen Werth von a in die Gleichung (a) ſubſtituirt, ſo iſt
reſultirende Gleichung:

$$F(x, y, \omega) = 0 \qquad (j)$$

mit der Gleichung (f) in ſo fern gleichbedeutend, daß man, wenn ſie ni
übereinſtimmen, von der einen zur andern übergeht, wenn man den erſt
Theil der erſten Gleichung durch eine ſchicklich gewählte Function der Ve
änderlichen x, y, y' multiplicirt. Differenzirt man nun die Gleichung (j),
erhält man:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' + \frac{dF}{d\omega}\left(\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dy}y' + \frac{d\omega}{dy'}y''\right) = 0,$$

und ferner iſt die Summe der beiden erſten Glieder $= 0$, weil man für
ſeinen aus der Gleichung (a'_1) gezogenen Werth in die Function F ſubſtitui
hat. Die Ableitung der Gleichung (j) reducirt ſich alſo auf:

$$\frac{dF}{d\omega}\left(\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dy}y' + \frac{d\omega}{dy'}y''\right) = 0$$

und zerfällt in die beiden Factoren:

$$\frac{dF}{d\omega} = 0 \qquad (j_1)$$

$$\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dy}y' + \frac{d\omega}{dy'}y'' = 0. \qquad (j_2)$$

Die Gleichung (j_2), welche von der zweiten Ordnung iſt, hat offenbar d
Gleichung (j) zum Integrale der erſten Ordnung, und die Elimination v
y' zwiſchen den Gleichungen (i) und (j) findet ſtatt, wenn man ω zwiſch
denſelben Gleichungen eliminirt, oder wenn man in der Gleichung (j), a fü
ω ſetzt, d. h. dieſe Elimination gibt das allgemeine Integral der gegebene
Differenzialgleichung.

Ebenſo wird die Elimination von y' zwiſchen den Gleichungen (i) und
$_1$) verrichtet durch die Elimination von ω zwiſchen denſelben Gleichungen,
er durch die Elimination von a zwiſchen der Gleichung (a) und ihrer Ab-
itung in Beziehung auf a. Sie führt folglich auf das ſinguläre Integral
r gegebenen Differenzialgleichung, oder wenigſtens auf die Gleichung einer
rührungslinie der Curven, welche die particulären Integrale derſelben aus-
ken.

Aus dieſer Rechnung erhellet auch, daß der aus dem ſingulären Integrale
geleitete Werth von y als Function von x der gegebenen Differenzialglei-
ng Genüge leiſtet; aber daß der daraus abgeleitete Werth von y'' der
eichung (j_2) nicht Genüge leiſtet, und folglich auch, daß die daraus ab-
leiteten Werthe von y''', y^{IV}, ꝛc. die ſucceſſiven Ableitungen der gegebenen
fferenzialgleichungen nicht verificiren.

Wendet man dieſe Analyſe auf die Gleichung (2) an, ſo erhält man:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\,y' = 2x - 2ay',$$

raus ſich die Gleichung:

$$\omega = \frac{x}{y'}, \quad F(x, y, \omega) = x^2 - \frac{2xy}{y'} - \frac{x^2}{y'^2} - r^2 = 0 \qquad (8)$$

gibt, welche nach der Fortſchaffung des Nenners y'^2 mit der Gleichung (1)
ereinſtimmen würde. Die Differenziation der Gleichung (8) gibt:

$$-\frac{y}{y'} + \frac{xyy''}{y'^2} - \frac{x}{y'^2} + \frac{x^2y''}{y'^2} = 0,$$

er vielmehr:

$$\left(y + \frac{x}{y'}\right)\left(\frac{1}{y'} - \frac{xy''}{y'^2}\right) = 0.$$

er aus der Gleichung $y + \frac{x}{y'} = 0$ abgeleitete und in die gegebene Dif-
renzialgleichung ſubſtituirte Werth von y' gibt das ſinguläre Integral
$^2 + y^2 - r^2 = 0$. Der andere Factor iſt die Ableitung der Function $\frac{x}{y'}$ in
eziehung auf x; die Integration gibt folglich $\frac{x}{y'} = a$, und wenn man dieſen
Werth von y' in die gegebene Differenzialgleichung ſubſtituirt, ſo erhält man
ie Gleichung (2) wieder.

II. Singuläre Integrale der Differenzialgleichungen höherer Ordnungen.

§. 482. Es ſei:

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}, a) = 0 \qquad (K)$$

n erſtes Integral der Differenzialgleichung der $(n+1)^{ten}$ Ordnung:

$$f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}, y^{(n+1)}) = 0, \qquad (k)$$

o a die durch die Integration eingeführte willkürliche Conſtante bezeichnet.
Wenn man a zwiſchen den Gleichungen (K) und:

$$\frac{dF}{da} = 0 \qquad (K')$$

eliminirt, ſo leiſtet die reſultirende Gleichung:

$$\varphi(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0 \qquad (x)$$

der Gleichung (k) ebenfalls Genüge und iſt ein ſinguläres Integral derſelben, mit Ausnahme des Falles, wo der aus der Gleichung (K) abgeleitete Werth von a ſich unmittelbar, oder vermöge der Gleichung (x) auf eine Conſtante reducirt, wie dieſes bei den Differenzialgleichungen der erſten Ordnung näher erklärt iſt.

Die Gleichung (k) hat n erſte Integrale der n^{ten} Ordnung, welche man ausdrücken kann durch:

$$\begin{aligned} F_1(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}, a_1) &= 0 \\ F_2(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}, a_2) &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}, a_n) &= 0. \end{aligned}$$

Wenn man nun die willkürlichen Conſtanten dieſer Integrale reſp. vermittelſt der Ableitungen:

$$\frac{dF_1}{da_1} = 0, \quad \frac{dF_2}{da_2} = 0, \ldots \frac{dF_n}{da_n} = 0$$

eliminirt, ſo kommt man immer auf daſſelbe ſinguläre Integral.

Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir eine Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$f(x, y, y', y'') = 0 \qquad (l)$$

betrachten, deren vollſtändiges Integral:

$$F(x, y, a_1, a_2) = 0 \qquad (L)$$

ſei, wo a_1, a_2 die durch die beiden ſucceſſiven Integrationen eingeführten Conſtanten ſind.

Nach der allgemeinen Theorie erhält man die beiden Integrale der erſten Ordnung, wenn man abwechſelnd a_1 und a_2 zwiſchen der Gleichung (L) und ihrer Ableitung:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' = 0, \qquad (L')$$

welche wir der Bequemlichkeit wegen durch:

$$f(x, y, y', a_1, a_2) = 0 \qquad (f)$$

bezeichnen wollen, eliminirt. Dieſe Elimination gibt:

$$F_1(x, y, y', a_1) = 0, \quad F_2(x, y, y', a_2) = 0,$$

und alsdann erhält man die ſingulären Integrale der erſten Ordnung, wenn man die Conſtanten a_1 und a_2 aus dieſen Gleichungen vermittelſt der folgenden:

$$\frac{dF_1}{da_1} = 0, \quad \frac{dF_2}{da_2} = 0 \qquad (L'_{1,2})$$

eliminirt.

Geſetzt, wir wollten das durch F_1 gegebene ſinguläre Integral erhalten, ſo läuft die angedeutete Rechnung darauf hinaus, die Conſtanten a_1, a_2 zwiſchen den Gleichungen (L), (f) und der Ableitung der letztern in Beziehung auf a_1 und a_2 nämlich:

$$\frac{df}{da_1} + \frac{df}{da_2} \cdot \frac{da_2}{da_1} = 0, \qquad (f')$$

ıdem aber a_1 als eine durch die Gleichung (L) implicite beſtimmte Function on a_1 betrachtet wird, zu eliminiren. Man hat alſo:

$$\frac{da_2}{da_1} = -\frac{dF}{da_1} : \frac{dF}{da_2},$$

o daß ſich die Gleichung (f') in:

$$\frac{dF}{da_2} \cdot \frac{df}{da_1} - \frac{dF}{da_1} \cdot \frac{df}{da_2} = 0 \qquad (f'_{1,2})$$

erwandelt. Das geſuchte ſinguläre Integral ergibt ſich alſo aus der Elimiıation von a_1, a_2 zwiſchen den Gleichungen (L), (f), $(f'_{1,2})$, und da die etzte Gleichung durch die Vertauſchung der Indices nicht geändert wird, ſo ſt der Satz bewieſen. Dieſer Beweis läßt ſich leicht auf Gleichungen von iner beliebigen Ordnung erſtrecken.

Es ſei z. B. die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$y''^2 - \frac{2y'y''}{x} + 1 = 0 \qquad (9)$$

egeben, deren vollſtändiges Integral:

$$\frac{x^3}{3} - 2a_1 y + a_1^2 x + a_2 = 0$$

ſt, und deren beide Integrale der erſten Ordnung:

$$F_1 = x^2 - 2a_1 y' + a_1^2 = 0 \qquad (10)$$

$$F_2 = 4x^2(y - xy')^2 - 4\left(a_2 - \frac{2x^3}{3}\right)(y - xy')y' + (a_2 - \frac{2}{3}x^3)^2 = 0$$

ind.

Die Gleichungen $(L'_{1,2})$ verwandeln ſich in:

$$a_1 = y', \quad -4(y - xy')y' + 2(a_2 - \tfrac{2}{3}x^3) = 0,$$

nd durch Elimination erhält man:

$$x^2 - y'^2 = 0, \quad 4(y - xy')^2 (x^2 - y'^2) = 0.$$

Die zweite Gleichung begreift die erſte in ſich, und hat keine größere Allgeneinheit; denn wenn man den Factor $y - xy' = 0$ ſetzt, ſo ergibt ſich daraus ein Werth von y', welcher der gegebenen Differenzialgleichung der zweiten Ordnung kein Genüge leiſtet.

§. 483. Der Lehrſatz im §. 481 läßt ſich leicht auf die ſingulären Integrale der Differenzialgleichungen von einer beliebigen Ordnung anwenden. Geſetzt, die gegebene Differenzialgleichung wäre von der zweiten Ordnung und würde durch die Gleichung (1) ausgedrückt, ſo daß

$$F_1(x, y, y', a_1) = 0 \qquad (L_1)$$

eins ihrer Integrale der erſten Ordnung wäre, ſo hätte man, wenn man vermittelſt der Gleichung:

$$\frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_1}{dy} y' + \frac{dF_1}{dy'} y'' = 0 \qquad (L'_1)$$

welche:

$$a_1 = \omega(x, y, y', y'')$$

zibt, a_1 fortſchaffte, die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$F_1(x, y, y', \omega) = 0, \qquad (\omega)$$

welche mit der gegebenen (l) identiſch iſt, oder ſich nun durch einen Factor, welcher eine Function von x, y, y', y'' iſt, unterſcheidet. Andererſeits, wenn man a_1 vermittelſt ſeines aus der Gleichung $\frac{dF_1}{da_1} = 0$ abgeleiteten Werthes aus der Gleichung (L_1) fortſchafft, ſo erhält man das ſinguläre Integral. Differenzirt man aber die Gleichung (ω), indem man die vermöge der Gleichung (L'_1) verſchwindenden Glieder hinwegläßt, ſo erhält man:

$$\frac{dF}{d\omega}\left(\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dy}y' + \frac{d\omega}{dy'}y'' + \frac{d\omega}{dy''}y'''\right) = 0,$$

und der übrige Theil des Beweiſes wird wie in dem angeführten § geführt. Hieraus folgt ebenfalls, daß der aus dem ſingulären Integrale abgeleitete Werth von y' als Function von x, y für y'' einen Werth gibt, welcher die gegebene Differenzialgleichung verificirt; aber für y''', y^{iv}, y^{v}, ꝛc. Werthe, welche den ſucceſſiven Ableitungen, der gegebenen Differenzialgleichung nicht genügen.

Nimmt man für $f = 0$ $F_1 = 0$, die Gleichungen (9) und (10), ſo hat man $\omega = \frac{x}{y''}$, folglich:

$$F_1(x, y, y', \omega) = x^2 - \frac{2xy'}{y''} + \frac{x^2}{y''^2} = 0, \qquad (11)$$

welche Gleichung mit (9) übereinſtimmte, wenn man alle Glieder derſelben mit $\frac{y''^2}{x^2}$ multiplicirte. Die Differenziation der Gleichung (11) gibt:

$$-\frac{y'}{y''} + \frac{xy'y'''}{y''^2} + \frac{x}{y''^2} - \frac{x^2y'''}{y''^3} = 0$$

oder vielmehr:

$$\frac{x^2}{y''^2} \cdot \left(\frac{y'}{x} - \frac{1}{y''}\right)\left(y''' - \frac{y''}{x}\right) = 0.$$

Der aus der Gleichung:

$$\frac{y'}{x} - \frac{1}{y''} = 0$$

abgeleitete, und in die Gleichung (11) ſubſtituirte Werth von y'' gibt das ſinguläre Integral $x^2 - y'^2 = 0$. Andererſeits folgt aus der Differenzialgleichung der dritten Ordnung:

$$y''' - \frac{y''}{x} = 0,$$

wenn man integrirt $\frac{x}{y''} = a_1$, und wenn man dieſen Werth in die Gleichung (11) ſubſtituirt, ſo erhält man das Integral (10) wieder.

§. 484. Die Differenzialgleichung (ϰ) von der n^{ten} Ordnung hat ein allgemeines Integral von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung:

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}, c) = 0 \qquad (\Phi)$$

und da dieſes Integral nicht blos der Gleichung (ϰ), ſondern auch allen ihren Ableitungen Genüge leiſten muß; ſo folgt, daß die Werthe von $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, welche aus der Gleichung (Φ) abgeleitet ſind, mit denen übereinſtimmen,

lche man aus der Gleichung (x) ableitet, und folglich leiſtet die Gleichung ') der gegebenen Gleichung (k) eben ſo wohl Genüge, als die Gleichung (x).

Nehmen wir nun an, daß die Gleichung (x) ein ſinguläres Integral:

$$\psi(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}) = 0 \qquad (\psi)$$

be, ſo ergibt ſich nach der Bemerkung im vorhergehenden § daraus ein ⁱerth für $y^{(n+1)}$, welcher nicht mit dem übereinſtimmt, welchen die Ableitung n (x) gibt, und folglich leiſtet die Gleichung (ψ), welche als ſinguläres ntegral der Gleichung (x) genügt, der gegebenen Gleichung (k), wovon (x) on ein ſinguläres Integral iſt, kein Genüge.

Daſſelbe läßt ſich auch durch folgende Betrachtung, welche wir der Deutlichkeit wegen auf die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$f(x, y', y'') = 0 \qquad (l)$$

wenden wollen, darthun.

Ihr ſinguläres Integral der erſten Ordnung:

$$\varphi(x, y, y') = 0, \qquad (\lambda)$$

gibt ſich, wie bereits bemerkt worden, aus der Elimination von a_1, a_2 zwiſchen den Gleichungen (L), (f) und ($f'_{1,2}$). Es ſei $\psi(x, y) = 0$ ein ſinguläres Integral von (λ), ſo behaupten wir, daß dieſes Integral nicht von der Gleichung verſchieden iſt, welche man erhielte, wenn man a_1, a_2 zwiſchen der Gleichung (L) und ihren Ableitungen:

$$\frac{dF}{da_1} = 0, \quad \frac{dF}{da_2} = 0 \qquad ((L'))$$

liminirte. Denn die ſo erhaltene Gleichung genügt dem Syſteme der Gleichungen (L), (L'), ($f'_{1,2}$), und folglich der Gleichung (λ), wovon ſie das nguläre Integral iſt, weil ſie keine willkürliche Conſtante enthält.

Nun muß man aber bekanntlich, um die Gleichung (l) zu erhalten, a_1, a_2 wiſchen der Gleichung (L) und ihren Ableitungen der erſten und zweiten Ordnung, wobei a_1, a_2 als Conſtanten behandelt werden, nämlich:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' = 0 \qquad (L')$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dxdy} y' + \frac{d^2F}{dy^2} y'^2 + \frac{dF}{dy} y'' = 0 \qquad (L'')$$

liminiren. Wenn a_1, a_2 keine Conſtanten mehr, ſondern durch die Gleichungen (L) ((L')) beſtimmte Functionen von x, y ſind, ſo wird der Gleichung L') noch genügt, aber der Gleichung (L'') nicht mehr, und folglich der Gleichung (l) auch nicht.

§. 485. Als Beiſpiel wollen wir die Differenzialgleichung:

$$y - xy' - (y' - xy'')^2 + \frac{x^2y''}{2} - y''^2 = 0, \qquad (12)$$

ren zweites Integral:

$$y - \tfrac{1}{2} a_1 x^2 - a_2 x - (a_1^2 + a_2^2) = 0, \qquad (13)$$

ren Integrale der erſten Ordnung:

$$y + \left(\frac{a_1}{2} - a_1^2\right) x^2 - (1 - 2a_1) xy' - a_1^2 - y'^2 = 0$$

$$y - \frac{(a_2 + y')x}{2} - \frac{(a_2 - y')^2}{x^2} - a_2^2 = 0$$

ſind und deren ſinguläres Integral von derſelben Ordnung endlich:

$$y(1+x^2)+\frac{x^4}{16}-\left(\frac{x^3}{2}+x\right)y'-y'^2=0 \qquad (14)$$

iſt, betrachten. Wenn man dieſe letzte Gleichung in Beziehung auf y' au löſet, ſo wird ſie auf die Form:

$$\frac{8y'+4x+2x^3}{\sqrt{16y+4x^2+x^4}}=2\sqrt{1+x^2} \qquad (15)$$

gebracht, woraus folgt, wenn man integrirt:

$$\sqrt{16y+4x^2+x^4}=x\sqrt{1+x^2}-\log.(\sqrt{1+x^2}-x)+c. \quad (1$$

Die Gleichung (16) leiſtet der gegebenen Gleichung (12) Genüge; ab da ſie nur eine willkürliche Conſtante c enthält, und durch eine ſchickliche Wa der Conſtanten a_1, a_2 nicht auf das allgemeine Integral (13) zurückgefüh werden kann, ſo bildet ſie noch ein ſinguläres Integral der gegebenen Di ferenzialgleichung.

Die Gleichung (14) kann ſelbſt ein ſinguläres Integral haben, welch man vermittelſt der weiter oben angegebenen Methoden finden könnte, ab welches man einfacher beſtimmt, wenn man die Gleichungen ((L')), oder

$$\tfrac{1}{2}x^2+2a_1=0, \quad x+2a_2=0$$

bildet. Werden die daraus abgeleiteten Werthe von a_1, a_2 in die Gleichun (13) geſetzt, ſo kommt:

$$16y+4x^2+x^4=0,$$

und dieſe letzte Gleichung leiſtet offenbar den Gleichungen (14) oder (15) aber nicht der gegebenen (12) Genüge.

§. 486. Die Gleichung (x) enthält im Allgemeinen die Ableitungen vo y bis zu $y^{(n)}$ incl.; aber es kann auch geſchehen, daß $y^{(n)}$ aus der Functio φ verſchwindet, und alsdann iſt dieſelbe Gleichung ein ſinguläres Integra der $(n-1)^{ten}$ Ordnung der gegebenen Gleichung, und ſie würde ein ſingu läres Integral von der $(n-2)^{ten}$ Ordnung ſein, wenn $y^{(n-1)}$ ebenfalls au der Function φ verſchwände, u. ſ. f.

Es ſei z. B. die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$(xy-1)(xy'^2-yy'+2xyy'')^2-xy(y+xy')^2y'^2=0$$

gegeben, wovon eins ihrer vollſtändigen Integrale der erſten Ordnung di Gleichung:

$$yy'^2-2a_1xyy'+a_1^2x=0 \qquad (17)$$

iſt. Das ſinguläre Integral der gegebenen Gleichung wird gebildet, wen man a_1 vermittelſt der in Beziehung auf a_1 genommenen Ableitung der Gle chung (17) aus dieſer Gleichung fortſchafft. Dieſe Rechnung gibt:

$$yy'^2(xy-1)=0,$$

woraus ſich die drei Auflöſungen:

$$y'=0, \quad y=0, \quad xy-1=0$$

ergeben, welche drei ſinguläre Integrale der gegebenen Differenzialgleichun ſind, nämlich die erſte von der erſten Ordnung, und die beiden andern al gebraiſch oder von der Ordnung Null.

§. 487. Die Werthe von $y^{(n)}$ als Functionen von $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$, welche die Gleichung (k) verificiren und die aus derſelben Gleichung (k) abgeleitete Function:

$$\frac{dy^{(n+1)}}{dy^{(n)}} \qquad (n)$$

unendlich machen, ſind ſinguläre Integrale der gegebenen Gleichung von der ^{ten} Ordnung, und alle ſinguläre Integrale der n^{ten} Ordnung müſſen die Ableitung (n) unendlich machen. Es müſſen noch andere Bedingungen erfüllt werden, wenn das ſinguläre Integral zufällig auf eine niedrigere Ordnung herabſinkt; allein wegen dieſer Unterſuchungen, welche außerhalb der Grenzen der Elemente lägen, müſſen wir auf die Functionenrechnung von Lagrange, und insbeſondere auch auf eine Abhandlung von Poiſſon in dem 13 Hefte des Journals der polytechniſchen Schule zu Paris verweiſen.

Fünftes Kapitel.

Geometriſche Anwendungen der Theorie der Integration der Differenzialgleichungen mit zwei veränderlichen Größen.

§. 488. In dieſem Kapitel wollen wir einige geometriſche Aufgaben betrachten, welche ſich auf die Integration der Differenzialgleichungen mit zwei veränderlichen beziehen, und zwar wollen wir zunächſt die Curven beſtimmen, deren Krümmungshalbmeſſer der Normale proportional iſt (§. 172), welche Bedingung durch die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$\mp \frac{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}{y''} = ky\sqrt{1+y'^2},$$

oder:

$$1 + y'^2 = \mp kyy'' \qquad (a)$$

ausgedrückt wird, wo k ein conſtantes Verhältniß bezeichnet und das obere oder untere Zeichen genommen werden muß, je nachdem der Krümmungshalbmeſſer nach dem Sinne der Normale, oder nach entgegengeſetztem Sinne gerichtet iſt.

Die Gleichung (a) iſt eine von denen, worin die unabhängige Veränderliche nicht vorkommt (§. 451), und läßt ſich auf die Form:

$$1 + y'^2 = \mp ky\frac{dy'}{dx} = \mp kyy'\frac{dy'}{dy}$$

bringen, woraus folgt:

$$\frac{dy}{y} = \mp \frac{ky'dy'}{1+y'^2},$$

und wenn man zweimal hinter einander integrirt:

$$y = b(1 + y'^2)^{\mp\frac{k}{2}}, \quad y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{b}\right)^{\mp\frac{2}{k}} - 1}$$

$$x - a = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{b}\right)^{\mp\frac{2}{k}} - 1}}. \qquad (b)$$

Die angedeutete Quadratur läßt sich für die beiden Werthe $k = 1$, $k = 2$ unter endlicher Form verrichten. Es sei zuerst $k = 1$, so hat man, wenn man das obere Zeichen nimmt:

$$x - a = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} = -\sqrt{b^2 - y^2},$$

die Gleichung eines Kreises von einem beliebigen Halbmesser, dessen Mittelpunkt auf der Axe der x liegt. Es ist in der That einleuchtend, daß für einen so liegenden Kreis die Normale der Größe und Richtung nach mit dem Krümmungshalbmesser zusammenfällt. Wenn man das untere Zeichen nimmt, so hat man:

$$x - a = \int \frac{b\,dy}{\sqrt{y^2 - b^2}} = b \log. \left(\frac{y + \sqrt{y^2 - b^2}}{b}\right),$$

folglich:

$$y + \sqrt{y^2 - b^2} = b e^{\frac{x-a}{b}},$$

welches die Gleichung der Kettenlinie ist (§. 384). Wenn man $k = 2$ setzt, und das obere Zeichen nimmt, so gibt die Gleichung (b):

$$x - a = \int \sqrt{\frac{y}{b - y}} \cdot dy,$$

welches die Gleichung einer Cycloide ist, deren Basis die Axe der x ist, und deren Erzeugungskreis einen Halbmesser $= \frac{1}{2} b$ hat, und in der That wissen wir bereits aus §. 198, daß der Krümmungshalbmesser einer so liegenden Cycloide das Doppelte der Normale und nach demselben Sinne, wie sie, gerichtet ist.

Wenn man das untere Zeichen nimmt, so erhält man:

$$x - a = \sqrt{b} \int \frac{dy}{\sqrt{y - b}} = 2\sqrt{b(y - b)},$$

die Gleichung einer Parabel, deren Axe auf der Axe der x senkrecht ist, und deren Scheitel in dem Punkte $x = a$, $y = b$ liegt.

§. 489. Wenn der Krümmungshalbmesser der gesuchten Curve dem reciproken Werthe der Abscisse proportional sein sollte, so wäre die Gleichung der Aufgabe:

$$\mp \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{k}{x}, \quad \text{oder} \quad x\,dx = \mp \frac{k\,dy'}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und wenn man integrirt:

$$x^2 + c = \mp \frac{2ky'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad dy = \pm \frac{(x^2 + c)\,dx}{\sqrt{4k^2 - (x^2 + c)^2}}.$$

Wir können die Conſtante c mit $-b^2$, die Conſtante k mit $\frac{\lambda^2}{2}$ bezeich-

n, ſo daß der Ausdruck homogen wird, und endlich die Buchſtaben x,y mit
inander vertauſchen, wodurch die vorhergehende Gleichung mit der erſten der
leichungen (12) im §. 387 identiſch wird. Die Curve, welche die fragliche
igenſchaft hat, iſt alſo die, welche wir in dem angeführten § gerade wegen
r jetzt durch eine Gleichung ausgedrückten Eigenſchaft die elaſtiſche Curve
nannt haben.

§. 490. Wir wollen nun eine Curve von ſolcher Beſchaffenheit ſuchen,
ß das Product der aus zwei gegebenen Punkten auf jede Tan-
nte dieſer Curve gefällten Perpendikel conſtant iſt. Die Ver-
ndungslinie der beiden gegebenen Punkte wollen wir zur Axe der x, und die
litte ihrer gegenſeitigen Entfernungen zum Anfangspunkte der Coordinaten
hmen. Bezeichnen wir alsdann die gegenſeitige Entfernung der beiden
nkte mit 2c, und das Product der beiden Perpendikel mit b^2, ſo hat man
ch den Bedingungen der Aufgabe die Differenzialgleichung:

$$\frac{(y - xy')^2 - c^2y'^2}{1 + y'^2} = \pm b^2, \qquad (c)$$

d man muß das obere, oder das untere Zeichen nehmen, je nachdem die
iden Punkte, von welchen die Perpendikel ausgehen, auf derſelben Seite
r Tangente liegen, oder nicht. Die vorhergehende Gleichung kann auf die
rm:

$$y = xy' + \psi y' \qquad (\psi)$$

bracht werden, und man hat:

$$\psi y' = \sqrt{(c^2 \pm b^2)y'^2 \pm b^2}.$$

fferenzirt man nach der im §. 448 für Gleichungen dieſer Form angegebenen
ethode, ſo findet man:

$$dy'\left[x + \frac{(c^2 \pm b^2)y'}{\sqrt{(c^2 \pm b^2)y'^2 \pm b^2}}\right] = 0,$$

d folglich iſt:

$$dy' = 0 \qquad (c'_1)$$

$$x + \frac{(c^2 \pm b^2)y'}{\sqrt{(c^2 \pm b^2)y'^2 \pm b^2}} = 0. \qquad (c'_2)$$

enn man y' zwiſchen den Gleichungen (c) und (c'_2) eliminirt, ſo erhält
n das ſinguläre Integral der erſten dieſer Gleichungen. Um die Elimina-
n bequem verrichten zu können, bringt man dieſe Gleichungen auf die Form:

$$y - y'x = \sqrt{(c^2 \pm b^2)y^2 \pm b^2},$$

$$\frac{(c^2 \pm b^2)y'}{x} = -\sqrt{(c^2 \pm b^2)y^2 \pm b^2}, \qquad (1)$$

raus folgt, wenn man die Wurzelgröße eliminirt, und zum Quadrate
ebt:

$$y'^2 = \frac{x^2y^2}{[x^2 - (c^2 \pm b^2)]^2}.$$

e Gleichung (1) gibt auch, wenn man beide Theile zum Quadrat erhebt:

$$y'^2 = \mp \frac{b^2x^2}{(c^2 \pm b^2)[x^2 - (c^2 \pm b^2)]},$$

und wenn man dieſe beiden Werthe von y'^2 einander gleich ſetzt, ſo e man nach der Hinweglaſſung der gemeinſchaftlichen Factoren:

$$y^2(c^2 \pm b^2) \pm b^2x^2 = \pm b^2(c^2 \pm b^2).$$

Je nachdem man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, gehört dieſe Gleic einer Ellipſe oder einer Hyperbel an, deren beide Brennpunkte die beiden gebenen Punkte ſind, von welchen die Perpendikel auf die Tangente g werden, und 2b iſt die kleine Axe der Ellipſe, oder die zweite Axe der perbel.

Das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung wird halten, wenn man in dieſe Gleichung den durch die Gleichung (c'_1) gegeb Werth $y' = \text{const.}$ ſubſtituirt. Dieſes allgemeine Integral iſt die Gleic eines Syſtemes von geraden Linien, welche die geſuchte Ellipſe oder Hyp berühren. Offenbar genügen dieſe geraden Linien der Bedingung der Auf in mathematiſcher Allgemeinheit; allein die einzige Auflöſung, welche man d den Ausdruck derſelben hat erhalten können, wird durch das ſinguläre Int gegeben, und dieſelbe Bemerkung iſt auf jede geometriſche Aufgabe anwen welche auf die Beſtimmung einer Curve durch eine Differenzialgleichung der Form (ψ) führt.

§. 491. Eine Differenzialgleichung von der Form:

$$y\sqrt{1 + y'^2} = f(x + yy')$$

drückt eine Relation zwiſchen der Normale und der Entfernung des Anfa punktes von dem Punkte, wo die Normale die Axe der Abſciſſen trifft, Durch Differenziation erhält man:

$$(1 + y'^2 + yy'')\left[\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - f'(x + yy')\right] = 0,$$

woraus ſich die beiden Auflöſungen:

$$1 + y'^2 + yy'' = 0 \qquad (d$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - f'(x + yy') = 0 \qquad (d$$

ergeben. Aus der erſten folgt:

$$x + yy' = a,$$

wo a eine willkürliche Conſtante bezeichnet, und wenn man den ſich d ergebenden Werth von y' in die gegebene Gleichung ſubſtituirt; ſo erhält das allgemeine Integral:

$$\sqrt{(x - a)^2 + y^2} = fa,$$

welches die Gleichung einer Reihe von Kreiſen iſt, deren Mittelpunkte an Axe der x liegen, und deren Halbmeſſer zu den Entfernungen der Mittelp vom Anfangspunkte der Coordinaten in der durch das Zeichen f angeden Relation ſtehen. Offenbar leiſtet die Umſchließungscurve aller dieſer K der geometriſchen Aufgabe Genüge, welche darin beſteht: eine Curve mittelſt der durch die gegebene Differenzialgleichung au drückten Relation zu beſtimmen. Die Gleichung der Umſchließungs iſt genau das ſinguläre Integral, welches ſich aus der Elimination v zwiſchen den Gleichungen (d), (d'_2) ergibt, oder was wegen der Glei

) auf daſſelbe hinausläuft, die Gleichung, welche aus der Elimination von wiſchen der Gleichung (3) und ihrer Ableitung in Beziehung auf a, nämlich:

$$\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} - f'a = 0$$

vorgeht.

§. 492. Da die Coordinaten ξ, η des Krümmungsmittelpunktes einer nen Curve durch die Formeln:

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

geben werden (§. 190), ſo müſſen, wenn man die Gleichung der Evolute rch:

$$\varphi(\xi, \eta) = 0, \quad \text{oder} \quad \eta = f\xi \qquad (f)$$

drückt, die Coordinaten x, y ihrer Evolventen der Differenzialgleichung der eiten Ordnung:

$$y + \frac{1+y'^2}{y''} = f\left[x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right] \qquad (a)$$

ügen. Um dieſe Gleichung zu integriren, differenzirt man ſie zuvörderſt in ziehung auf die unabhängige Veränderliche x, und man ſieht, daß die abeitete Gleichung die Form:

$$\left\{y' + \frac{d\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)}{dx}\right\}\left\{1 + y'f'\left[x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]\right\} = 0$$

nehmen kann, ſo daß ſie in die beiden andern:

$$y' + \frac{d\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)}{dx} = 0 \qquad (a_1)$$

$$1 + y'f'\left[x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right] = 0 \qquad (a_2)$$

fällt.

Das Integral der erſten iſt:

$$y + \frac{1+y'^2}{y''} = b, \qquad (b)$$

b eine willkürliche Conſtante bezeichnet, und folglich hat man nach der leichung (a) auch:

$$x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = a \qquad (c)$$

fern die neue Conſtante a mit b durch die Relation:

$$b = fa \qquad (d)$$

bunden iſt.

Die Gleichungen (b) und (c) geben:

$$x - a + (y-b)y' = 0,$$

raus ſich durch eine neue Integration ergibt:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2. \qquad (e)$$

Dieſe letzte Gleichung, welche zwei willkürliche Conſtanten a, c und eine dr mit a durch die Gleichung (d) verbundene Conſtante b enthält, iſt folglich vollſtändige Integral der Gleichung (a). Dieſes vollſtändige Integral dr offenbar irgend einen der Osculationskreiſe einer beliebigen der Evolven der gegebenen Curve (f), oder vielmehr das Syſtem aller dieſer Osculatio kreiſe aus.

Eliminirt man nun die Größe $\frac{1+y'^2}{y''}$ zwiſchen den Gleichungen (a) u (a_2), was als möglich angenommen wird, wenn die Function f gegeben ſo erhält man eine Gleichung mit x, y, y', welche ein erſtes ſinguläres Integ der Gleichung (a) iſt. Durch eine neue Integration wird eine willkürli Conſtante h eingeführt, und man hat die Gleichung der Evolventen der gebenen Curven zwiſchen x, y, h, welche in der That nur eine einzige willk liche Conſtante enthalten muß, weil der Verlauf jeder Evolvente beſtimmt wenn man die Länge ihres Krümmungshalbmeſſers für einen, einem gegebe Punkte der Evolute entſprechenden Punkt derſelben willkürlich angenommen Jede Evolvente iſt die Berührungslinie einer Reihe in der Ausdehnung allgemeinen Integrales (e) enthaltener Kreiſe, und ſie geht ſogar mit jed dieſer Kreiſe eine Berührung der zweiten Ordnung ein.

Die Ableitung der Gleichung der Evolvente läuft vermittelſt der Formel

$$d\varrho = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$$
$$(\xi - x)\,d\xi + (\eta - y)\,d\eta = \varrho\,d\varrho$$
$$(\xi - x)\,d\eta - (\eta - y)\,d\xi = 0,$$

worin ϱ den Krümmungshalbmeſſer der Evolvente bezeichnet, und wovon b beiden erſten im §. 191 abgeleitet ſind, während ſich die dritte offenbar da aus ergibt, daß der Krümmungshalbmeſſer der Evolvente Tangente der Evolu iſt, auf eine einfache Quadratur hinaus. Aus dieſen Gleichungen folgt:

$$\varrho = h + \int \sqrt{1 + (f'\xi)^2} \cdot d\xi$$

$$\xi - x = \varrho \frac{d\xi}{d\varrho} = \frac{[h + \int \sqrt{1 + (f'\xi)^2} \cdot d\xi]}{\sqrt{1 + (f'\xi)^2}}$$

$$\eta - y \quad \text{oder} \quad f\xi - y = \varrho \frac{d\eta}{d\varrho} = \frac{[h + \int \sqrt{1 + (f'\xi)^2} \cdot d\xi] f'\xi}{\sqrt{1 + (f'\xi)^2}}.$$

Wenn die Function f particulariſirt und die in dem Ausdrucke von ϱ ang deutete Quadratur verrichtet iſt, ſo braucht man nur ξ zwiſchen dieſen beid letzten Gleichungen zu eliminiren, um die Gleichung der Evolventen mit x, y zu erhalten. Mit andern Worten, die Beſtimmung der Gleichung der Evo venten iſt einzig und allein von der Rectification der Evolute abhängig, u dieſes nach der charakteriſtiſchen Eigenſchaft der Evoluten der Fall ſein muß.

§. 493. Aus §. 284 folgt, daß das Syſtem der Projectionen der Krü mungslinien einer krummen Fläche auf eine der Coordinatenebenen durch Integration einer allen dieſen Projectionen gemeinſchaftlichen Differenzi gleichung (i) erhalten wird. Nimmt man z. B. das Ellipſoid mit drei u gleichen Axen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ſo iſt die Differenzialgleichung der Projectionen der Krümmungslinien auf d Ebene der xy:

$$Axyy'^2 + (x^2 - Ay^2 - B)y' - xy = 0, \qquad (e)$$

der Kürze wegen:

$$\frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)} = A, \quad \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2} = B$$

ſetzt iſt. Differenzirt man die Gleichung (e), ſo erhält man nach verrich-er Reduction:

$$(2Axyy' + x^2 - Ay^2 - B)\,y'' + (Ay'^2 + 1)(xy' - y) = 0,$$

d wenn man für das Polynom $x^2 - Ay^2 - B$ ſeinen aus der Gleichung) gezogenen Werth ſetzt, ſo nimmt die vorhergehende Gleichung die Form an:

$$\left(\frac{Ay'^2 + 1}{y'}\right)[xyy'' + y'(xy' - y)] = 0,$$

raus ſich die beiden Auflöſungen:

$$xyy'' + y'(xy' - y) = 0 \qquad (e_1)$$

$$\frac{Ay'^2 + 1}{y'} = 0 \qquad (e_2)$$

geben.

Beſchäftigen wir uns zunächſt mit der erſten, welche gibt:

$$\frac{y}{x} \cdot y'' + y' \cdot \frac{xy' - y}{x^2} = 0,$$

d wenn man zweimal hinter einander integrirt:

$$\frac{y}{x} \cdot y' = \alpha \qquad (4)$$

$$y^2 = \alpha x^2 + \beta. \qquad (5)$$

an hätte ſich der zweiten Integration überheben, und nach der in andern illen befolgten Methode y' zwiſchen den Gleichungen (e) und (4) eliminiren nnen. Durch dieſe Rechnung erhält man:

$$Ax^2\alpha^2 + (x^2 - Ay^2 - B)\alpha - y^2 = 0, \qquad (6)$$

d wenn man das Reſultat mit der Gleichung (5) vergleicht, ſo ergibt ſich:

$$\beta = -\frac{B\alpha}{A\alpha + 1} = -\frac{a^2b^2(a^2 - b^2)\alpha}{a^2(b^2 - c^2)\alpha + b^2(a^2 - c^2)}, \qquad (7)$$

ein man kann die Conſtante β der Kürze wegen hinweglaſſen.

Es ſei (x_0, y_0, z_0) ein Punkt des Ellipſoides, durch welchen eine beſtimmte ümmungslinie gehen muß, ſo gibt die Gleichung (6):

$$\alpha = \frac{-(x_0^2 - Ay_0^2 - B) \pm \sqrt{(x_0^2 - Ay_0^2 - B)^2 + 4Ax_0^2y_0^2}}{2Ax_0^2}. \qquad (8)$$

ir wollen nun annehmen, daß:

$$a > b > c$$

, ſo daß die Conſtanten A, B poſitiv werden, ſo ſind die beiden durch die leichung (8) gegebenen Werthe von α reell und von entgegengeſetztem Zeichen; n poſitiven Werthe von α entſpricht vermöge der Gleichung (7) ein negativer erth von β, und dem negativen Werthe von α entſpricht ein poſitiver Werth n β, denn es iſt:

$$2x_0^2(A\alpha+1) = x_0^2 + Ay_0^2 + B - \sqrt{(x_0^2 - Ay_0^2 - B)^2 + 4Ax_0^2y_0^2}$$
$$= x_0^2 + Ay_0^2 + B - \sqrt{(x_0^2 + Ay_0^2 + B)^2 - 4Bx_0^2},$$

so daß der in dem Ausdrucke von β vorkommende Nenner $A\alpha+1$ für negativen Werthe von α positiv bleibt. Hieraus folgt, daß die Projectio der beiden Krümmungslinien, welche sich auf dem Ellipsoide im Punkte x_0, y_0 rechtwinklig durchschneiden, auf der Ebene der xy eine auf denselben Pu punkt und auf dieselben Axen bezogene Ellipse und Hyperbel sind, indem Queraxen der Hyperbel mit der Axe der x zusammenfällt. Wenn man möge dieser Bemerkung $\frac{\beta}{\alpha} = -\xi^2$, $\beta = \pm\eta^2$ setzt, so sind die Größen immer reell, die doppelte Reihe der Projectionen der Krümmungslinien mit der doppelten Reihe der durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{\xi^2} \pm \frac{y^2}{\eta^2} = 1$$

gegebenen Ellipsen und Hyperbeln zusammen, und die Linien ξ, η, oder Halbaxen dieser Curven sind durch die Gleichung (7) mit einander verbun welche sich in:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2(a^2 - b^2)}\xi^2 - \frac{b^2 - c^2}{b^2(a^2 - b^2)}\eta^2 = 1$$

verwandelt, und welche man vermittelst einer Hyperbel oder Ellipse struiren kann.

§. 494. Betrachten wir zuerst die Hülfshyperbel:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2(a^2 - b^2)}\xi^2 - \frac{b^2 - c^2}{b^2(a^2 - b^2)}\eta^2 = 1,$$

deren Construction die Reihe der Krümmungslinien, deren elliptische Projec nen in der Gleichung:

$$\frac{x^2}{\xi^2} + \frac{y^2}{\eta^2} = 1$$

enthalten sind, bestimmt. Die Größe ξ^2 kann von dem Werthe:

$$\frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}$$

bis ins Unendliche wachsen, und die correspondirenden Werthe von η^2 resp. $0, \infty$. Nach der Voraussetzung über die Größenfolge der Linie a, ist immer $\eta^2 < \xi^2$ und die große Axe aller elliptischen Projectionen lieg der Axe der x (Fig. 97). Die Ellipse verwandelt sich in eine gerade und fällt mit dieser Axe der x genau zusammen, wenn man $\eta^2 = 0$ Sie fällt mit dem Durchschnitte des Ellipsoides vermittelst der Ebene der zusammen, wenn man $\eta^2 = b^2$, folglich $\xi^2 = a^2$ setzt. Für größere W von η^2 sind die durch die Gleichung (1_1) gegebenen Ellipsen zwar in reell; aber gehören nicht zu den Krümmungslinien des Ellipsoides.

Betrachten wir nur die Hülfsellipse:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2(a^2 - b^2)}\xi^2 + \frac{b^2 - c^2}{b^2(a^2 - b^2)}\eta^2 = 1,$$

deren Construction die Reihe der Krümmungslinien mit hyperbolischen jectionen:

$$\frac{x^2}{\xi^2} - \frac{y^2}{\eta^2} = 1 \qquad (f_2)$$

bestimmt. Die Größe ξ^2 kann von Null bis zu dem Werthe (g) wachsen, während η^2 von dem Werthe:

$$\frac{b^2(a^2 - b^2)}{b^2 - c^2}$$

is zu Null abnimmt. Die Hyperbel (f_2) fällt an der ersten Grenze mit der re der y und an der zweiten mit der Axe der x zusammen.

Aus dieser doppelten Construction folgt, daß alle elliptischen und hyperolischen Projectionslinien ihre Concavität gegen die beiden auf der Axe der liegenden Punkte zu kehren, deren Abscissen:

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \qquad (h)$$

ıb, und welche die Projectionen der vier Stabelpunkte des Ellipsoides . 283) auf die Ebene der xy sind.

Wir hätten nun noch die durch die Gleichung (e_2) gegebenen Auflösungen unterſuchen; aber da der Coefficient A positiv und nach der Voraussetzung r Factor $Ay'^2 + 1 = 0$ ist, so würde keine reelle Auflösung stattfinden kön-

n, und die Verbindung der Gleichung $\frac{1}{y'} = 0$ mit (e) würde die schon erltene Auflösung $x = 0$ wieder geben.

§. 495. Wenn man $a < b < c$ gesetzt hätte, so wären die Coefficien- A, B immer positiv geblieben, und es wäre an der vorhergehenden Unterchung weiter nichts geändert, als daß man die nach der Axe der y gerichten großen Axen der elliptischen Projectionen gefunden hätte.

Es kommt also nur noch darauf an, die Projectionen der Krümmungsnien auf der Ebene zu construiren, welche die größte und kleinste Axe des llipsoides enthält, und in der Voraussetzung:

$$a > c > b$$

e Ebene der xy wird. Der Coefficient B bleibt positiv; aber da der Coefient A negativ wird, so folgt aus der Gleichung (8), daß die beiden Werthe r Constante α immer dasselbe Zeichen haben. Wir behaupten ferner, daß beide negativ sind, so daß die Ungleichheit:

$$x_0^2 - Ay_0^2 - B < 0$$

ttfindet, oder, wenn man die Werthe von A, B substituirt:

$$\frac{x_0^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \cdot \frac{c^2 - b^2}{a^2 - b^2} < 1.$$

ı aber der Punkt (x_0, y_0, z_0) der Oberfläche des Ellipsoides angehört, folgt:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1,$$

o das Zeichen $<$ den Fall der Gleichheit nicht ausschließt) und wenn diese gleichheit erfüllt wird, so wird es die vorhergehende um so mehr, denn die rhältnisse:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}, \quad \frac{c^2 - b^2}{a^2 - b^2}$$

ſind nach der Vorausſetzung in Beziehung auf die Größenfolge der Linien a, b, c kleiner, als die Einheit. Ferner iſt vermöge der Gleichung (7) und der Zeichen von A, B, α die Conſtante β immer poſitiv. Man kann alſo $\frac{\beta}{\alpha} = -\xi^2$, $\beta = \eta^2$ ſetzen, ſo daß die doppelte Reihe der Krümmungslinien mit der Reihe von Ellipſen zuſammenfällt, welche man erhält, wenn man in der Gleichung:

$$\frac{x^2}{\xi^2} + \frac{y^2}{\eta^2} = 1 \qquad (f_1)$$

die Parameter ξ, η, welche ſelbſt die Coordinaten einer Hülfsellipſe:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2(a^2 - b^2)}\xi^2 + \frac{c^2 - b^2}{b^2(a^2 - b^2)}\eta^2 = 1 \qquad (10)$$

ſind, variiren läßt.

Der Parameter ξ^2 variirt zwiſchen den Grenzen:

$$0, \quad \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2},$$

während η^2 zwiſchen den Grenzen:

$$\frac{b^2(a^2 - b^2)}{c^2 - b^2}, \quad 0$$

variirt. Wenn man $\xi^2 = 0$ ſetzt, ſo fällt die Ellipſe (f_1) mit der Axe der y zuſammen, und iſt in dem Sinne der y länglich, ſo lange $\xi^2 < \frac{a^2b^2}{c^2}$ iſt. Sie wird ein Kreis, wenn ξ^2 dieſen Werth erreicht, wird dann für größere Werthe von ξ^2 in dem Sinne der x länglich, fällt mit dem Durchſchnitte des Ellipſoides mit der Ebene xy zuſammen, wenn $\xi^2 = a^2$ iſt, wird immer länglicher und fällt zuletzt mit der Axe der x zuſammen, wenn ξ^2 ſeine obere Grenze erreicht, oder wenn η^2 verſchwindet (Fig. 98).

Es bleibt nun noch die durch die Gleichung:

$$Ay'^2 + 1 = 0$$

gegebene ſinguläre Auflöſung, welche wegen des negativen Zeichens von A reell iſt, zu betrachten übrig. Wird der daraus abgeleitete Werth von y' in die Gleichung (e) ſubſtituirt, ſo erhält man:

$$b^2(a^2 - c^2)x^2 \pm 2ab\sqrt{(a^2 - c^2)(c^2 - b^2)} \cdot xy + a^2(c^2 - b^2)y^2 = a^2b^2(a^2 - b^2),$$

und dieſe letzte Gleichung zerfällt in die beiden folgenden:

$$b\sqrt{a^2 - c^2} \cdot x \pm a\sqrt{c^2 - b^2} \cdot y = ab\sqrt{a^2 - b^2}$$

$$b\sqrt{a^2 - c^2} \cdot x \pm a\sqrt{c^2 - b^2} \cdot y = -ab\sqrt{a^2 - b^2},$$

welche vier durch die Scheitel der Hülfsellipſe (10) gehende gerade Linien ausdrücken. Nach der Theorie der ſingulären Integrale müſſen dieſe vier geraden Linien alle durch die Gleichung (f_1) gegebene Ellipſen berühren, wie man ſich überzeugen kann, wenn man die Gleichung (10) berückſichtigt, welche nur einen der Parameter ξ, η willkürlich läßt.

Da der Durchſchnitt des Ellipſoides mit der Ebene der xy eine der Krümmungslinien iſt, ſo berührt er die eben beſtimmten vier geraden Linien

in vier Punkten $0, 0', 0'', 0'''$, welche genau die Stabelpunkte der krummen Fläche ſind. Denn für die Abſciſſen dieſer Punkte findet man:

$$x = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}},$$

und in dieſer Formel bezeichnet b die kleinſte, und c die mittlere Axe des Ellipſoides, ſo daß ſie mit der Formel (h) übereinſtimmte, wenn man durch b die mittlere und durch c die kleinſte Axe bezeichnete, welche Bedeutung dieſe Buchſtaben in der Gleichung (h) in der That haben.

Die Auflöſung $\frac{1}{y'} = 0$ würde nur die particulären Auflöſungen $x = 0$, $y = 0$ wieder geben.

Die elegante Conſtruction der Krümmungslinien des Ellipſoides rührt von Monge her, und Leroy hat eine Verbeſſerung daran angebracht, indem er den Factor $Ay'^2 + 1$ in Rechnung bringt, um die ſinguläre Auflöſung direct zu erhalten.

§. 496. Im §. 277 ſagten wir, daß man es als für ſich klar annehmen könne, daß die Kugelfläche die einzige krumme Fläche iſt, für deren ſämmtliche Punkte die beiden Krümmungshalbmeſſer einander gleich und nach demſelben Sinne gerichtet ſind. Um aber über dieſen wichtigen Theil der Theorie der krummen Flächen nichts Weſentliches zu wünſchen übrig zu laſſen, wollen wir den Beweis des eben erwähnten Satzes hier mittheilen.

Die beiden partiellen Differenzialgleichungen, welche für alle Punkte der in Rede ſtehenden krummen Fläche erfüllt werden müſſen, ſind (§. 282):

$$(1 + q^2)s - pqt = 0, \quad (1 + p^2)s - pqr = 0,$$

welche auch auf folgende Form gebracht werden können

$$\frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)}{dy} = 0, \quad \frac{d\left(\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)}{dx} = 0.$$

Bei der Integration muß man ſtatt der willkürlichen Conſtanten eine willkürliche Function der andern unabhängigen Veränderlichen, in Beziehung auf welche nicht integrirt wird, ſetzen, und auf dieſe Weiſe erhält man:

$$p = \varphi x \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad q = \psi y \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

woraus folgt:

$$p = \frac{\varphi x}{\sqrt{1 - (\varphi x)^2 - (\psi y)^2}}, \quad q = \frac{\psi y}{\sqrt{1 - (\varphi x)^2 - (\psi y)^2}},$$

$$dz = \frac{\varphi x \cdot dx + \psi y \cdot dy}{\sqrt{1 - (\varphi x)^2 - (\psi y)^2}}.$$

Aber die Gleichung jeder krummen Fläche muß der Bedingung der Integrabilität:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}, \quad \text{folglich:} \quad \varphi' x = \psi' y$$

genügen, und dieſe letzte Gleichung muß identiſch ſein, d. h. für alle Werthe von x und y ſtattfinden. Man muß folglich haben:

$$\varphi' x = \frac{1}{k}, \quad \psi' y = \frac{1}{k},$$

wo $\frac{1}{k}$ eine willkürliche Conſtante bezeichnet. Hieraus ergibt ſich durch Integration:

$$\varphi x = \frac{x - a}{k}, \quad \psi x = \frac{y - b}{k}$$

$$dz = \frac{(x-a)\,dx + (y-b)\,dy}{\sqrt{k^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}},$$

und wenn man nochmals integrirt, ſo erhält man:

$$z - c = -\sqrt{k^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2},$$

die Gleichung einer Kugel, deren Halbmeſſer und Mittelpunktscoordinaten willkürlich ſind.

§. 497. Aus §. 126 wiſſen wir, daß die Projectionen der Niveaulinien und der Linien des ſtärkſten Falles oder des ſtärkſten Abhanges einer krummen Fläche auf die Ebene der xy durch die partiellen Differenzialgleichungen:

$$p + qy' = 0, \quad py' - q = 0$$

ausgedrückt werden. Wenn nun eine Familie krummer Oberflächen durch eine partielle Differenzialgleichung von der Form $f\left(x, y, \frac{q}{p}\right) = 0$ charakteriſirt wird, ſo iſt $f(x, y, y') = 0$ die Differenzialgleichung der Linien des ſtärkſten Falles für alle Flächen dieſer Familie.

Da z. B. die Rotationsoberflächen um die Axe der z durch die partielle Differenzialgleichung $py = qx$ charakteriſirt werden (§. 254), ſo iſt $xy' = y$, folglich $y = cx$, wo c eine willkürliche Conſtante bezeichnet, die Gleichung der Linien des ſtärkſten Falles, und in der That fallen dieſe Linien mit den Meridiancurven der Oberfläche zuſammen, welche ſich nach geraden durch den Anfangspunkt gehenden Linien auf die Ebene der xy projiciren.

Ebenſo iſt für die geraden conoidiſchen Flächen (§. 253), deren partielle Differenzialgleichung $px = -qy$ iſt, die Differenzialgleichung der Projectionen der Linien des ſtärkſten Falles $yy' = -x$, folglich $x^2 + y^2 = c^2$, d. h. die Linien des ſtärkſten Falles der Flächen dieſer Familie projiciren ſich auf die Ebene der xy nach Kreiſen, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten iſt, wie ſich daraus ergibt, daß alle Niveaulinien durch die Axe der z gehende gerade Linien ſind.

§. 498. Die Niveaulinien des Ellipſoides:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (i)$$

projiciren ſich auf die Ebene der xy nach concentriſchen und ähnlichen Ellipſen, welche durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2 \qquad (i')$$

ausgedrückt werden, indem ſich der Parameter zwiſchen Null und der Einheit ändern kann. Die Differenzialgleichung der Projectionen der Linien des ſtärkſten Falles nimmt die Form:

$$\frac{a^2 dx}{x} = \frac{b^2 dy}{y}$$

an, woraus folgt, wenn γ eine willkürliche Conſtante bezeichnet:

$$y^{b^2} = \gamma x^{a^2}. \qquad (k)$$

Wenn die Axen a, b commenſurabel ſind, ſo werden die Linien des ſtärkſten Falles algebraiſche Curven, und im entgegengeſetzten Falle ſind es transcendente Curven.

Es ſei (x_0, y_0, z_0) ein Punkt des Ellipſoides, durch welchen man eine Linie des ſtärkſten Falles legen will, ſo verwandelt ſich die Gleichung (k) in:

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)^{b^2} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{a^2},$$

und was für rationale oder irrationale Werthe man auch den Exponenten a^2, b^2 beilegen mag, ſo iſt die Curve doch für alle Werthe von x, y ſtetig, welche reſp. dieſelben Zeichen haben, als x_0, y_0. Mit andern Worten, wenn wir uns das Ellipſoid durch die auf einander ſenkrechten Ebenen der xz und yz in vier ſymmetriſche Regionen getheilt denken, ſo erfährt die Curve keine Unterbrechung der Stetigkeit, ſo lange ſie nicht aus der Region heraustritt, welcher der Punkt x_0, y_0, z_0 angehört. In dem Scheitel des Ellipſoides berührt ſie die Ebene der xz, oder die der yz, je nachdem $a^2 \gtrless b^2$ iſt, und ſie vereinigt ſich daſelbſt mit allen in einer der drei übrigen Regionen des Ellipſoides, oder ſelbſt in der Region, worin ſich der Punkt (x_0, y_0, z_0) bereits befindet, beliebig conſtruirten Linien des ſtärkſten Falles.

In dem beſondern Falle, wo die Zahlen a^2, b^2 commenſurabel ſind, kann man der Einfachheit wegen für dieſe Zahlen ihnen proportionale ganze Zahlen m, n, welche prim unter ſich ſind, ſetzen, was auf die Multiplication der Gleichungen (i), (i′) durch einen conſtanten Factor hinausläuft. Alsdann kann die algebraiſch gewordene Niveaulinie ſich nicht im Scheitel des Ellipſoides ſchließen, und ſie bildet algebraiſch nur eine und dieſelbe Curve mit einer andern Linie des ſtärkſten Falles, ſo daß die Projection der vollſtändigen Curve auf die Ebene der xy eine der in Fig. 99, 100 und 101 angegebenen Geſtalten hat. Wenn man $m > n$ oder $a^2 > b^2$ annimmt, wodurch die Allgemeinheit der Conſtruction nicht beeinträchtigt wird, ſo entſpricht die Fig. 99 dem Falle, wo m ungerade und n gerade iſt, die Fig. 100 dem Falle, wo m gerade und n ungerade iſt, und die Fig. 101 dem Falle, worin m und n beide ungerade Zahlen ſind. Nun iſt aber einleuchtend, daß die Commenſurabilität der Zahlen a^2, b^2 oder m, n und die arithmetiſche Eigenſchaft, daß ſie gerade oder ungerade Zahlen ſind, nichts an den geometriſchen Bedingungen der Aufgabe verändern, welche darin beſteht, auf einem Ellipſoide Linien des ſtärkſten Falles, oder auf einer Ebene Curven zu beſchreiben, welche auf einer Reihe concentriſcher und ähnlicher Ellipſen ſenkrecht ſind. Es würde für die plötzliche Veränderung der Form der Linien des ſtärkſten Falles, oder ihrer Projectionen kein geometriſcher Grund vorhanden ſein, wenn ſie z. B. im Scheitel des Ellipſoides oder im Anfangspunkte der Coordinaten eine Inflexion ſtatt einer Rückkehr erführen, und zwar vermöge einer beliebig kleinen Veränderung des Verhältniſſes $\frac{m}{n}$, welches das Verhältniß der Quadrate zweier

Halbaren dts Ellipsoides ist. Es erhellet also, daß der Zusammenhang zwischen je zwei von dem Scheitel ausgehenden Krümmungslinien in dem Falle der Commensurabilität des Verhältnisses $\frac{m}{n}$ ein rein algebraisches Factum, eine Folgerung aus der Regel der Zeichen ist, wofür sich aus der Natur der Aufgabe kein Grund angeben laßt, und welche keinem geometrischen Factum entspricht.

Diese Bemerkungen waren nothwendig zur Vervollständigung des bisher und namentlich des im Buch 4 Kapitel 4 über die Natur des Connexes zwischen der Geometrie und Algebra Gesagten.

§. 499. Der Fall der krummen Fläche im Punkte (x, y, z) wird nach §. 126 durch die Wurzelgröße: $\sqrt{p^2 + q^2}$ gemessen, welche sich für das Ellipsoid in:

$$\frac{c^2}{z}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}$$

verwandelt. Auf derselben Niveaulinie entspricht folglich der größte und kleinste Fall dem größten und kleinsten Werthe der Function:

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4},$$

welche sich vermöge der Gleichung (i') in:

$$\frac{k^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)$$

verwandelt. Wir wollen, um die Begriffe zu fixiren, $a > b$ annehmen, so entspricht das Maximum der Function $z = 0$ und das Minimum $x = a$ oder $y = 0$. Folglich ist der Durchschnitt des Ellipsoides mit der Ebene, welche die verticale Axe und die kleinste der beiden horizontalen Axen enthält, die Linie des stärksten Falles, worauf der Fall für dieselbe Verticalhöhe am größten ist, oder in der geometrischen Sprache, diese Linie entspricht einem maximum maximorum. Dagegen ist der Durchschnitt des Ellipsoides mit der Ebene, welche außer der verticalen Axe noch die größte der horizontalen Axen enthält, unter den Linien des stärksten Falles die des geringsten Falles, und sie entspricht einem minimum maximorum.

§. 500. Die Linien des stärksten Falles sind diejenigen, welche ein der Wirkung der Schwere folgender Flüssigkeitsfaden auf der Oberfläche, wozu sie gehören, beschreiben würde, und die Gesammtheit der Linien des stärksten Falles, welche man sich auf der Erdoberfläche gezogen, vorstellen kann, bestimmt das orographische und hydrographische System einer Gegend. Der Reisende, welcher in ein Thal hinabsteigt, geht längs der Linie des stärksten Falles fort, welche gewöhnlich von einem Wasserstrome angegeben wird, und welche man mit dem Worte Thalweg bezeichnet, zu seiner Rechten und Linken bestimmen die Regenbäche der Hügel andere Linien des stärksten Falles, deren Thalweg in der ideellen Voraussetzung einer vollkommenen Stetigkeit der Formen die Berührungslinie oder Asymptote wäre. Die Hügel- oder Bergrücken schließen sich mit der sogenannten Wasserscheide, welche unter denselben Umständen die Berührungslinie oder Asymptote der gewöhnlichen Krümmungslinien sein würde. In Beziehung auf diese sind die Linien der Wasserscheiden

und des Thalweges in dem eben erklärten Sinne ebenfalls Linien des geringſten Falles. Endlich durchſchneiden ſich die Linien der Waſſerſcheide und des Thalweges unter rechten Winkeln, indem ſie ihre Krümmungen in den Punkten, welche man Engpäſſe nennt, und in welchen man die Wege und Kanäle die Waſſerſcheide durchſchneiden läßt, und welche den relativen Minimis der verticalen Ordinate der krummen Oberfläche entſprechen, nach entgegengeſetztem Sinne kehren.

Dieſes iſt der geometriſche Typus, auf welchen man die Configuration der durch allmälige und ſtetige Wirkungen entſtandene Thäler beziehen kann; aber im Allgemeinen ſind die großen Ungleichheiten der Erdoberfläche durch convulſiviſche Wirkungen und Verrückungen entſtanden, deren Spuren nicht verwiſcht ſind, ungeachtet des langen Einfluſſes atmoſphäriſcher Agentien, welche die Vertiefungen fortwährend auszufüllen, und die Erhabenheiten der Umriſſe eben zu machen ſtreben. Aus den Stetigkeitsunterbrechungen der Werthe der Coefficienten p und q folgt, daß die Berührungsebene und die Normale plötzlich von einer Richtung zu einer andern übergeht. Alsdann treten an die Stelle der Linien der Waſſerſcheide und des Thalweges Kanten, welche die Linien des ſtärkſten Falles gewöhnlich unter endlichen Winkeln durchſchneiden.

§. 501. Die Beſtimmung der Projectionen der Linien des ſtärkſten Falles iſt als beſonderer Fall in einer Aufgabe enthalten, welche unter dem Namen des „Problemes der Trajectorien" zu der Zeit, wo die Bernouilli's die Ideen Leibnitz's zur Ausführung brachten, und die erſten Entwickelungen der Integralrechnung zur Folge hatten, berühmt geworden iſt.

In rein geometriſchem Sinne verſteht man nämlich unter Trajectorie die Curve, welche alle durch die Gleichung:

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (l)$$

ausgedrückten Curven, wenn man den Parameter a ſich ſtetig ändern läßt, unter einem conſtanten Winkel durchſchneidet. Wenn der Durchſchnittswinkel ein rechter iſt, ſo können die beiden Syſteme der orthogonalen Curven für die Syſteme der Projectionen der Niveaulinien und der Linien des ſtärkſten Falles einer krummen Fläche auf die Ebene der xy genommen werden.

Es ſei im Allgemeinen α die Tangente des Einfallswinkels der Trajectorien und ξ, η die zu den Axen der x und der y parallelen veränderlichen Coordinaten einer derſelben, ſo hat man für den Durchſchnittspunkt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dF}{dx} : \frac{dF}{dy}, \quad \alpha = \left(\frac{d\eta}{d\xi} - \frac{dy}{dx}\right) : \left(1 + \frac{d\eta}{d\xi} \cdot \frac{dy}{dx}\right),$$

folglich:

$$\alpha\left(\frac{dF}{dy} \cdot \frac{dF}{dx} \cdot \frac{d\eta}{d\xi}\right) = \frac{dF}{dy} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{dF}{dx}. \qquad (m)$$

Im Durchſchnittspunkte iſt $x = \xi$, $y = \eta$, ſo daß die vorhergehende Gleichung nur die Veränderlichen $x, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}$, und den Parameter a enthält. Nachdem man dieſen Parameter vermittelſt der Gleichung $F(\xi, \eta, a) = 0$ fortgehafft hat, iſt die Gleichung (m) die Differenzialgleichung der Trajectorie.

Wir wollen annehmen, daß die durchſchnittenen Curven durch die Gleichung $y^n = ax^m$ ausgedrückt werden, ſo iſt die Differenzialgleichung der Trajectorie:

$$\alpha\left(n\xi + m\eta \frac{d\eta}{d\xi}\right) + m\eta - n\xi \frac{d\eta}{d\xi} = 0, \qquad (m')$$

und da ſie homogen iſt, ſo kann ſie nach der Methode im §. 353 behan werden. Wenn $m = n = 1$ iſt, ſo iſt das Syſtem der durchſchnittenen Li ein Syſtem durch den Anfangspunkt gehender gerader Linien, und die G chung (m') verwandelt ſich in:

$$\alpha(\xi d\xi + \eta d\eta) + \eta d\xi - \xi d\eta = 0,$$

woraus folgt, wenn man durch $\xi^2 + \eta^2$ dividirt, und dann integrirt:

$$\alpha \log. \cdot \sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \text{arc. tang.} \frac{\eta}{\xi} = c.$$

Setzt man:

$$\xi = r \cos. \varphi, \quad \eta = r \sin. \varphi, \quad e^{\frac{c}{\alpha}} = b,$$

ſo nimmt das vorhergehende Integral die Form an:

$$r = b e^{\frac{\varphi}{\alpha}}$$

und iſt die Gleichung einer logarithmiſchen Spirale (§. 181), welche in That die Eigenſchaft hat, daß ſie die durch den Pol gezogenen geraden Li unter einem conſtanten Winkel durchſchneidet.

Um die Orthogonaltrajectorien zu erhalten, muß man $\alpha = \infty$ ſe wodurch ſich die Gleichung (m') auf $n\xi d\xi + m\eta d\eta = 0$ reducirt, deren tegral $n\xi^2 + m\eta^2 = c$ eine Reihe concentriſcher und ähnlicher Ellipſen Hyperbeln angehört, je nachdem die Exponenten m, n gleiche oder entge geſetzte Zeichen haben, d. h. je nachdem die durchſchnittenen Curven Elli oder Hyperbeln ſind.

Sechstes Kapitel.

Ueber die Integration der gleichzeitigen Differenzialgleichungen.

§. 502. Betrachten wir, wie im §. 165, ein Syſtem von ν Gleic gen zwiſchen der unabhängigen Veränderlichen t und den von t abhängige Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ nebſt deren Ableitungen $x', y', z', \ldots; x'', y'', z'', \ldots$, ſo beſteht das Problem der Integration der gleichzeitigen Differenzialgleic gen darin, aus den ſich unter dieſer Form darbietenden Gleichungen die We von $x, y, z, \ldots$ als Functionen von t abzuleiten, indem man dieſen Wer durch die Einführung der gehörigen Anzahl willkürlicher Conſtanten alle zuläſſige Allgemeinheit ertheilt. Um an einer Anwendung die Begriffe fixiren, wollen wir uns ein in Bewegung befindliches Syſtem materieller Pu denken, welche gegenſeitige Anziehungen oder Abſtoßungen auf einander üben, die ſich mit ihren gegenſeitigen Entfernungen ändern. Wir wollen Zeit mit t und die Coordinaten der beweglichen Punkte mit $x, y, z; x_1, y_1, z_1$ bezeichnen. Die unendlich kleinen Veränderungen der Geſchwindigkeiten von den auf die materiellen Punkte wirkenden Kräften, und folglich von Coordinaten, durch welche ſich ihre gegenſeitigen Entfernungen ausdrücken laſ abhängig. Die Geſchwindigkeiten ſelbſt werden durch die unendlich klei

...en der Coordinaten ausgedrückt, und ohne hier näher in mecha... ...ngen einzugehen, sieht man doch leicht ein, daß alle diese ge... ...ngigkeiten auf Gleichungen führen müssen, worin zugleich die ...ordinaten der beweglichen Punkte und ihre in Beziehung auf die Zeit ge...nommenen Differenzialcoefficienten vorkommen müssen. Es kommt nun darauf an, die Werthe der Coordinaten als Functionen der Zeit daraus abzuleiten und dann die Veränderliche t zu eliminiren, so daß man Gleichungen zwischen x, y, z; x_1, y_1, z_1; ꝛc. erhält; welches die Gleichungen der von den beweglichen Punkten im Raume beschriebenen Curven sind. Die schönste Untersuchung der Naturphilosophie, nämlich die Theorie der Bewegungen der Planeten, wird auf ein Problem der Integration gleichzeitiger Differenzialgleichungen zurückgeführt.

§. 503. Auf welche Weise man das System der Integralgleichungen, oder das System der Gleichungen mit t, x, y, z, ꝛc., welche den gegebenen Differenzialgleichungen genügen, auch erhalten mag, so muß dieses System, um denselben Grad von Allgemeinheit zu haben, als das gegebene System, noch eine bestimmte Anzahl willkürlicher Constanten enthalten, welche sich in dem besondern Falle durch ähnliche Betrachtungen, wie die im §. 465, leicht bestimmen läßt.

Wir wollen zwei Differenzialgleichungen:

$$f(t; x, x', \ldots x^{(m)}; y, y', \ldots y^{(n)}) = 0 \qquad (f)$$

$$f_1(t; x, x', \ldots x^{(m_1)}; y, y', \ldots y^{(n_1)}) = 0 \qquad (f_1)$$

betrachten und zuerst den Fall untersuchen, wo $m > m_1$, $n < n_1$ ist. Wenn man für einen Werth von t, welchen wir mit t_0 bezeichnen wollen, die correspondirenden Werthe:

$$x_0, x'_0, \ldots x_0^{(m-1)}; y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n_1-1)}, \qquad (o)$$

willkürlich annimmt, so ergibt sich aus der Gleichung (f) der Werth von $x_0^{(m)}$, aus der Gleichung (f_1) der Werth von $y_0^{(n_1)}$, und aus ihren successiven Ableitungen ergeben sich die Werthe von:

$$x_0^{(m+1)}, x_0^{(m+2)}, \text{ ꝛc.}; y_0^{(n_1+1)}, y_0^{(n_1+2)}, \text{ ꝛc.}$$

Man kann also vermittelst der Taylor'schen Reihe die Werthe von x, y als Functionen von t bestimmen, welche $n + n_1$ willkürliche Constanten (o) enthalten. Unter welcher Form man also die beiden Integralgleichungen, durch welche die Werthe von x, y als Functionen von t bestimmt werden, auch erhalten hat, so muß dieses System von Integralen doch $m + n_1$ willkürliche Constanten von solcher Beschaffenheit enthalten, daß sich das System der Größen (o) aus den Werthen dieser Constanten ableiten läßt, und umgekehrt.

Die Schlüsse würden noch dieselben bleiben, wenn zugleich $m = m_1$, $= n_1$ wäre, oder wenn blos eine dieser Gleichungen stattfände. Aber wenn gleich $m > m_1$, $n > n_1$ wäre, so ließe sich die Rechnung nicht mehr auf dieselbe Weise anstellen, und um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß

$$m + n_1 > m_1 + n, \text{ oder } m - m_1 > n - n_1$$

sein, so ergibt sich durch $(n - n_1)$ malige Differenziation der Gleichung (f_1):

$$\left.\begin{array}{l} f'_1(t; x, x', \ldots x^{(m_1)}, x^{(m_1+1)}; y, y', \ldots y^{(n_1)}, y^{(n_1+1)}) = 0 \\ f''_1(t; x, x', \ldots x^{(m_1+2)}; y, y', \ldots y^{(n_1+2)}) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_1^{(n-n_1)}(t; x, x', \ldots x^{(m_1+n-n_1)}; y, y', \ldots y^{(n)}) = 0 \end{array}\right\} \qquad (f'_1)$$

Vermittelſt der $m + n_1$ anfänglichen Werthe (o) beſtimmt [illegible] Gleichung (f), (f_1) und (f'_1) die Werthe von:

$$x_0^{(n)};\ y_0^{(n)},\ y_0^{(n+1)},\ \ldots\ y_0^{(n)},$$

worauf die ſucceſſiven Ableitungen der Gleichung (f) und der letzten Gleichungen (f'_1) ſucceſſive die Werthe von:

$$x_0^{(m+1)},\ x_0^{(m+2)},\ \text{ꝛc.};\ y_0^{(n+1)},\ y_0^{(n+2)},\ \text{ꝛc.}$$

beſtimmen, und man kann die allgemeinen Werthe von x, y, wie vorhin, die Taylor'ſche Reihe conſtruiren. Es muß alſo das Syſtem der vo digen Integrale der Gleichungen (f), (f_1) in allen Fällen $m + n_1$ liche Conſtanten enthalten, wo $m + n_1$ die größte der Zahlen m, $m_1 + n$ iſt.

§. 504. Aus §. 165 wiſſen wir, daß man aus einem Syſteme vielen Differenzialgleichungen, als man Functionen x, y, z, ꝛc. der unabh Veränderlichen t hat, immer eine Endgleichung ableiten kann, welche t und die Ableitungen von x in Beziehung auf t enthält. Das Probl Integration eines Syſtemes gleichzeitiger Differenzialgleichungen kann alſ auf die Integration von gewöhnlichen Differenzialgleichungen zwiſch Veränderlichen zurückgeführt werden. Gewöhnlich genügt es, die E renzialgleichung zwiſchen t und x zu integriren, indem die übrigen Ve lichen y, z, ꝛc. durch bloße algebraiſche Eliminationen als Functionen vo halten werden, und in dieſem Falle gibt die Anzahl der willkürlichen C ten, welche in den vollſtändigen Integralen des gegebenen Syſtem Differenzialgleichungen vorkommen müſſen, die Ordnung der Endgleich t und x an. Aber es kann auch geſchehen, daß bei der Eliminationsr welche auf die Endgleichung führt, $y', y'', \ldots$ nebſt y verſchwinden, folglich die Ordnung dieſer Endgleichung erniedrigt wird. Nach der S tion dieſer Endgleichung hat man zur Beſtimmung des Werthes vo Function von t eine Gleichung von der Form:

$$\varphi(y, y', y'', \ldots) = \psi t$$

zu integriren, und die durch dieſe neue Integration eingeführten will Conſtanten machen die Anzahl der Conſtanten, welche in den allgemei tegralen des gegebenen Syſtemes von Differenzialgleichungen vorkommen vollſtändig. Eine umſtändlichere Unterſuchung der verſchiedenen möglich würde zu weitläufig und hier von keinem reellen Nutzen ſein.

§. 505. Unter gewiſſen Umſtänden kann man, ohne daß man d gleichung zu bilden braucht, gleichzeitige Differenzialgleichungen in Ve mit einander integriren. Wenn man z. B. zwiſchen drei Veränderliche zwei lineare Differenzialgleichungen der erſten Ordnung hat, ſo kann immer auf folgende Form bringen:

$$x' + Px + Qy = V,\quad y' + P_1 x + Q_1 y = V_1,$$

wo P, Q, V, P_1, Q_1, V_1 Functionen der unabhängigen Veränderlich zeichnen. Multiplicirt man die zweite Gleichung durch einen Factor λ, eine Function derſelben Veränderlichen t iſt, und addirt das Produc erſten Gleichung, ſo erhält man:

$$x' + \lambda y' + (P + \lambda P_1)x + (Q + \lambda Q_1)y = V + \lambda V_1.$$

Setzt man $u = x + \lambda y$, wo u eine andere Hülfsveränderliche bezeic hat man $x' + \lambda y' = u' - y\lambda'$, und wenn man ſubſtituirt:

$$u' + (P + \lambda P_1)u - y[\lambda' + \lambda(P + \lambda P_1) - (Q + \lambda Q_1)] = V +$$

n man die Function λ so bestimmt, daß der Gleichung:

$$\lambda' + \lambda(P + \lambda P_1) - (Q + \lambda Q_1) = 0, \qquad (a)$$

r λ und t enthält, Genüge geschieht, so braucht man diesen Werth
r noch in die Gleichung

$$u' + (P + \lambda P_1)u = V + \lambda V_1 \qquad (b)$$

iren, welche alsdann nur noch die Veränderlichen u und t enthält,
ziehung auf u linear ist.
n die Coefficienten P, Q, P_1, Q_1, constant sind, so wird der Glei-
genügt, wenn man für λ eine der Wurzeln λ_1, λ_2 der Gleichung
n Grades:

$$\lambda(P + \lambda P_1) - (Q + \lambda Q_1) = 0 \qquad (\alpha)$$

Wenn man diese beiden Wurzeln successive für λ in die Gleichung
uirt, mit u_1, u_2 die correspondirenden Werthe von u, und durch
villkürliche Constanten bezeichnet; so ergibt sich durch Integration

$$+ \lambda_1 y = e^{-(P+\lambda_1 P_1)t}[C_1 + \int dt\,(V + \lambda_1 V_1)e^{(P+\lambda_1 P_1)t}], \qquad (b_1)$$

$$+ \lambda_2 y = e^{-(P+\lambda_2 P_1)t}[C_2 + \int dt\,(V + \lambda_2 V_1)e^{(P+\lambda_2 P_1)t}], \qquad (b_2)$$

lgt:

$$x = \frac{\lambda_2 u_1 - \lambda_1 u_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad y = \frac{u_2 - u_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

t die Wurzeln der Gleichung (α) imaginär sind, so drückt man die
lgrößen, wie gewöhnlich, durch Sinus und Cosinus aus. Wenn
In λ_1, λ_2 einander gleich sind, so werden die Werthe von x, y un-
ofern man nicht $C_1 = C_2$ setzt, wodurch diese Werthe die Form $\frac{0}{0}$
allein die Unbestimmtheit wird, wie wir es bereits in einem ähn-
e gethan haben (§. 463), beseitigt, wenn man von den Zählern
rn die Ableitungen in Beziehung auf den Parameter λ_2 nimmt, und
iesen Ableitungen $\lambda_1 = \lambda_2$ setzt.

)6. Wir wollen nun annehmen, daß man zwischen x, y, z und der
zen Veränderlichen t drei lineare Differenzialgleichungen der ersten
habe, so kann man sie immer auf folgende Form zurückführen:

$$\begin{aligned} x' + Px + Qy + Rz &= V \\ y' + P_1 x + Q_1 y + R_1 z &= V_1 \\ z' + P_2 x + Q_2 y + R_2 z &= V_2 \end{aligned}$$

R, V; P_1, &c. Functionen von t bezeichnen. Wenn man diese Glei-
sammenaddirt, nachdem man die zweite durch einen Factor λ und
durch einen Factor μ multiplicirt hat, so erhält man:

$$x' + \lambda y' + \mu z' + (P + \lambda P_1 + \mu P_2)x + (Q + \lambda Q_1 + \mu Q_2)y + (R + \lambda R_1 + \mu R_2)z = V + \lambda V_1 + \mu V_2.$$

hierauf:

$$\lambda y + \mu z = u, \text{ folglich } x' + \lambda y' + \mu z' = u' - y\lambda' - z\mu',$$

ich durch Substitution:

$$u' + (P + \lambda P_1 + \mu P_2)u$$
$$- y[\lambda' + \lambda(P + \lambda P_1 + \mu P_2) - (Q + \lambda Q_1 + \mu Q_2)]$$
$$- z[\mu' + \mu(P + \lambda P_1 + \mu P_2) - (R + \lambda R_1 + \mu R_2)]$$
$$= V + \lambda V_1 + \mu V_2.$$

Die Functionen λ, μ darf man ſo annehmen, daß den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \lambda' + \lambda(P + \lambda P_1 + \mu P_2) - (Q + \lambda Q_1 + \mu Q_2) &= 0 \\ \mu' + \mu(P + \lambda P_1 + \mu P_2) - (R + \lambda R_1 + \mu R_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Genüge geſchieht, und wenn ſie integrirt werden können; ſo leitet man daraus die Werthe von λ, μ als Functionen von t ab, um ſie in die dritte Gleichung:

$$u' + (P + \lambda P_1 + \mu P_2)u = V + \lambda V_1 + \mu V_2, \quad (d)$$

worin nur noch die Veränderlichen u und t vorkommen, und welche in Beziehung auf u linear iſt, zu ſubſtituiren.

Wenn man, wie weiter oben, annimmt, daß ſich die Coefficienten $P, Q, \ldots$ auf Conſtanten reduciren, ſo wird den Gleichungen (c) genügt, wenn man für λ, μ die Wurzeln der Zahlengleichungen:

$$\lambda(P + \lambda P_1 + \mu P_2) - (Q + \lambda Q_1 + \mu Q_2) = 0$$
$$\mu(P + \lambda P_1 + \mu P_2) - (R + \lambda R_1 + \mu R_2) = 0$$

nimmt. Zur Erleichterung der Elimination wollen wir

$$P + \lambda P_1 + \mu P_2 = m \quad (e)$$

ſetzen, ſo ergibt ſich:

$$\lambda(m - Q_1) - \mu Q_2 = Q, \quad \mu(m - R_2) - \lambda R_1 = R. \quad (e')$$

Die Subſtitution der aus dieſen linearen Gleichungen abgeleiteten Werthe von λ, μ in die Gleichung (e) führt auf folgende Endgleichung mit m:

$$(m - P)(m - Q_1)(m - R_2) - Q_2 R_1 (m - P) - P_2 R (m - Q_1)$$
$$- P_1 Q (m - R_2) = P_1 Q_2 R + P_2 Q R_1,$$

und da ſie vom dritten Grade iſt, ſo hat ſie drei Wurzeln m_1, m_2, m_3, welchen vermöge der Gleichungen (e') drei Werthsſyſteme λ_1, μ_1; λ_2, μ_2; λ_3, μ_3 von λ, μ entſprechen.

Die Gleichung (d) verwandelt ſich in:

$$u' + mu = V + \lambda V_1 + \mu V_2.$$

Wenn man ſucceſſive für m, λ, μ die drei eben angeführten Werthsſyſteme ſubſtituirt, und wenn man integrirt, ſo erhält man die drei Gleichungen:

$$x + \lambda_1 y + \mu_1 z = e^{-m_1 t}[C_1 + \int dt\,(V + \lambda_1 V_1 + \mu_1 V_2) e^{m_1 t}],$$
$$x + \lambda_2 y + \mu_2 z = e^{-m_2 t}[C_2 + \int dt\,(V + \lambda_2 V_1 + \mu_2 V_2) e^{m_2 t}],$$
$$x + \lambda_3 y + \mu_3 z = e^{-m_3 t}[C_3 + \int dt\,(V + \lambda_3 V_1 + \mu_3 V_2) e^{m_3 t}],$$

woraus ſich leicht die Werthe von x, y, z, als Functionen von t und der willkürlichen Conſtanten C_1, C_2, C_3 ableiten laſſen. Nichts würde leichter ſein, als dieſe Rechnung zu verallgemeinern und ſie auf ein Syſtem gleichzeitiger linearer Differenzialgleichungen von der erſten Ordnung mit einer beliebigen Anzahl von veränderlichen Größen anzuwenden.

§. 507. In dem einzigen Falle, in welchem im Allgemeinen eine Integration verrichtet werden kann, nämlich wenn die Coefficienten $P, Q, \ldots; P_1, Q_1, \ldots;$ ꝛc. conſtante Zahlen ſind, kann man der Rechnung auch einen ſynthetiſchen Gang geben, welcher dem im §. 455 und folglich für die linearen

renzialgleichungen mit conſtanten Coefficienten und mit zwei Veränderlichen analog iſt.

Es ſei zuvörderſt:

$$\left.\begin{aligned} x' + Px + Qy + Rz + \ldots\ldots + Uu &= 0 \\ y' + P_1 x + Q_1 y + R_1 z + \ldots\ldots + U_2 u &= 0 \\ z' + P_2 x + Q_2 y + R_2 z + \ldots\ldots + U_2 u &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ u' + P_{n-1} x + Q_{n-1} y + R_{n-1} z + \ldots. + U_{n-1} u &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (\varepsilon)$$

Syſtem von n Differenzialgleichungen ohne letzte Glieder, und mit eriſchen Coefficienten zwiſchen den n Veränderlichen x, y, z, ... u als Func- von t und ihren Ableitungen der erſten Ordnung; ſo ſieht man leicht ein, es möglich iſt, denſelben durch ein Syſtem von particulären Werthen:

$$x = Ce^{-mt},\ y = \lambda Ce^{-mt},\ z = \mu Ce^{-mt},\ \ldots\ldots u = \nu Ce^{-mt},$$

C eine willkürliche Conſtante, und $\lambda, \mu, \ldots \nu$ Zahlen bezeichnen, welche) das Syſtem der n algebraiſchen Gleichungen:

$$\begin{aligned} P + \lambda Q + \mu R + \ldots\ldots + \nu U &= m \\ P_1 + \lambda Q_1 + \mu R_1 + \ldots\ldots + \nu U_1 &= \lambda m \\ P_2 + \lambda Q_2 + \mu R_2 + \ldots\ldots + \nu U_2 &= \mu m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ P_{n-1} + \lambda Q_{n-1} + \mu R_{n-1} + \ldots\ldots + \nu U_{n-1} &= \nu m \end{aligned}$$

ben werden, Genüge zu leiſten. In die erſte dieſer Gleichungen kann die durch die übrigen n — 1 Gleichungen gegebenen Werthe $\lambda, \mu, \ldots \nu$, Functionen von m ſubſtituiren, und nach der Bezout'ſchen Regel werden Werthe durch Brüche ausgedrückt, in deren Zähler m auf der $(n-2)^{ten}$, in deren Nenner m auf der $(n-1)^{ten}$ Potenz vorkommt, und folglich iſt Endgleichung mit m von n^{te} Grade. Da ihre Wurzeln durch $m_1, m_2, \ldots m_n$ ichnet ſind, und die correſpondirenden Werthe von $\lambda, \mu, \ldots \nu$, dieſelben ices tragen, ſo erhält man für die vollſtändigen Integrale des Syſtemes Differenzialgleichungen (ε) folgende:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 e^{-m_1 t} + C_2 e^{-m_2 t} + \ldots. + C_n e^{-m_n t}, \\ y &= \lambda_1 C_1 e^{-m_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{-m_2 t} + \ldots. + \lambda_n C_n e^{-m_n t}, \\ z &= \mu_1 C_1 e^{-m_1 t} + \mu_2 C_2 e^{-m_2 t} + \ldots. + \mu_n C_n e^{-m_n t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ u &= \nu_1 C_1 e^{-m_1 t} + \nu_2 C_2 e^{-m_2 t} + \ldots. + \nu_n C_n e^{-m_n t}. \end{aligned}\right\} \quad (\varepsilon_1)$$

Wir wollen nun annehmen, daß in den zweiten Theilen der Gleichungen Functionen $V, V_1, V_2, \ldots V_{n-1}$ von t vorkommen, ſo ſind die Gleichun- (ε_1) noch die allgemeinen Integrale des Syſtemes (ε), wofern die Coef- nten $C_1, C_2, \ldots C_n$ nicht mehr conſtante Zahlen, ſondern Functionen von zeichnen, welche den Gleichungen:

$$\begin{aligned} C'_1 e^{-m_1 t} + C'_2 e^{-m_2 t} + \ldots\ldots + C'_n e^{-m_n t} &= V \\ \lambda_1 C'_1 e^{-m_1 t} + \lambda_2 C'_2 e^{-m_2 t} + \ldots\ldots + \lambda_n C'_n e^{-m_n t} &= V_1 \\ \mu_1 C'_1 e^{-m_1 t} + \mu_2 C'_2 e^{-m_2 t} + \ldots\ldots + \mu_n C'_n e^{-m_n t} &= V_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \nu_1 C'_1 e^{-m_1 t} + \nu_2 C'_2 e^{-m_2 t} + \ldots\ldots + \nu_n C'_n e^{-m_n t} &= V_{n-1} \end{aligned}$$

üge leiſten. Aus dieſen Gleichungen leitet man durch eine gewöhnliche

Elimination die Werthe der Ableitungen $C'_1, C'_2, \ldots C'_n$ ab, und Quadraturen die Werthe der Functionen $C_1, C_2, \ldots C_n$, welche man al in die Gleichungen (g_1) ſubſtituiren muß.

§. 508. Schon früher haben wir geſehen, daß man eine Veränd aus einem Syſteme gleichzeitiger Differenzialgleichungen eliminiren kann, man für dieſe Gleichungen eine geringere Anzahl von Differenzialgleich aber von einer höhern Ordnung ſubſtituirt (§. 165). Umgekehrt, kann die Ordnung einer oder mehrerer gegebener Differenzialgleichungen erniedr wenn man ſich eine größere Anzahl gleichzeitiger Differenzialgleichung Integration vorlegt. So kann z. B. die Integration der beiden linearen ferenzialgleichungen der zweiten Ordnung:

$$x'' + Px' + Qy' + Rx + Sy = V$$
$$y'' + P_1x' + Q_1y' + R_1x + S_1y = V_1$$

zurückgeführt werden auf die gleichzeitige Integration der vier linearen ferenzialgleichungen der erſten Ordnung zwiſchen den Veränderlichen x, y, ξ

$$x' - \xi = 0$$
$$y' - \eta = 0$$
$$\xi' + P\xi + Q\eta + Rx + Sy = V$$
$$\eta' + P_1\xi + Q_1\eta + R_1x + S_1y = V_1.$$

Die vorhergehenden Rechnungen laſſen ſich auf die gleichzeitige Integ der linearen Differenzialgleichungen von beliebigen Ordnungen anwenden

§. 509. Wir wollen durch:

$$\left.\begin{array}{l} f(t; x, y, z, \ldots; x', y', z', \ldots) = 0 \\ f_1(t; x, y, z, \ldots; x', y', z', \ldots) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n-1}(t; x, y, z, \ldots; x', y', z', \ldots) = 0 \end{array}\right\}$$

ein Syſtem von n gleichzeitigen Differenzialgleichungen der erſten Ord und durch:

$$\left.\begin{array}{l} F(t; x, y, z, \ldots; a, a_1, \ldots a_{n-1}) = 0 \\ F_1(t; x, y, z, \ldots; a, a_1, \ldots a_{n-1}) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n-1}(t; x, y, z, \ldots; a, a_1, \ldots a_{n-1}) = 0 \end{array}\right\}$$

das Syſtem ihrer vollſtändigen Integrale bezeichnen, worin die durch di tegration eingeführten Conſtanten $a, a_1, \ldots a_{n-1}$ auf eine beliebige Wei einander verbunden ſind. Allgemein, durch eine ſchicklich geleitete Elimi kann man dieſes Syſtem von Gleichungen in ein anderes:

$$\left.\begin{array}{l} f(t; x, y, z, \ldots; a) = 0 \\ f_1(t; x, y, z, \ldots; a_1) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n-1}(t; x, y, z, \ldots; a_{n-1}) = 0 \end{array}\right\}$$

dem vorhergehenden gleichbedeutendes transformiren, welches, wie jenes Eigenſchaft hat, dem Syſteme (f) mit aller erforderlichen Allgemeinhei nüge zu leiſten. Wenn man nun $a, a_1, \ldots a_{n-1}$ als Functionen von $t; x, y$ durch die Gleichungen:

$$\frac{df}{da}=0,\ \frac{df_1}{da_1}=0,\ \ldots\ldots\ \frac{df_{n-1}}{da_{n-1}}=0 \qquad (f')$$

estimmt, und die auf dieſe Weiſe gefundenen Werthe in die Gleichungen (f) ubſtituirt; ſo bildet man die andern Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(t; x, y, z, \ldots\ldots)=0,\\ &\varphi_1(t; x, y, z, \ldots\ldots)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi_{n-1}(t; x, y, z, \ldots\ldots)=0,\end{aligned}\right\} \qquad (\varphi)$$

elche zuſammengenommen dem Syſteme (f) genügen; aber nach Art der ſinulären Integrale, wofern ſich die aus den Gleichungen (f') abgeleiteten erthe von $a, a_1, \ldots a_{n-1}$ nicht zufällig auf Conſtanten oder auf Functionen n $t, x, y, z, \ldots$, welche vermöge der Gleichungen (φ) ſelbſt conſtante erthe annehmen, reduciren.

Statt zugleich das ganze Syſtem (f) oder das ganze Syſtem (φ) zu hmen, könnte man auch ſtatt gewiſſer der Gleichungen (f) die ihnen in dem yſteme (φ) entſprechenden Gleichungen, d. h. (φ_i) ſtatt (f_i), u. ſ. f. nehn, ſo daß auf dieſe Weiſe gemiſchte Syſteme gebildet würden, welche enfalls auf ihre Weiſe dem Syſteme der gegebenen Differenzialgleichungen ügten.

Dieſe Analyſe ließe ſich leicht, wenn es nöthig wäre, auf die gleichzeitin Differenzialgleichungen erſtrecken.

§. 510. Um ein Beiſpiel der gleichzeitigen Integration für den Fall zu ben, wo die gegebenen Differenzialgleichungen keine linearen ſind, und um gleich zu zeigen, welche Anwendung man von der Theorie der ſingulären tegrale auf die Differenzialgleichungen machen kann, worin alle Veränderhen vorkommen, wollen wir die beiden folgenden Differenzialgleichungen der ſten Ordnung mit drei veränderlichen Größen nehmen:

$$(xy'+yx')^2-8tx'y'=0 \qquad (1)$$

$$xy-t(xy'-x'y)=0. \qquad (2)$$

fferenzirt man dieſelben, ſo erhält man:

$$(x'y+y'x)(x''y+2x'y'+xy'')=4(x'y'+tx''y'+tx'y''),$$

$$2x'y-t(xy''-x''y)=0.$$

Wenn man aus der zweiten dieſer abgeleiteten Gleichungen den Werth n $x'y$ zieht, und denſelben in den zweiten Theil der erſten ſubſtituirt, ſo ird dieſe auf folgende Form gebracht:

$$(x''y+2x'y'+xy'')(x'y+y'x-2t)=0, \qquad (3)$$

elche in die beiden folgenden Gleichungen:

$$x''y+2x'y'+xy''=0 \qquad (4)$$

$$x'y+y'x-2t=0 \qquad (5)$$

rfällt.

Die Gleichung (4) iſt gleichbedeutend mit:

$$\frac{d^2(xy)}{dt^2}=0, \text{ woraus folgt: } xy=at+b, \qquad (6)$$

dem a, b zwei willkürliche Conſtanten bezeichnen.

Dieſe beiden Conſtanten ſind nicht von einander unabhängig; denn die eiden Gleichungen (1), (2) müſſen übereinſtimmen, wenn man y, y' vermit-

telſt der Gleichung (6) fortſchafft, und es ergibt ſich, daß man, um beiden Gleichungen identiſch zu machen $b = -\frac{a^2}{4}$ ſetzen muß, wodurch das Integral (6) in:

$$xy = at - \frac{a^2}{4}$$

verwandelt. Jede der Gleichungen (1) und (2) gibt alsdann:

$$\frac{adt}{8t^2 - 2at} = \frac{dx}{x},$$

woraus folgt, wenn man integrirt und durch c eine willkürliche Conſtan zeichnet:

$$x^2t = c(4t - a).$$

Das Syſtem der Gleichungen (7) und (8) gibt alſo die vollſtändigen grale der beiden gegebenen Differenzialgleichungen (1) und (2).

Für die Gleichung (8) kann man eine andere einfachere ſubſtituiren, es folgt daraus:

$$xt = 4c \cdot \frac{t}{x} - ac \cdot \frac{1}{x},$$

während die Gleichung (7)

$$y = a \cdot \frac{t}{x} - \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{x}$$

gibt. Wenn man alſo durch a_1 eine neue willkürliche Conſtante von ſ Beſchaffenheit bezeichnet, daß $aa_1 = 4c$ iſt, ſo kann die Gleichung (8) t

$$xt = a_1 y$$

erſetzt werden. Wenn man nun den zweiten Factor der Gleichung (3 wendet, und x', y' zwiſchen der Gleichung (5) und den beiden gege Gleichungen eliminirt, ſo erhält man:

$$xy = t^2,$$

ein ſinguläres Integral, weil es keine willkürliche Conſtante enthält und eine gehörige Beſtimmung der Conſtante a nicht auf das Integral (7) g geführt werden kann. Uebrigens gibt die Ableitung des Integrales (Beziehung auf a, $a = 2t$, und wenn man dieſen Werth in die Gleichun ſetzt; ſo kommt man wieder auf das ſinguläre Integral (10), übereinſtim mit der im vorhergehenden § auseinander geſetzten Theorie.

Vermöge der aus der Gleichung (10) abgeleiteten Werthe von y, y wandelt ſich jede der gegebenen Differenzialgleichungen in $x - 2x't$ woraus folgt, wenn man integrirt, und durch α eine willkürliche Con bezeichnet:

$$x^2 = \alpha t.$$

Uebrigens iſt leicht einzuſehen, daß das Syſtem der Gleichungen und (11) mit dem der Gleichungen (9) und (10) identiſch wird, wenn $\alpha = a_1$ ſetzt.

§. 511. Wenn man die linearen Differenzialgleichungen, worin die tionen der unabhängigen Veränderlichen und ihre Ableitungen durch con Zahlen multiplicirt ſind, ausnimmt, ſo laſſen ſich die gleichzeitigen Dif zialgleichungen ſelten anders, als durch Annäherung integriren. In ge

llen, und namentlich bei den Aufgaben über die Bewegungen der Himmelsrper, hat man der Aprorimationsrechnung eine ſo merkwürdige Form gegen, daß wir dieſelbe hier kurz andeuten müſſen.

Um die Begriffe zu fixiren, ſeien:

$$f(t; x, x', x'', \ldots; y, y', y'', \ldots) = 0$$

$$f_1(t; x, x', x'', \ldots; y, y', y'', \ldots) = 0,$$

vei Gleichungen zwiſchen der Zeit t und den Coordinaten x, y, eines in einer bene beweglichen Punktes. Ferner wollen wir annehmen, daß

$$\mathfrak{f} = f + \varepsilon\varphi, \quad \mathfrak{f}_1 = f_1 + \varepsilon\varphi_1 \qquad (h)$$

t, wo $f, \varphi, f_1, \varphi_1$ andere Functionen derſelben Veränderlichen und ihrer Abitungen und ε eine ſehr kleine Zahl bezeichnen, ſo daß ſich die Gleichungen r Aufgabe, wenn man dieſen Factor $\varepsilon = 0$ ſetzte, auf:

$$f = 0, \quad f_1 = 0 \qquad (h_0)$$

ducirten. Endlich wollen wir annehmen, daß ſich das Syſtem dieſer beiden leichungen integriren laſſe, und daß

$$F(t; x, y; a, b, c, \ldots) = 0, \quad F_1(t; x, y; a, b, c, \ldots) = 0 \qquad (i)$$

ie allgemeinen Integrale ſind, wo a, b, c, ꝛc. die durch die Integration einführten willkürlichen Conſtanten bezeichnen. Wenn man t zwiſchen dieſen iden Gleichungen eliminirt, ſo erhält man:

$$F_{0,1}(x, y; a, b, c, \ldots) = 0 \qquad (j)$$

ir die Gleichung der Curve, welche der bewegliche Punkt in dem Falle, wo an den Factor $\varepsilon = 0$ ſetzen kann, in der Ebene xy beſchreiben würde.

Nun darf man aber durch die Gleichungen (i) noch die allgemeinen Integrale der Gleichungen (h), worin der Factor ε nicht mehr gleich Null angenommen wird, wofern man in den Functionen F, F_1 die Parameter a, b, c, ꝛc. cht mehr als Conſtanten, ſondern als Functionen der unabhängigen Veränderhen t betrachtet, welche man ſo beſtimmen muß, daß den Gleichungen (h) enüge geſchieht, ausdrücken. Dieſe letzten Gleichungen unterſcheiden ſich ch der Vorausſetzung von den Gleichungen (h_0) nur durch Glieder, welche hr klein bleiben, und folglich kann man die Ableitungen:

$$\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}, \text{ ꝛc.}, \qquad (k)$$

elche in aller Strenge mit ε verſchwinden, als ſehr kleine Größen behandeln. ewöhnlich kann man dieſe Bemerkung zur Vereinfachung der zu betrachtenden leichungen benutzen, welche alsdann für das Syſtem der gegebenen Gleichun- n ſubſtituirt werden.

Wenn man ſagt, die Ableitungen (k) ſeien ſehr kleine Größen, ſo heißt ſes nichts anderes, als die Parameter, a, b, c, ꝛc. ändern ſich ſehr langſam, er behalten während eines langen Zeitraumes faſt conſtante Werthe. Wenn n alſo die Bewegung des Punktes (x, y) zu einer gewiſſen Zeit beobachtete, fände man, daß er faſt die durch die Gleichung (j), worin man den Größen $b, c, \ldots$ gewiſſe conſtante Werthe beilegen müßte, ausgedrückte Curve beeibt, und wenn man nach Verlauf eines beträchtlichen Zeitraumes dieſelben eobachtungen wiederholte, ſo würde man finden, daß der bewegliche Punkt ch eine Curve derſelben Art beſchreibt, für welche die Parameter $a, b, c, \ldots$ dere Werthe haben, als nach den erſten Beobachtungen, u. ſ. f.

Man muß alſo in der von Lagrange herrührende Integrationsmethode rch die Variation der willkürlichen Conſtanten nicht blos einen

geiſtreichen analytiſchen Kunſtgriff erblicken, wovon wir eine elegante A
dung auf die genaue Integration der linearen Differenzialgleichungen,
die Functionen und ihre Ableitungen nur durch conſtante Zahlen mult
ſind, im Vorhergehenden kennen gelernt haben; denn ſie würde auch du
Beobachtung der Naturerſcheinungen, zu deren Darſtellung unter den
angegebenen Umſtänden ſie ſich ſo natürlich eignet, haben an die Hand g
werden können.

Siebentes Kapitel.

Ueber die Conſtruction der Differenzialgleichungen mit einer ei unabhängigen veränderlichen Größe.

§. 512. Wir haben die Hauptfälle unterſucht, in welchen man di
tion anzugeben weiß, welche einer gegebenen Differenzialgleichung auf
gemeinſte Weiſe genügt, oder wo man die allgemeine Gleichung der
finden kann, welche in allen ihren Punkten die durch die Differenzialgl
ausgedrückte Eigenſchaft beſitzen. Auch haben wir angegeben, wie man
die Integration nicht unter endlicher Form möglich iſt, ſie oft entwe
die Quadraturen, oder auf die Entwickelung in convergirende Reihen
führen oder zuweilen auch dieſe Reihen durch beſtimmte, zwiſchen ſp
Grenzen genommene Integrale, deren Zahlenwerthe für jeden Werth
abhängigen Veränderlichen mit einer beliebigen Annäherung beſtimmt
können, erſetzen kann. Aber eine Differenzialgleichung, auf welche
dieſer Integrationsverfahren anwendbar iſt, beſtimmt nichts deſto weni
Reihe der Zahlenwerthe, welche die Function durchlaufen muß, nachde
für einen gewiſſen Werth der unabhängigen Veränderlichen die correſpo
den Werthe der Function und ihrer Ableitungen bis zu der, deren O
um eine Einheit niedriger iſt, als die der gegebenen Differenzialgleichu
gegeben hat. Es kann ſogar geſchehen, daß man durch die directe
ſuchung der Differenzialgleichung den Verlauf und alle charakteriſtiſchen
ſchaften der Function, welche ſie implicite beſtimmt, beſſer kennen ler
aus der Betrachtung des allgemeinen Integrales unter endlicher Form
in Reihenentwickelungen, oder endlich durch beſtimmte oder unbeſtimmt
grale ausgedrückt. Dieſes hat Sturm in einer ſchönen Abhandlung i
Unterſuchung der durch die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$\frac{d\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + GV = 0,$$

worin G, K Functionen der unabhängigen Veränderlichen x bezeichnen, i
beſtimmten Functionen V gezeigt. *)

Dieſe Differenzialgleichung enthält die Riccatiſche oder die, m
Integration durch Reihen, oder durch beſtimmte Integrale wir uns im

*) Vergl. das Journal de mathématiques de M. Liouville, tom I, pag. 10

…l des gegenwärtigen Buches beſchäftigt haben, als ſpeciellen Fall in ſich. … die Functionen G, K ſich auf reelle und poſitive Conſtanten reduciren, …ckt die Function V einen Sinus oder Coſinus aus. In dem allgemeinen … bietet der Verlauf der Function V mit dem der Functionen sin. und cos. …merkwürdige Analogien dar, welche ſich aus der directen Unterſuchung der …hung (V) ergeben, und welche man in der angeführten Abhandlung ſelbſt …ſehen muß. In dieſem Kapitel können wir uns nur mit weit elementareren …rachtungen beſchäftigen, welche zur Vervollſtändigung der Theorie der In…ation der Differenzialgleichungen unumgänglich nothwendig ſind (§. 437).

§. 513. Es ſei:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (F)$$

… Differenzialgleichung der erſten Ordnung mit zwei Veränderlichen, welche …in:

$$y' = f(x, y) \qquad (f)$$

…andelt, wenn man ſie in Beziehung auf y' auflöſ't. Für jedes Werths…m von x und von y beſtimmt dieſe Gleichung das Verhältniß der unend… kleinen Veränderung von y zu der unendlich kleinen Veränderung von x. … beſtimmt alſo implicite die endliche Differenz der Werthe von y, welche … Werthen von x entſprechen, die durch ein endliches Intervall von ein…r getrennt ſind, wenn dy innerhalb dieſes Intervalles eine unendlich kleine …e bleibt, oder wenn die Function y keine Stetigkeitsunterbrechung der … Ordnung erfährt, was der Fall iſt, wenn y' endlich bleibt, und ſogar …ewiſſen Fällen, wenn die Function y' durchs Unendliche geht.

Durch x_0, X wollen wir zwei durch ein endliches Intervall von einander …nnte Werthe von x bezeichnen und $n\Delta x = X - x_0$ ſetzen, wo n eine …roße Zahl bezeichnet, daß die Größe Δx als eine ſehr kleine Größe der …en Ordnung betrachtet werden kann. Wir wollen:

$$x_1 = x_0 + \Delta x, \quad x_2 = x_0 + 2\Delta x, \quad x_3 = x_0 + 3\Delta x, \text{ ꝛc.}$$

…en, und durch y_0, y_1, y_2, ꝛc.; y'_0, y'_1, y'_2, ꝛc. die Werthe von y, y' be…nen, welche reſp. den durch x_0, x_1, x_2, ꝛc. bezeichneten Werthen von x …ſprechen. Wenn man den Werth y_0 willkürlich annimmt, ſo kann man die …he der zwiſchen den Grenzen $x = x_0$, $x = X$ liegenden Werthe von y …mittelſt der Gleichung (f) näherungsweiſe berechnen; denn dieſe Gleichung …t:

$$y'_0 = f(x_0, y_0),$$

…wenn man eine ſehr kleine Größe der zweiten Ordnung vernachläſſigt, ſo …t man:

$$y_1 = y_0 + y'_0 \Delta x = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot \Delta x.$$

Durch die Subſtitution dieſes Werthes von y_1 in die Gleichung:

$$y'_1 = f(x_1, y_1)$$

hält man den Werth von y'_0 mit einem Fehler, welcher im Allgemeinen …enfalls nur eine Größe von der zweiten Ordnung ſein kann; denn die Ver…derung der Function f iſt im Allgemeinen eine Größe von derſelben Ord…ng, als die Veränderungen der Größen x, y, wovon ſie abhängt. Man hat ſo bis auf Größen der zweiten Ordnung genau:

$$y_2 = y_1 + y'_1 \Delta x = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f(x_1, y_1) \cdot \Delta x,$$

ſ. f. Da n nach der Vorausſetzung eine ſehr große Zahl, oder $\frac{1}{n}$ eine Größe

von derſelben Ordnung als Δx iſt, ſo kann der X entſprechende Werth von Y wegen der n maligen Wiederholung des bei jedem Werthe von y begangenen Fehlers mit einem Fehler behaftet ſein, welcher einer ſehr kleinen Größe der erſten Ordnung, oder von derſelben Ordnung wie Δx gleich iſt, und welcher vernachläſſigt werden kann, wenn man für Δx eine hinreichend kleine Größe genommen hat.

Dieſe Schlüſſe werden jedoch unzuläſſig, wenn die Ableitungen:

$$\frac{df(x,y)}{dx}, \quad \frac{df(x,y)}{dy}$$

für Werthe von x und von y, welche reſp. zwiſchen den Grenzen x_0, X und y_0, Y liegen, unendlich werden; denn alsdann kann eine den Veränderlichen x oder y ertheilte ſehr kleine Veränderung der zweiten Ordnung eine Veränderung der erſten Ordnung der Function f zur Folge haben; aber ſelbſt in dieſem Falle, wenn die Function f nur nicht unendlich wird, ſieht man leicht ein, daß die Function y vermöge der Gleichung (f), welche ihre unendlich kleinen Veränderungen beſtimmt, durch eine Reihe beſtimmter Werthe geht, obgleich die Annäherungsmethode nicht mehr eine Reihe, durch endliche Intervalle von einander getrennter Werthe mit einer hinreichenden Genauigkeit zu geben vermag. *)

Man bemerkt leicht, daß die eben angedeutete arithmetiſche Rechnung mit der Conſtruction einer Curve, deren Ordinate y iſt, indem man für dieſe Curve ein Polygon ſubſtituirt, welches ſich derſelben deſto mehr nähert, je kleiner die Linie Δx genommen iſt, und indem man außerdem einen Punkt annimmt, durch welchen die Curve gehen muß, und welcher eine Winkelſpitze des zu conſtruirenden Polygones iſt, auf eins hinausläuft.

§. 514. Wenn der durch die Gleichung (f) gegebene Werth von y' durch das Unendliche geht, ſo kann man dieſe Gleichung umkehren und

$$x' = \frac{1}{f(x,y)}$$

ſetzen, indem man y zur unabhängigen Veränderlichen nimmt. Wenn die Function y mit y' zu gleicher Zeit unendlich werden muß, ſo kann die auf dieſe letzte Form gebrachte Differenzialgleichung dazu dienen, den Curvenzweig m_0, n (Fig. 102), worauf der Anfangspunkt m_0 genommen iſt, und welcher dieſſeits der zu der Axe der x, y parallelen Aſymptote PN liegt, ſo weit, als man nur will, zu verlängern. Auf der andern Seite von PN kann man die Conſtruction der Curve nur dann fortſetzen, wenn man einen andern Anfangspunkt m'_0 annimmt, durch welchen der Curvenzweig $m'_0\, n'$ gehen muß. Man kann für m'_0 wie für m_0 einen beliebigen Punkt annehmen, nur dürfen ſeine Coordinaten die durch die Gleichung (f) gegebenen Werthe von y nicht imaginär machen.

Wenn man das Integral der Gleichung (f) analytiſch ausdrücken kann, ſo wird der Curvenzweig $m'_0\, n'$, welcher mit dem Curvenzweige $m_0\, n$ verbunden werden muß, gewöhnlich durch die Bedingung beſtimmt, daß die will-

*) Es wird kaum ein Fall vorkommen, wo man Gelegenheit hat, die in dieſem § angedeutete Näherungsrechnung wirklich auszuführen, ſo daß man einen ſtrengen Ausdruck für die Grenzen des begangenen Fehlers wünſchen könnte. Cauchy hat dieſen Ausdruck entwickelt, worüber man die Werke dieſes ausgezeichneten Analyſten ſowie eine Abhandlung von Binet in dem Journal der Math. von Liouville Bd. II. Seite 229 vergleichen muß.

ürliche Conſtante bei dem Uebergange von dem einen Curvenzweige zu dem andern ihren Werth nicht ändert; allein dieſe beſtimmende Bedingung fällt weg, wenn ſich das Integral der Differenzialgleichung nicht durch die bekannten analytiſchen Hülfsmittel ausdrücken läßt.

. Die Differenz zweier Werthe von y, zwiſchen welchen die Function y durch das Unendliche geht, kann nicht mehr die Summe der unendlich kleinen Incremente, welche die Function in dieſem Intervalle erhalten hat, ausdrücken und der Name Integral iſt auf die Gleichung mit x, y, welche der gegebenen Differenzialgleichung genügt, wenn man dieſe Werthe mit einander vergleichen will, nur uneigentlich anwendbar. Es ſeien aber dennoch x_0, X die Werthe von x, zwiſchen welchen der Werth von x liegt, welcher y unendlich macht, und y_0, Y ſeien die correſpondirenden Werthe von y. Wenn man die Veränderliche x durch eine Reihe imaginärer Werthe, welche für y keine unendlichen Werthe geben, von dem Werthe x_0 zu dem Werthe X übergehen läßt; ſo drückt die Differenz $Y - y_0$ wieder die Summe der reellen oder imaginären unendlich kleinen Incremente aus, welche die Function y bei dem Uebergange von einem Werthe zum andern annimmt (§. 321). Die Summe der imaginären Theile dieſer Incremente muß Null ſein, weil nach der Vorausſetzung die Werthe y_0, Y, und folglich ihr Unterſchied $Y - y_0$ reelle Größen ſind.

§. 515. In dem Falle, wo die Differenzialgleichung die Form:

$$y' = \varphi y \cdot \psi(x, y) \qquad (1)$$

hätte, müßte man ſie einer beſondern Unterſuchung unterwerfen. Denn es ſei y_n ein Werth von y, welcher φy verſchwinden macht. Wenn der Werth der Function y von dem anfänglichen Werthe y_0 bis zu dem Werthe y_n ſtetig zu- oder abnimmt, ſo verſchwindet der Werth von y' in dem Augenblicke, wo y dieſen Werth y_n erreicht, und der folgende Werth:

$$y_{n+1} = y_n + y'_n \Delta x$$

reducirt ſich auf y_n, ſo daß y'_{n+1} ebenfalls gleich Null iſt, u. ſ. f. Der Werth der Function würde alſo, nachdem er von y_0 bis y_n eine veränderliche Größe geweſen iſt, mit einem Male eine conſtante Größe.

Es iſt wohl zu erwägen, daß ſich die hier gemachte Bemerkung nicht blos auf die arithmetiſche oder graphiſche Conſtruction erſtreckt, vermittelſt welcher die auf einander folgenden Werthe einer Function vermöge der Differenzialgleichung, welche das Geſetz ihrer unendlich kleinen Veränderungen ausdrückt, ſelbſt wenn ſich dieſes Integral nicht analytiſch ausdrücken läßt, mit einer beliebigen Annäherung beſtimmt werden können; ſondern dieſe Bemerkung erſtreckt ſich vor allen Dingen jedesmal auf die Erzeugung der Function ſelbſt, wenn ſie wirklich und in dem eigentlichen Sinne des Wortes eine Reihe von Werthen durchläuft, was vorausſetzt, daß die unabhängige Veränderliche x die Zeit oder eine mit der Zeit wachſende Größe ausdrückt.

§. 516. Es kommt nun darauf an, zu beſtimmen, unter welchen Umſtänden die Function y den Werth erreichen kann, welcher φy verſchwinden macht, indem dieſe Function von einem andern anfänglichen Werthe ausgeht. Zu dem Zwecke wollen wir zuvörderſt den Fall betrachten, wo ſich die Function $\psi(x, y)$ auf eine Conſtante c reducirt, und wo die Function φy die Form $my + n$ hat, indem m und n conſtante Zahlen bezeichnen. Das Integral der Gleichung:

$$y' = c(my + n)$$

iſt:

$$my + n = (my_0 + n)\, e^{mc(x-x_0)},$$

wo x_0, y_0 die anfänglichen Werthe der beiden Veränderlichen bezeichnen. Die Größe $my_0 + n$ ist nach der Voraussetzung von Null verschieden, und folglich kann die Größe $my + n$ wegen der Form des Integrales für keinen endlichen Werth von x verschwinden, sondern sie convergirt nur dann gegen Null, wenn die als negativ vorausgesetzte Größe $mc(x - x_0)$ immer größere und größere Zahlenwerthe annimmt.

Wir wollen nun zum allgemeinen Falle übergehen, und blos annehmen, daß die Function $\varphi' y$ nicht für den Werth von y unendlich wird, welcher $\varphi y = 0$ macht. Es sei η dieser Werth, so kann man, wenn die Function y, indem sie von einem kleinern oder größern Werthe ausgeht, so lange zu- oder abnehmen kann, bis sie den Werth η erreicht, für y_0 einen unendlich wenig von η verschiedenen Werth annehmen, und alsdann ist φy unendlich wenig von $(y - \eta)\, \varphi' \eta$ verschieden. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß $y_0 > \eta$, $\varphi' \eta > 0$ ist, so kann dy nicht für positive Werthe von dx negativ werden, und folglich kann y nicht von dem Werthe y_0 zu dem Werthe η übergehen, wenn die Function $\psi(x, y)$ in dem Intervalle keine negativen Werthe annimmt. Außerdem wird der Fall ausgeschlossen, wo diese Function durch das Unendliche gehen, oder unbestimmt werden könnte. Es sei $-c$ der numerisch größte der negativen Werthe, welche die Function $\psi(x, y)$ in dem Intervalle annimmt, so haben wir eben gesehen, daß die Differenz $y - \eta$ nach der Form des Integrales der Differenzialgleichung:

$$dy = -c\,(y - \eta) \cdot \varphi\eta\, dx \qquad (2)$$

für keinen endlichen Werth von x verschwinden kann, und folglich ist es um so mehr unmöglich, daß die Differenz $y - \eta$ für irgend einen endlichen Werth von x verschwinden kann, wenn die Function y der Differenzialgleichung:

$$dy = \psi(x, y) \cdot (y - \eta) \cdot \varphi' \eta\, dx \qquad (3)$$

genügen muß, weil die Function $\psi(x, y)$ selbst, wenn sie beständig als negativ angenommen wird, nach der Voraussetzung niemals einen Zahlenwerth $= c$ erreicht, und also y vermöge der Gleichung (3) nicht so schnell wächst, als vermöge der Gleichung (2).

Wenn man $y_0 < \eta$, oder $\varphi' \eta < 0$ annimmt, so wird auf eine ganz ähnliche Weise dargethan, daß y für keinen endlichen Werth von x gleich η werden kann.

Es bleibt also nur noch der Fall übrig, wo der Coefficient $\varphi' \eta$ unendlich wird, was z. B. stattfindet, wenn man

$$\varphi y = (y - \eta)^k$$

setzt, wo k eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl bezeichnet, oder auch:

$$\varphi y = \frac{1}{\log.(y - \eta)},$$

und alsdann ist die Gleichung $y = \eta$ ein singuläres Integral der Gleichung (1).

§. 517. Wir haben bisher angenommen, daß die in Beziehung auf y' aufgelöste Gleichung (F) für y' nur einen einzigen reellen Werth $f(x, y)$ gibt, und offenbar findet in diesem Falle zwischen den unendlich vielen Linien, welche man vermöge der Gleichung (F) construiren kann, wenn man einen Punkt jeder dieser Linien willkürlich annimmt, kein Durchschnitt statt, weil, wenn sie sich durchschnitten, die Ableitung y', gegen die Voraussetzung, mehrere Werthe haben würde, welche den Coordinaten x, y der Durchschnittspunkte entsprächen. Hiervon findet nur eine Ausnahme statt, wenn der Werth von

für gewiſſe Werthe von x, y unbeſtimmt wird. So gehört z. B. die Differenzialgleichung $y' = \frac{y}{x}$ unendlich vielen geraden Linien an, welche ſich alle Anfangspunkte der Coordinaten ſchneiden, für welchen Punkt der Werth n y' unter der unbeſtimmten Form $\frac{0}{0}$ erſcheint (§. 182).

Wenn die Gleichung (F) für y' mehrere verſchiedene Werthe $y' = f_1(x,y)$, $= f_2(x,y)$, ꝛc. gibt, ſo läßt ſich jede dieſer Gleichungen, einzeln betrachtet, e die Gleichung (f) conſtruiren und führt auf ein Syſtem von unendlich elen Curven oder Curvenzweigen, welche durch die Wahl des Anfangspunktes rticulariſirt ſind.

So iſt die Gleichung:

$$y'^2x^2 - 2y'x(y-p) + y^2 + x^2 = 0 \qquad (a)$$

eichbedeutend mit den beiden folgenden:

$$y' = \frac{y-p+\sqrt{p(p-2y)-x^2}}{x}, \qquad (a_1)$$

$$y' = \frac{y-p+\sqrt{p(p-2y)-x^2}}{x}, \qquad (a_2)$$

von jede für ſich conſtruirt werden kann.

In dieſem Beiſpiele nimmt y' jedesmal einen imaginären Werth an, nn die Veränderlichen x, y der Ungleichheit:

$$p(p-2y) - x^2 < 0$$

nügen. Die Curve:

$$p(p-2y) - x^2 = 0 \qquad (b)$$

grenzt folglich auf der Ebene der xy die Region, in welcher ſich die durch e Gleichung (a) charakteriſirten Curven ausdehnen können. Die beiden erthe von y' werden für die auf der Curve (b) liegenden Punkte einander eich, d. h. ſie iſt der geometriſche Ort der Punkte, worin ſich je zwei der ſp. durch die Gleichungen (a_1), (a_2) charakteriſirten Curvenzweige vereinigen, elche Vereinigung auf zwei verſchiedene Arten ſtattfinden kann.

Im Allgemeinen iſt die gemeinſchaftliche Tangente der beiden Curvenzeige (a_1), (a_2) für die auf der Curve (b) liegenden Punkte von der Tangente der Curve (b) in denſelben Punkten verſchieden, was namentlich bei dem n uns gewählten Beiſpiele der Fall iſt. Der aus den Gleichungen (a_1), $_2)$ abgeleitete Werth von y' reducirt ſich für die auf der Curve (b) liegenn Punkte auf:

$$y' = \frac{y-p}{x},$$

ährend die Differenziation der Gleichung (b)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{p}$$

bt, und wenn dieſer Werth von $\frac{dy}{dx}$ dem vorhin für y' gefundenen gleich ſein llte, ſo müßte man die Relation:

$$\frac{y-p}{x} = -\frac{x}{p}, \quad \text{oder} \quad p(p-y) - x^2 = 0$$

haben, welche nicht mit der Gleichung (b) beſtehen kann, ausgenommen für $y = 0$.

In ſolchen Fällen vereinigen ſich die Curvenzweige (a_1), (a_2) auf der Curve (b), indem ſie eine Rückkehrkante bilden, und dieſe Grenzcurve iſt der geometriſche Ort aller Rückkehrpunkte der Curven, zu welchen die Differenzialgleichung (a) gehört.

§. 518. Aber wenn man die Gleichung:

$$y'^2x^2 - 2y'x(2y - p) + 2y(2y - p) + x^2 = 0 \qquad (a)$$

hat, welche ſich in die beiden folgenden:

$$y' = \frac{2y - p + \sqrt{p(p-2y) - x^2}}{x} \qquad (\alpha_1)$$

$$y' = \frac{2y - p - \sqrt{p(p-2y) - x^2}}{x} \qquad (\alpha_2)$$

zerlegen läßt; ſo fällt die gemeinſchaftliche Tangente der Curvenzweige (α_1), (α_2) in den auf der Curve (b) liegenden Vereinigungspunkten dieſer Zweige mit der Tangente dieſer letztern Curve zuſammen, welche alſo die Umhüllungs- oder Umſchließungscurve aller durch das Syſtem der Gleichungen (α_1), (α_2) charakteriſirten Curven wird; denn die Gleichung, welche dieſes Zuſammenfallen der Tangenten ausdrückt, nämlich:

$$\frac{2y - p}{x} = -\frac{x}{p}$$

iſt mit der Gleichung (b) identiſch.

Dieſes ſtimmt mit dem im §. 184 Geſagten überein, und die Gleichung (α) wird erhalten, wenn man die Conſtante a zwiſchen der Gleichung:

$$y = ax + \frac{1 + a^2}{p^2}x^2 \qquad (c)$$

und ihre Ableitung eliminirt. Die Umhüllungscurve aller durch die Gleichung (α) oder durch die Gleichung (c), welche das allgemeine Integral derſelben iſt, ausgedrückten Parabeln iſt genau die Parabel (b), ſo daß der Berührungspunkt jeder eingeſchloſſenen Curve mit der Umſchließungscurve die erſtere in zwei paraboliſche Bogen theilt, wo der Werth von y' für den einen durch die Gleichung (α_1), und für den andern durch die Gleichung (α_2) gegeben wird.

§. 519. Hieraus entſpringt eine andere Schwierigkeit, denn wenn x die Zeit, oder eine mit der Zeit wachſende Größe bezeichnet, ſo iſt kein Grund einzuſehen, weßwegen die Function y, deren Veränderungsgeſetz durch die Gleichung (α) ausgedrückt wird, für größere Werthe von x, als die Abſciſſe Op (Fig. 48) des Berührungspunktes der eingeſchloſſenen Curve mit der umſchließenden eher durch die Ordinate des Bogens mn der eingeſchloſſenen Curve, als durch die Ordinate des Bogens $m\mu$ der Umſchließungscurve ausgedrückt werden ſoll, und dennoch iſt es unmöglich, daß dieſe von demſelben gegebenen Anfangswerthe ausgehende Function für denſelben Werth von x zwei verſchiedene Werthe zugleich habe.

Dieſe Schwierigkeit wird durch folgende Betrachtungen gehoben:

Es bezeichne $u = 0$ die Gleichung der Umſchließungscurve, wo u eine Function von x, y iſt, vermittelſt welcher wir y und dy aus der gegebenen Differenzialgleichung fortſchaffen können. Dieſe Gleichung muß die Form:

$$du = \varphi u \cdot \psi(u, x)\, dx$$

nnehmen, wo φu eine Function von u bezeichnet, welche mit u verſchwindet, nd deren Ableitung $\varphi' u$ für $u = 0$ unendlich wird, wenigſtens, wenn die unction $\psi(u, x)$ nicht ſelbſt unendlich oder unbeſtimmt wird. Denn wenn ie Function u, nachdem ſie anfangs einen von Null verſchiedenen Werth ge- abt hat, verſchwindet, was in dem Berührungspunkte der umſchloſſenen Linie nd der Umſchließungslinie ſtattfindet; ſo wird die Tangente der erſtern durch ie Gleichung $du = 0$ beſtimmt, und fällt mit der zweiten zuſammen, wie es er Fall ſein muß.

Hieraus folgt, daß die Function u, wenn ſie einmal den Werth Null rreicht hat, dieſen Werth für zunehmende Werthe der Zeit oder der Ver- nderlichen x fortwährend beibehält, ſo daß die Function y, welche im erſten heile ihres Laufes durch die Ordinate der umſchloſſenen Linie ausgedrückt ird, darauf durch die Ordinate der Umſchließungslinie dargeſtellt wird.

Wenn man, um dieſes auf unſer Beiſpiel anzuwenden:

$$u = p(p - 2y) - x^2$$

etzt, ſo verwandeln ſich die Gleichungen (α_1), (α_2) in:

$$du = \sqrt{u} \cdot \frac{2\sqrt{u} + 1}{x}, \quad du = \sqrt{u} \cdot \frac{2\sqrt{u} - 1}{x}.$$

§. 520. Wir kommen alſo auf dieſe Weiſe wieder auf die im vierten apitel des gegenwärtigen Buches auseinander geſetzte Theorie der ſingulären ntegrale, und hieraus geht hervor, weßwegen wir den Namen Integrale, elcher von einigen Autoren mit Unrecht verworfen iſt, beibehalten haben. In er That wird, wenn die Zeit explicite oder implicite die Rolle der unab- ängigen veränderlichen Größe ſpielt, das eigentliche Problem der Integration, elches in der Beſtimmung der Summe der unendlich kleinen Incremente der unction während eines gegebenen Zeitraumes beſteht, ſucceſſive vermittelſt ines particulären Integrales, und vermittelſt eines ſingulären Integrales ge- öſt, ſo daß die Auflöſung nur dann vollſtändig iſt, wenn man das ſinguläre ntegral mit dem Syſteme der particulären Integrale oder mit dem allgemeinen ntegrale verbindet.

Dieſe Eigenſchaft kommt dem ſingulären Integrale deswegen zu, weil es ie Umhüllungslinie aller durch die particulären Integrale gegebenen Linien usdrückt. Selbſt in dem Falle, wo ſich die Gleichung der Umhüllungslinie urch eine ſchickliche Beſtimmung der willkürlichen Conſtanten aus dem allge- einen Integrale ableiten ließe (daſſelbe alſo in dem rein abſtracten Sinne ein ſinguläres Integral mehr wäre), würde es folglich doch noch die Eigen- hümlichkeit eines ſingulären Integrales in ſo fern haben, als man es mit edem der übrigen ſingulären Integrale verbinden müßte, um die Auflöſung er Integrationsaufgabe vollſtändig zu machen, wenn die Zeit oder eine mit er Zeit wachſende Größe die unabhängige Veränderliche iſt.

So iſt z. B. von der Differenzialgleichung:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \qquad (d)$$

as allgemeine Integral:

$$y^2 + x^2 - 2ay = 0,$$

elches unendlich viele Kreiſe ausdrückt, deren Mittelpunkte auf der Axe der liegen, und welche ſämmtlich die Axe der x im Anfangspunkte der Coordi- aten berühren. Die Gleichung $y = 0$, welche der gegebenen Gleichung ge-

Siebentes Buch.

Integration der Differenzialgleichungen mit mehreren unabhängigen veränderlichen Größen.

Erſtes Kapitel.

Ueber die Integration der Gleichungen mit totalen Differenzialen. – Geometriſche Anwendungen.

---

§. 523. Wenn man zwiſchen den unabhängigen Veränderlichen x, y und der davon abhängigen Function z eine Gleichung von der Form:

$$dz = \varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy$$

hat, ſo läßt ſich die Integration dieſer Gleichung auf die Quadraturen zurückführen (§. 393), wenn die Functionen φ, ψ der Bedingung der Integrabilität:

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\psi}{dx}$$

genügen.

Wenn die Functionen φ, ψ die Veränderliche z enthielten, oder wenn man zwiſchen den Veränderlichen x, y, z, und ihren Differenzialen die Gleichung:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \qquad (1)$$

hätte, wo X, Y, Z Functionen von x, y, z bezeichnen, ſo ließe ſich die Integration dieſer Gleichung noch auf die Quadraturen zurückführen (§. 396), wenn die Functionen X, Y, Z die Bedingungen der Integrabilität:

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}$$

erfüllen, und das Integral würde die Form $F(x,y,z) = \text{const.}$ haben, wo F die Function bezeichnet, deren genaues Differenzial der erſte Theil der Gleichung (1) iſt.

In allen Fällen muß, wenn man annimmt, daß es eine Function z von zwei unabhängig veränderlichen Größen x, y gibt, welche der Gleichung (1) genügt, und woraus man einen Werth von dz von der Form:

$$dz = pdx + qdy$$

ableiten kann, die Gleichung ſtattfinden:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}; \qquad (2)$$

ber vermöge der Gleichung (1) hat man:

$$p = -\frac{X}{Z}, \quad q = -\frac{Y}{Z},$$

voraus folgt:

$$\frac{dp}{dy} = -\left\{\frac{d\left(\frac{X}{Z}\right)}{dy} + \frac{d\left(\frac{X}{Z}\right)}{dz} \cdot \frac{dz}{dy}\right\} = -\frac{d\left(\frac{X}{Z}\right)}{dy} + \frac{d\left(\frac{X}{Z}\right)}{dz} \cdot \frac{Y}{Z}$$

$$\frac{dq}{dx} = -\left\{\frac{d\left(\frac{Y}{Z}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{Y}{Z}\right)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}\right\} = -\frac{d\left(\frac{Y}{Z}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{Y}{Z}\right)}{dz} \cdot \frac{X}{Z},$$

daß die Gleichung (1) nach verrichteten Reductionen

$$X\left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) + Y\left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}\right) + Z\left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) = 0 \qquad (3)$$

bt.

Wenn dieſe letzte Gleichung, welche die Bedingung der Integrabilität sdrückt, erfüllt wird, ſo läßt ſich die Integration der Gleichung (1) auf die n Gleichungen mit zwei Veränderlichen zurückführen; denn wenn man das ntegral der Gleichung (1) hätte, und differenzirte daſſelbe, indem man z s eine Conſtante betrachtete; ſo müßte das erhaltene Reſultat mit der Glei- ung (1), nachdem man darin $dz = 0$ geſetzt hat, d. h. mit der Gleichung:

$$Xdx + Ydy = 0 \qquad (4)$$

ereinſtimmen.

Umgekehrt, wenn man durch μ den Factor bezeichnet, welcher $Xdx + Ydy$ einem genauen Differenziale macht, wenn man z als eine Conſtante be- chtet, und

$$f\mu(Xdx + Ydy) = F(x, y)$$

zt, ſo iſt das Integral der Gleichung (1):

$$F(x, y) = Z_1, \qquad (5)$$

o Z_1 eine Function der einzigen Veränderlichen z bezeichnet. Um ſie zu ſtimmen, wollen wir bemerken, daß

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = \frac{dZ_1}{dz}dz,$$

ner:

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = \mu(Xdx + Ydy) = -\mu Z dz,$$

d folglich:

$$\frac{dZ_1}{dz} = \frac{dF}{dz} - \mu Z \qquad (6)$$

Wenn alſo die Gleichung (3) erfüllt wird, ſo müſſen die beiden Ver- derlichen x, y zu gleicher Zeit aus dem zweiten Theile der Gleichung (6) rſchwinden, wenn man eine derſelben vermittelſt der Gleichung (5) fort-

ſchafft, oder mit andern Worten, die in Beziehung auf x genommene Ableitung dieſes zweiten Theiles muß $= 0$ ſein, wenn man y als eine durch die Gleichung (5) gegebene Function von x und von Z betrachtet. Die zu verificirende Bedingung wird alſo ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\frac{d \cdot \left(\frac{dF}{dz} - \mu Z\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{dF}{dz} - \mu Z\right)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

oder durch:

$$\frac{d^2F}{dxdz} - \mu \frac{dZ}{dx} - Z\frac{d\mu}{dx} - \left(\frac{d^2F}{dydz} - \mu \frac{dZ}{dy} - Z\frac{d\mu}{dy}\right)\frac{X}{Y} = 0, \quad (7)$$

wenn man für $\frac{dy}{dx}$ ſeinen aus der Gleichung (4) abgeleiteten Werth ſetzt.

Außerdem hat man:

$$\frac{d^2F}{dxdz} = \frac{d \cdot \mu X}{dz} = \mu \frac{dX}{dz} + X\frac{d\mu}{dz}$$

$$\frac{d^2F}{dydx} = \frac{d \cdot \mu Y}{dz} = \mu \frac{dY}{dz} + Y\frac{d\mu}{dz},$$

und der Factor μ leiſtet der Bedingungsgleichung:

$$X\frac{d\mu}{dy} - Y\frac{d\mu}{dx} + \mu\left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) = 0$$

Genüge (§. 444).

Subſtituirt man nun die aus den drei letzten Gleichungen abgeleiteten Werthe von:

$$\frac{d^2F}{dxdz}, \frac{d^2F}{dydz}, \frac{d\mu}{dx}$$

in die Gleichung (7), ſo verſchwinden die Größen:

$$\mu, \frac{d\mu}{dy}, \frac{d\mu}{dz}$$

zu gleicher Zeit, und man kommt wieder auf die Gleichung (3), welche die Bedingung der Integrabilität ausdrückt.

§. 524. Wenn dieſe Gleichung nicht erfüllt wird, ſo gibt es keine Function z der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y, welche die Gleichung (1) verificiren kann, d. h. dieſe Gleichung drückt nicht mehr eine Eigenſchaft der Coordinaten x, y, z einer gewiſſen Oberfläche aus. Aber deswegen iſt die Gleichung (1) doch nicht ohne alle Bedeutung und ſie kann z. B. ſehr wohl eine gemeinſchaftliche Eigenſchaft einer Reihe von Curven ausdrücken, deren veränderliche Coordinaten durch x, y, z bezeichnet werden (§. 263 und 267); nun gibt es keine Fläche mehr, welche der geometriſche Ort aller dieſer Linien iſt. Wenn man zwiſchen y und x eine willkürliche Relation aufſtellt, d. h. die Projection einer dieſer Linien auf der Ebene der x,y willkürlich zeichnet, ſo wird z eine Function der einzigen unabhängigen Veränderlichen x, und die auf dieſelbe Weiſe wie eine gewöhnliche Differenzialgleichung conſtruirte Gleichung (1) beſtimmt alsdann die Projection derſelben Linie auf der Ebene der xz, wofern nur ein Punkt gegeben iſt, durch welchen dieſe Projection gehen muß. Die Integration der Gleichung (1) beſteht in dieſem Falle darin, zwi-

ſchen den Coordinaten x, y, z ein Syſtem von Gleichungen mit einer willkürlichen Function zu finden, woraus man durch eine ſchickliche Beſtimmung dieſer willkürlichen Function alle Linien ableiten kann, deren Coordinaten die Eigenſchaft beſitzen, der gegebenen Differenzialgleichung Genüge zu leiſten.

Nun ergibt ſich aber die Auflöſung dieſer Aufgabe unmittelbar aus der Analyſe, welche uns auf die Integration der gegebenen Differenzialgleichung geführt hat, wenn dieſe die Bedingung der Integrabilität erfüllt; denn wenn man in dem entgegengeſetzten Falle, ſtatt die in der Gleichung (5) vorkommende Function Z zu beſtimmen

$$F(x, y) = \varphi z \tag{8}$$

ſetzt, wo φ eine willkürliche Function bezeichnet, und dann:

$$\frac{dF}{dz} - \mu Z = \varphi' z, \tag{9}$$

ſo verificiren die Werthe von x, y als Functionen von z, welche die Gleichungen (8) und (9) erfüllen, auch die gegebene Differenzialgleichung, deren Integral folglich durch das Syſtem (8) und (9) mit der willkürlichen Function φ und ihrer Ableitung ausgedrückt wird.

Geſetzt, man ſollte ausdrücken, daß die Linie, deren veränderliche Coordinaten x, y, z ſind, durch die Berührung einer Kegelfläche, deren Mittelpunkt im Punkte (x, y, z) liegt und einer Rotationsfläche um die Axe der z beſtimmt wird; ſo müßten die auf dieſer Linie liegenden Punkte zu gleicher Zeit den Gleichungen:

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0), \tag{10}$$

$$py - qx = 0, \tag{11}$$

$$dz = pdx + qdy$$

Genüge leiſten (§. 249 und 254), woraus ſich durch Elimination von p und q ergibt:

$$\frac{dz}{z - z_0} = \frac{xdx + ydy}{x(x - x_0) + y(y - y_0)}. \tag{12}$$

Dieſe Gleichung erfüllt die Bedingung der Integrabilität nicht, ſo lange x_0, y_0 nicht verſchwinden, und in dieſem Falle hat man die Gleichungen:

$$\mu = x(x - x_0) + y(y - y_0)$$

$$F(x, y) = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad Z = -\frac{1}{z - z_0},$$

vermöge welcher ſich die Gleichungen (8) und (9) reſp. in:

$$x^2 + y^2 = 2\varphi z, \quad \frac{x(x - x_0) + y(y - y_0)}{z - z_0} = \varphi' z \tag{13}$$

verwandeln. Die Gleichung (12) oder das damit gleichbedeutende Syſtem der Gleichungen (13) gehören folglich allen Linien an, welche die angegebene geometriſche Eigenſchaft haben.

Man hätte dieſelbe Aufgabe auch dadurch anders ausdrücken können, daß man gefragt hätte, welches iſt die Gleichung der Fläche, die zugleich in die Familie der durch die Gleichung (10) charakteriſirten Kegelflächen und in die Familie der durch die Gleichung (11) charakteriſirten Rotationsflächen gehört? Die Gleichung (12), auf welche man durch den Ausdruck dieſer doppelten Bedingung geführt wird, erfüllt die Bedingung der Integrabilität nicht, ſo lange x_0, y_0 nicht verſchwinden, woraus alſo im Allgemeinen folgt, daß eine

ſolche Fläche nicht exiſtirt. Wenn x_0, y_0 verſchwinden, ſo läßt ſich die Gleichung (12) integriren, und gibt:

$$z - z_0 = c\sqrt{x^2 + y^2},$$

wo c die willkürliche Conſtante bezeichnet. Dieſe Gleichung gehört zu allen geraden Kegelflächen, deren Mittelpunkt in dem Punkte der Axe der z liegt, deſſen Ordinate z_0 iſt, und es iſt einleuchtend, daß dieſe geraden Kegelflächen der ſo ausgedrückten Aufgabe in der That genügen.

Wenn man die Gleichung (12) auf die Form:

$$dz\,[x(x - x_0) + y(y - y_0)] = (z - z_0)(x\,dx + y\,dy)$$

bringt, ſo ſieht man, daß ſie durch die Gleichung $z - z_0 = 0$ erfüllt wird, ohne daß man anzunehmen braucht, daß die Coordinaten x_0, y_0 verſchwinden. Alſo iſt die durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) ſenkrecht auf die Axe der z gelegte Ebene eine Fläche, welche der Bedingung der Aufgabe genügt; aber dieſe Auflöſung iſt keine ſinguläre, wie aus der obigen Form der Gleichung deutlich hervorgeht, und ſie enthält die zur Vollſtändigkeit des Integrales erforderliche willkürliche Conſtante nicht.

§. 525. Wenn die gegebene Differenzialgleichung in Beziehung auf die Differenziale dx, dy, dz nicht linear iſt, ſo kann ſie der Gleichung (3) nicht genügen, und folglich eine Gleichung zwiſchen x, y, z und einem willkürlichen Parameter nicht zum vollſtändigen Integrale haben, ſo lange ſie ſich nicht in lineare Factoren zerlegen läßt. Gleichwohl gibt es unter den nicht linearen Differenzialgleichungen, welche dieſer vorläufigen Bedingung der Integrabilität nicht genügen, noch ſolche, die eine geometriſche Bedeutung haben und ſich durch Einführung willkürlicher Functionen in aller erforderlichen Allgemeinheit integriren laſſen.

So beſteht z. B. das Problem der Rectification ebener Curven in der Integration der Differenzialgleichung mit drei Veränderlichen:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad (14)$$

welche ſich weder in lineare Factoren zerlegen läßt, noch eine einzige Gleichung zwiſchen x, y, s und einer willkürlichen Conſtanten zum Integrale hat; aber deren allgemeines Integral ſich nichts deſto weniger unter einer zuſammengeſetzten Form ausdrücken läßt. Denn man kann die Gleichung (14) auf folgende Form bringen:

$$ds^2 = (dx\cos.\alpha - dy\sin.\alpha)^2 + (dx\sin.\alpha + dy\cos.\alpha)^2,$$

wo α einen willkürlichen Winkel bezeichnet, und folglich kann man dieſe Gleichung durch das Syſtem der beiden andern Gleichungen:

$$ds = dx\cos.\alpha - dy\sin.\alpha, \quad dx\sin.\alpha + dy\cos.\alpha = 0$$

erſetzen, deren Integrale:

$$s = x\cos.\alpha - y\sin.\alpha + \beta, \quad x\sin.\alpha + y\cos.\alpha = \gamma, \qquad (15)$$

ſind, wo β, γ andere willkürliche Conſtanten bezeichnen. Da uns nun das Syſtem der Gleichungen (15) eine particuläre Auflöſung der Gleichung (14) liefert, ſo kommt es darauf an, dieſe Auflöſung zu verallgemeinern, und zu dem Zwecke wollen wir nach der bereits in Buch 4, Kap. 8 angewandten Methode zunächſt $\beta = \varphi\alpha$, $\gamma = \psi\alpha$ ſetzen und dann die in Beziehung auf die jetzt als veränderlich betrachtete Größe α genommenen Ableitungen der Gleichungen (15) gleich Null ſetzen. Durch dieſe Rechnung ergibt ſich:

$$0 = -x\sin.\alpha - y\cos.\alpha + \varphi'\alpha, \quad x\cos.\alpha - y\sin.\alpha = \psi'\alpha,$$

is $\psi\alpha = \varphi'\alpha$, $\psi'\alpha = \varphi''\alpha$ folgt. Folglich wird der Gleichung (14) das Syſtem der drei Gleichungen:

$$s = x\cos.\alpha - y\sin.\alpha + \varphi\alpha$$
$$x\sin.\alpha + y\cos.\alpha = \varphi'\alpha$$
$$x\cos.\alpha - y\sin.\alpha = \varphi''\alpha$$

ıt, worin die Function φ willkürlich bleibt oder durch das Syſtem:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi'\alpha \cdot \sin.\alpha + \varphi''\alpha \cdot \cos.\alpha \\ y &= \varphi'\alpha \cdot \cos.\alpha - \varphi''\alpha \cdot \sin.\alpha \\ s &= \varphi\alpha + \varphi''\alpha \end{aligned}\right\}, \qquad (16)$$

es ſich daraus ergibt und woraus in der That die Werthe:

$$dx = (\varphi'\alpha + \varphi'''\alpha)\cos.\alpha\, d\alpha$$
$$dy = -(\varphi'\alpha + \varphi'''\alpha)\sin.\alpha\, d\alpha$$
$$ds = (\varphi'\alpha + \varphi'''\alpha)\, d\alpha$$

ı, welche der Gleichung (14) offenbar Genüge leiſten. Wenn man die ı der Function φ angibt, ſo erhält man die Gleichung der ebenen Curve, velche die Größen s, x, y reſp. die Länge des Bogens, die Abſciſſe und Ordinate bezeichnen, wenn man, wo möglich, zwiſchen den beiden erſten hungen (16) α eliminirt und den Werth des Bogens s als Function x oder y erhält man, wenn man α zwiſchen der dritten und erſten oder en dieſer Gleichungen eliminirt. Wenn dagegen die Gleichung der Curve:

$$f(x, y) = 0 \qquad (f)$$

en iſt, und man ſubſtituirt die vorhergehenden Werthe von x, y hinein, hält man eine Differenzialgleichung der zweiten Ordnung zwiſchen α und durch deren vollſtändige Integration zwei willkürliche Conſtanten eingewerden. In dieſem Falle gäbe aber auch die dritte der Gleichungen (16) Werth von s mit zwei willkürlichen Conſtanten, während dieſer Werth ı der willkürlichen Wahl des Anfangspunktes der Bogen nothwendig nur einzige willkürliche Conſtante geſtattet. Nach einer ähnlichen Bemerkung Lagrange hat Poiſſon dieſe Schwierigkeit auf folgende Weiſe be-
t.

Wenn man die Gleichung (f) differenzirt und darin für dx, dy ihre he als Functionen von α ſubſtituirt, ſo erhält man die Gleichung:

$$\left(\frac{df}{dx}\cos.\alpha - \frac{df}{dy}\sin.\alpha\right)(\varphi'\alpha + \varphi'''\alpha)\, d\alpha = 0,$$

e in die beiden andern:

$$\varphi'\alpha + \varphi'''\alpha = 0, \quad \frac{df}{dx}\cos.\alpha - \frac{df}{dy}\sin.\alpha = 0$$

lt, wovon ſich die erſte unmittelbar integriren läßt, und

$$\varphi\alpha + \varphi''\alpha = \text{const.}$$

aber dieſe Auflöſung genügt der Aufgabe nicht, weil daraus $s = \text{const.}$ Die zweite Gleichung enthält $\varphi'''\alpha$ nicht und iſt, wie die Gleichung in Beziehung auf φ von der zweiten Ordnung. Wenn man alſo $\varphi''\alpha$ hen dieſen beiden Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung eliminirt, hält man eine Differenzialgleichung der erſten Ordnung, welche ein ſines Integral von (f) iſt, und wenn man nochmals integrirt, ſo erhält den Werth von $\varphi\alpha$ und folglich den von s mit einer willkürlichen Con-
n.

§. 526. Das Syſtem der Gleichungen (16) iſt nicht das einzige, welches man als der Gleichung (14) gleichbedeutend betrachten kann, und es iſt einleuchtend, daß dieſer Gleichung durch das Syſtem der particulären Werthe:

$$x = as + \alpha, \quad y = s\sqrt{1-a^2} + \beta,$$

worin a, α, β Conſtanten bezeichnen, genügt wird. Man genügt alſo auch der Gleichung (14) durch das Syſtem der Ausdrücke:

$$x = s\varphi\alpha + \alpha, \quad y = s\sqrt{1-(\varphi\alpha)^2} + \psi\alpha, \tag{17}$$

worin φ, ψ willkürliche Functionen der Veränderlichen α bezeichnen, welche den abgeleiteten Gleichungen:

$$0 = s\varphi'\alpha + 1, \quad 0 = -\frac{s\varphi\alpha \cdot \varphi'\alpha}{\sqrt{1-(\varphi\alpha)^2}} + \psi'\alpha \tag{18}$$

genügen müſſen. Die Gleichungen (17) und (18) laſſen ſich auch folgendermaßen ausdrücken:

$$\varphi\alpha - \frac{x-\alpha}{s} = 0, \quad \varphi'\alpha + \frac{1}{s} = 0,$$

$$\frac{y-\psi\alpha}{s} - \sqrt{1-\left(\frac{x-\alpha}{s}\right)^2} = 0, \quad \psi'\alpha + \frac{\frac{x-\alpha}{s}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\alpha}{s}\right)^2}} = 0,$$

woraus man ſieht, daß die erſte mit der vierten identiſch wird, wenn man die Function φ ſo beſtimmt, daß ſie der Relation:

$$\varphi\alpha = -\psi'\alpha \cdot \sqrt{1-\left(\frac{x-\alpha}{s}\right)^2}$$

genügt.

Zu gleicher Zeit wird die zweite Gleichung, welche die in Beziehung auf α genommene Ableitung der erſten iſt, mit der Ableitung der vierten, oder mit der zweiten Ableitung der dritten Gleichung identiſch, die Function φ iſt eliminirt, und man hat zur Erfüllung der Gleichung (14) das Syſtem der drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} s^2 &= (x-\alpha)^2 + (y-\varphi\alpha)^2 \\ x-\alpha &+ (y-\psi\alpha)\,\psi'\alpha = 0 \\ -1 &- (\psi'\alpha)^2 + (y-\psi\alpha)\,\psi''\alpha = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{19}$$

woraus erhellet, daß α, $\psi\alpha$ und s reſp. die zu den Axen der x und der y parallelen Coordinaten und den Krümmungshalbmeſſer der Linie bezeichnen, welche die Linie, deren veränderliche Coordinaten x, y ſind, zur Evolute hat (§. 190 und folg., §. 334 und §. 492).

Wenn die Gleichung (14) durch die allgemeinere:

$$F\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right) = 0$$

erſetzt würde, ſo erhielte man durch dieſelbe Analyſe ſtatt der Gleichungen (19) die folgenden:

$$F\left(\frac{x-\alpha}{s}, \frac{y-\psi\alpha}{s}\right) = 0, \quad \frac{dF}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d^2F}{d\alpha^2} = 0.$$

Zweites Kapitel.

Ueber die Integration der partiellen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung unter endlicher Form.

§. 527. Im §. 166 und folg. haben wir gesehen, wie zwischen einer Gleichung mit mehreren unabhängigen Veränderlichen und ihren Ableitungen willkürliche Functionen eliminirt werden, und wie man durch diese Elimination auf eine partielle Differenzialgleichung kommt, welche eben die Allgemeinheit hat, als die ursprüngliche Gleichung, welche das Integral derselben ist. Derselbe Gegenstand ist bei den Anwendungen auf die Theorie der krummen Flächen im Buche 4, Kap. 7 und 8 wieder ausführlicher zur Sprache gebracht, und es kommt jetzt darauf an, die allgemeinsten Verfahrungsarten auseinander zu setzen, welche man anwendet, um von einer partiellen Differenzialgleichung zu ihrem Integrale überzugehen, wenn sich dieses Integral unter endlicher Form, oder in convergirenden unendlichen Reihen vermittelst der bekannten analytischen Hülfsmittel ausdrücken läßt. Uebrigens haben die partiellen Differenzialgleichungen, an und für sich und unabhängig von den Zufälligkeiten ihrer Form, welche bewirken können, daß sie analytische Integrale haben oder nicht, betrachtet, eine Bedeutung und einen eigenthümlichen Werth, welche wir am Ende dieses Buches näher untersuchen müssen.

I. Von der Integration der linearen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung.

§. 528. Die Integration der partiellen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung, welche in Beziehung auf die darin vorkommenden partiellen Ableitungen linear sind, ist von Lagrange auf die Integration eines Systemes gleichzeitiger Differenzialgleichungen zurückgeführt. Es sei:

$$X\frac{du}{dx}+Y\frac{du}{dy}+Z\frac{du}{dz}+T\frac{du}{dt}+\text{ꝛc.}=U \qquad (a)$$

die zu integrirende Differenzialgleichung und:

$$F(u, x, y, z, t, \text{ꝛc.})=0$$

das gesuchte Integral, wo u eine Function der n unabhängigen Veränderlichen $x, y, z, t,$ ꝛc. und $U, X, Y, Z, T,$ ꝛc. beliebige Functionen der $n+1$ Veränderlichen $u, x, y, z, t,$ ꝛc. bezeichnen; so hat man:

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dx}=0,\quad \frac{dF}{dy}+\frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dy}=0,\quad \frac{dF}{dz}+\frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dz}=0,\ \text{ꝛc.};$$

folglich kann die Gleichung (a) die Form:

$$U\frac{dF}{du}+X\frac{dF}{dx}+Y\frac{dF}{dy}+Z\frac{dF}{dz}+T\frac{dF}{dt}+\text{ꝛc.}=0 \qquad (b)$$

annehmen, und die Aufgabe ist darauf zurückgeführt, die Function F, welche der Gleichung (b) genügt, auf die allgemeinste Weise zu bestimmen.

Gesetzt, man hätte das in der continuirlichen Gleichung:

$$\frac{du}{U}=\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}=\frac{dt}{T}=\text{ꝛc.} \qquad (c)$$

enthaltene Syſtem von n gleichzeitigen Differenzialgleichungen mit aller erforderlichen Allgemeinheit integrirt, ſo kann man den Integralen folgende Form geben:

$$f_1(x, y, z, t, \ldots u) = a_1, \quad f_2(x, y, z, t, \ldots u) = a_2, \ldots$$
$$\ldots f_n(x, y, z, t, \ldots u) = a_n, \qquad (d)$$

wo $a_1, a_2, \ldots a_n$ die durch die Integration eingeführten n willkürlichen Conſtanten bezeichnen, und man hat folglich:

$$\frac{df_1}{du}du + \frac{df_1}{dx}dx + \frac{df_1}{dy}dy + \frac{df_1}{dz}dz + \frac{df_1}{dt}dt + \text{ꝛc.} = 0$$
$$\frac{df_2}{du}du + \frac{df_2}{dx}dx + \frac{df_2}{dy}dy + \frac{df_2}{dz}dz + \frac{df_2}{dt}dt + \text{ꝛc.} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{df_n}{du}du + \frac{df_n}{dx}dx + \frac{df_n}{dy}dy + \frac{df_n}{dz}dz + \frac{df_n}{dt}dt + \text{ꝛc.} = 0$$

oder wegen der Gleichungen (c):

$$\left.\begin{aligned} U\frac{df_1}{du} + X\frac{df_1}{dx} + Y\frac{df_1}{dy} + Z\frac{df_1}{dz} + T\frac{df_1}{dt} + \text{ꝛc.} = 0 \\ U\frac{df_2}{du} + X\frac{df_2}{dx} + Y\frac{df_2}{dy} + Z\frac{df_2}{dz} + T\frac{df_2}{dt} + \text{ꝛc.} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U\frac{df_n}{du} + X\frac{df_n}{dx} + Y\frac{df_n}{dy} + Z\frac{df_n}{dz} + T\frac{df_n}{dt} + \text{ꝛc.} = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (d')$$

Die n Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ leiſten alſo der Gleichung (b) Genüge, und liefern eben ſo viele particuläre Integrale der gegebenen Gleichung (a).

Es iſt leicht einzuſehen, daß eine willkürliche Function Φ der Größen $f_1, f_2, \ldots f_n$ ebenfalls der Gleichung (a) genügt; denn wenn man die erſten Theile der Gleichungen (d'), nachdem ſie reſp. durch:

$$\frac{d\Phi}{df_1}, \frac{d\Phi}{df_2}, \ldots \frac{d\Phi}{df_n}$$

multiplicirt ſind, zuſammenaddirt; ſo erhält man:

$$U\frac{d\Phi}{du} + X\frac{d\Phi}{dx} + Y\frac{d\Phi}{dy} + Z\frac{d\Phi}{dz} + T\frac{d\Phi}{dt} + \text{ꝛc.} = 0.$$

Das Integral der gegebenen Differenzialgleichung iſt alſo:

$$\Phi(f_1, f_2, f_3 \ldots f_n) = 0, \quad \text{oder} \quad f_1 = \varphi(f_2, f_3 \ldots f_n),$$

wo Φ, φ willkürliche Functionen bezeichnen, und außerdem ſieht man leicht ein, daß dieſes Integral alle erforderliche Allgemeinheit hat, weil man durch die Verbindung einer Gleichung mit ihren partiellen Ableitungen der erſten Ordnung nur eine willkürliche Function eliminiren kann.

§. 529. Wir wollen dieſe Analyſe auf die Differenzialgleichung mit drei Veränderlichen:

$$X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} = Z, \quad \text{oder} \quad Xp + Yq = Z \qquad (1)$$

wenden, und zuerſt annehmen, daß ſich die Functionen X, Y, Z auf conſtante hlen P, Q, R reduciren, ſo verwandeln ſich die Gleichungen (c) in:

$$Rdx - Pdz = 0, \quad Rdy - Qdz = 0$$

d führen auf die Integrale:

$$Rx - Pz = a_1, \quad Ry - Qz = a_2, \tag{2}$$

daß die gegebene Differenzialgleichung (1) das allgemeine Integral:

$$Rx - Pz = \varphi(Ry - Qz)$$

t. Dieſe Gleichung charakteriſirt die Familie der cylindriſchen Flächen, und : Gleichungen (2) ſind die der geraden Erzeugungslinien (§. 247).

Wir wollen den Größen X, Y ihre conſtanten Werthe P, Q laſſen und $= a_0$ ſetzen, ſo ſind die zu integrirenden Differenzialgleichungen:

$$Pdy - Qdx = 0, \quad zdx - Pdz = 0,$$

glich:

$$Py - Qx = a_1, \quad z = a_2 e^{\frac{x}{P}},$$

d folglich bekommt das Integral der gegebenen Differenzialgleichung die rm:

$$z = e^{\frac{x}{P}} \cdot \varphi(Py - Qx). \tag{3}$$

Als letztes Beiſpiel wollen wir endlich die Differenzialgleichung:

$$px + qy = n\sqrt{x^2 + y^2} \tag{4}$$

hmen, ſo haben wir die Differenzialgleichungen mit zwei veränderlichen röße n:

$$xdz = ndx\sqrt{x^2 + y^2}, \quad xdy - ydx = 0$$

integriren. Die zweite gibt $y = a_1 x$, und die erſte verwandelt ſich durch ubſtitution dieſes Werthes von y in:

$$dz = ndx\sqrt{1 + a_1^2}, \text{ folglich: } z = n\sqrt{1 + a_1^2} \cdot x + a_2$$

d wenn man für a_1 ſeinen Werth ſetzt:

$$z - n\sqrt{x^2 + y^2} = a_2.$$

as geſuchte Integral iſt folglich:

$$z = n\sqrt{x^2 + y^2} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

§. 530. Das Eigenthümliche der vollſtändigen Integrale (d) beſteht rin, daß ſie den Gleichungen (c) unmittelbar genügen, ſo daß die aus den bleitungen der Gleichungen (d) gezogenen Werthe von du, dx, dy, dz, ꝛc. die leichungen (c) identiſch machen, ohne daß man auf die zwiſchen den Ver- derlichen, u, x, y, z, ꝛc. durch dieſelben Gleichungen aufgeſtellten Relationen rückzukommen braucht, und daß die Gleichungen (d) oder ihre Ableitungen n Gleichungen (c) genügen müſſen, was für Werthe man den willkürlichen nſtanten auch beilegen mag. Umgekehrt, wenn die Gleichungen (c) fingu- re Integrale:

$$\left.\begin{gathered}\varphi_1(x, y, z, t, \ldots u) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z, t, \ldots u) = 0, \ldots \varphi_n(x, y, z, t, \ldots u) = 0\end{gathered}\right\} \tag{δ}$$

ben, ſo genügen die Ableitungen derſelben den Gleichungen (c) nur in ſo :n, als man die durch die Gleichungen (δ) ausgedrückten Relationen in

Betracht zieht, oder mit andern Worten, man muß die Gleichungen (δ) mit ihren Ableitungen verbinden, um dem Syſteme der Gleichungen (c) zu genügen.

Hiernach genügt jede der Gleichungen (δ) der Gleichung (b), oder der Gleichung (a), wovon dieſe eine Transformation iſt; aber der Gleichung (b) wird nicht genügt, wenn man für F eine willkürliche Function der Größen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, oder eine willkürliche Function nimmt, worin die Größen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ alle, oder zum Theil mit den Größen $f_1, f_2, \ldots f_n$ alle oder zum Theil verbunden vorkommen. Die Gleichung (a) kann alſo kein anderes vollſtändiges Integral haben, als das, worin die Größen $f_1, f_2, \ldots f_n$ ausſchließlich unter dem Zeichen der willkürlichen Function vorkommen; aber ſie wird durch jede der Gleichungen (δ) erfüllt, und dieſe Gleichungen ſind die ſingulären Integrale der Gleichung (a), weil ſie nicht in dem vollſtändigen Integrale enthalten ſind.

Wir wollen z. B. die lineare Differenzialgleichung der erſten Ordnung mit drei veränderlichen Größen:

$$p - q\left(\tfrac{1}{2} + x - \sqrt{x^2 + y + z}\right) = \tfrac{1}{2} - x + \sqrt{x^2 + y + z} \qquad (5)$$

betrachten, deren Integration der der gleichzeitigen Differenzialgleichungen:

$$y' = -\tfrac{1}{2} - x + \sqrt{x^2 + y + z}$$
$$z' = \tfrac{1}{2} - x + \sqrt{x^2 + y + z}$$

ſubordinirt iſt, wofür man:

$$z' = 1 + y', \quad z + y = x(z' + y') + \left(\frac{z' + y'}{2}\right)^2$$

ſetzen kann, deren vollſtändige Integrale:

$$z = x + y + a_1, \quad z + y = 2a_2 x + a_2^2$$

ſind. Das zweite dieſer Integrale führt auf das ſinguläre Integral:

$$x^2 + y + z = 0. \qquad (9)$$

Jede der Gleichungen:

$$z - x - y = a_1, \quad -x + \sqrt{x^2 + y + z} = a_2$$

gibt für p und q Werthe, welche, wenn ſie in die Gleichung (5) ſubſtituirt werden, dieſe Gleichung identiſch machen, und folglich iſt das vollſtändige Integral der Gleichung (5):

$$-x + \sqrt{x^2 + y + z} = \psi(z - x - y),$$

wo ψ eine willkürliche Function bezeichnet. Dagegen gibt die Gleichung (6) für p und q Werthe, welche, wenn ſie in die Gleichung (5) ſubſtituirt werden, dieſer Gleichung nur in ſo fern genügen, wenn man die Gleichung (6) in Betracht zieht, um die in der Gleichung (5) vorkommende Wurzelgröße fortzuſchaffen, ſo daß die Gleichung (6) der gegebenen Gleichung (5) nur nach Art der ſingulären Integrale genügt.

Wenn man die Gleichung (4) auf die gleichbedeutende Form:

$$x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} + n\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{dF}{dz} = 0$$

bringt, ſo ergibt ſich ebenſo, daß die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = 0,$$

oder das Syſtem der Gleichungen $x = 0$, $y = 0$ ein ſinguläres Integral derſelben iſt.

§. 531. Es ſeien x, y, z, ꝛc. n unabhängige Veränderliche, und u, v, w, ꝛc., + 1 Functionen dieſer Veränderlichen, welche dem Syſteme der m + 1 aren partiellen Differenzialgleichungen der erſten Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} U &= X\frac{du}{dx} + Y\frac{du}{dy} + Z\frac{du}{dz} + \text{ꝛc.} \\ V &= X\frac{dv}{dx} + Y\frac{dv}{dy} + Z\frac{dv}{dz} + \text{ꝛc.} \\ W &= X\frac{dw}{dx} + Y\frac{dw}{dy} + Z\frac{dw}{dz} + \text{ꝛc.} \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

ügen müſſen, worin U, V, W, ꝛc.; X, Y, Z, ꝛc. beliebige Functionen aller ängigen und unabhängigen Veränderlichen bezeichnen. Ferner ſeien:

$$f_1, f_2, f_3, \ldots f_{m+n}$$

nctionen derſelben Veränderlichen, welche, für F an die Stelle geſetzt, die eichung:

$$U\frac{dF}{du} + V\frac{dF}{dv} + W\frac{dF}{dw} + \text{ꝛc.}$$

$$+ X\frac{dF}{dx} + Y\frac{dF}{dy} + Z\frac{dF}{dz} + \text{ꝛc.} = 0 \quad (B)$$

ntiſch machen, oder vielmehr Functionen von ſolcher Beſchaffenheit, daß das ſtem der gleichzeitigen Differenzialgleichungen:

$$\frac{du}{U} = \frac{dv}{V} \quad \frac{dw}{W} = \text{ꝛc.} = \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \text{ꝛc.}$$

vollſtändigen Integrale:

$$f_1 = a_1, \; f_2 = a_2, \; f_3 = a_3, \ldots f_{m+n} = a_{m+n}$$

e; ſo hat das Syſtem der Gleichungen (A) die vollſtändigen Integrale:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_1(f_1, f_2, f_3, \ldots f_{m+n}) = 0, \; \Phi_2(f_1, f_2, f_3, \ldots f_{m+n}) = 0, \ldots \\ &\ldots \Phi_{m+n}(f_1, f_2, f_3, \ldots f_{m+n}) = 0 \end{aligned}\right\}, \quad (\Phi)$$

$\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_{m+1}$ willkürliche Functionen bezeichnen. Von dieſem merkrdigen Lehrſatze hat Jacobi folgenden Beweis gegeben:

Es bezeichnen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{m+1}$ Hülfsgrößen von ſolcher Beſchaffenheit, ; das Verhältniß einer derſelben zu allen übrigen durch das Syſtem der linearen Differenzialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\frac{d\Phi_1}{dv} + \lambda_2\frac{d\Phi_2}{dv} + \ldots + \lambda_{m+1}\frac{d\Phi_{m+1}}{dv} &= 0 \\ \lambda_1\frac{d\Phi_1}{dw} + \lambda_2\frac{d\Phi_2}{dw} + \ldots + \lambda_{m+1}\frac{d\Phi_{m+1}}{dw} &= 0 \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}\right\} \quad (\lambda)$$

immt wird, und wir wollen der Kürze wegen:

$$\lambda_1\frac{d\Phi_1}{du} + \lambda_2\frac{d\Phi_2}{du} + \ldots + \lambda_{m+1}\frac{d\Phi_{m+1}}{du} = \Delta \quad (\Delta)$$

en; ſo erhalten wir, wenn wir jede der Gleichungen Φ in Beziehung auf unabhängige Veränderliche x differenziren:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d\Phi_1}{dx}+\frac{d\Phi_1}{du}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{d\Phi_1}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{d\Phi_1}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}+\text{ꝛc.}=0\\ \frac{d\Phi_2}{dx}+\frac{d\Phi_2}{du}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{d\Phi_2}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{d\Phi_2}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}+\text{ꝛc.}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{d\Phi_{m+1}}{dx}+\frac{d\Phi_{m+1}}{du}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{d\Phi_{m+1}}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{d\Phi_{m+1}}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}+\text{ꝛc.}=0\end{array}\right\}. \quad (\Phi')$$

Wenn wir die Gleichungen λ reſp. mit $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$, ꝛc. und die Gleichung (A) mit $\frac{du}{dx}$ multipliciren, und die Producte zuſammenaddiren, ſo erhalten wir unter Berückſichtigung der Gleichungen (Φ'):

$$A\frac{du}{dx}=-\left(\lambda_1\frac{d\Phi_1}{dx}+\lambda_2\frac{d\Phi_2}{dx}+\ldots+\lambda_{m+1}\frac{d\Phi_{m+1}}{dx}\right)$$

und ebenſo würden wir finden:

$$\left.\begin{array}{l}A\frac{du}{dy}=-\left(\lambda_1\frac{d\Phi_1}{dy}+\lambda_2\frac{d\Phi_2}{dy}+\ldots+\lambda_{m+1}\frac{d\Phi_{m+1}}{dy}\right)\\ A\frac{du}{dz}=-\left(\lambda_1\frac{d\Phi_1}{dz}+\lambda_2\frac{d\Phi_2}{dz}+\ldots+\lambda_{m+1}\frac{d\Phi_{m+1}}{dz}\right)\\ \text{ꝛc.}\end{array}\right\}. \quad (\Phi'_1)$$

Aber da die für F geſetzten Functionen f und folglich die Functionen Φ der Gleichung (B) genügen, ſo hat man identiſch:

$$U\frac{d\Phi_1}{du}+V\frac{d\Phi_1}{dv}+\text{ꝛc.}+X\frac{d\Phi_1}{dx}+Y\frac{d\Phi_1}{dy}+\text{ꝛc.}=0$$

$$U\frac{d\Phi_2}{du}+V\frac{d\Phi_2}{dv}+\text{ꝛc.}+X\frac{d\Phi_2}{dx}+Y\frac{d\Phi_2}{dy}+\text{ꝛc.}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$U\frac{d\Phi_{m+1}}{du}+V\frac{d\Phi_{m+1}}{dv}+\text{ꝛc.}+X\frac{d\Phi_{m+1}}{dx}+Y\frac{d\Phi_{m+1}}{dy}+\text{ꝛc.}=0.$$

Multiplicirt man dieſe Gleichungen reſp. mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{m+1}$ und addirt die Producte zuſammen; ſo erhält man bei Berückſichtigung der Gleichungen (Φ'_1):

$$U=X\frac{du}{dx}+Y\frac{du}{dy}+Z\frac{du}{dz}+\text{ꝛc.},$$

d. h. man kommt auf die erſte des Syſtemes der gegebenen Gleichungen wieder zurück, und ebenſo bewieſe man, daß alle übrigen dieſer Gleichungen verificirt werden.

II. Ueber die Integration der nicht linearen Differenzialgleichungen der erſten Ordnung mit drei veränderlichen Größen.

§. 532. Die für die Integration der linearen Differenzialgleichungen der erſten Ordnung aus einander geſetzte Methode iſt von Lagrange auf beliebige Differenzialgleichungen der erſten Ordnung, aber blos von drei veränderlichen Größen erſtreckt. Es ſei:

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \qquad (f)$$

Differenzialgleichung dieſer Form, welche wir ſucceſſive in Beziehung auf der unabhängigen Veränderlichen x, y differenziren wollen; ſo erhalten wir r Berückſichtigung der Bedingungsgleichung $\frac{dq}{dx} = \frac{dp}{dy}$:

$$\left.\begin{aligned} -p\frac{df}{dz} - \frac{df}{dx} &= \frac{df}{dp}\cdot\frac{dp}{dx} + \frac{df}{dq}\cdot\frac{dp}{dy} \\ -q\frac{df}{dz} - \frac{df}{dy} &= \frac{df}{dp}\cdot\frac{dq}{dx} + \frac{df}{dq}\cdot\frac{dq}{dy} \end{aligned}\right\}, \qquad (f_1)$$

wenn wir hiermit die identiſche Gleichung:

$$p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq} = \frac{df}{dp}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{df}{dq}\cdot\frac{dz}{dy} \qquad (f_2)$$

inden, ſo haben wir ein Syſtem von drei Gleichungen, zwiſchen den bei- unabhängigen Veränderlichen x, y und den drei als Functionen derſelben ıchteten Veränderlichen z, p, q, welches dieſelbe Form hat, als das Syſtem im vorhergehenden §. Die Integration der drei partiellen Differenzial- hungen (f_1) und (f_2) iſt alſo von der der vier gewöhnlichen Differenzial- hungen:

$$\left(p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq}\right)\cdot\frac{dx}{dz} = \frac{df}{dp}, \quad \left(p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq}\right)\cdot\frac{dy}{dz} = \frac{df}{dq}, \qquad (g)$$

$$\left(p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq}\right)\cdot\frac{dp}{dz} = -p\frac{df}{dz} - \frac{df}{dx} \qquad (g_1)$$

$$\left(p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq}\right)\cdot\frac{dq}{dz} = -q\frac{df}{dz} - \frac{df}{dy} \qquad (g_2)$$

ingig, und aus dieſen vier Gleichungen folgt:

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz + \frac{df}{dp}dp + \frac{df}{dq}dq = 0,$$

auch der Fall ſein muß, weil die Veränderlichen x, y, z, p, q durch die ichung (f) mit einander verbunden ſind. Alsdann braucht man nur die Gleichungen (g) und (g_1) zu betrachten, welche nur die Veränderlichen , z, p enthalten, nachdem man für q ſeinen aus der Gleichung (f) abge- ten Werth als Function von x, y, z, p ſubſtituirt hat. Wenn wir ihre ſtändigen Integrale durch:

$$f_1(x, y, z, p) = a_1, \quad f_2(x, y, z, p) = a_2, \quad f_3(x, y, z, p) = a_3 \qquad (h)$$

ichnen, ſo iſt die gegebene Gleichung (f), verbunden mit den folgenden:

$$\Phi_1(f_1, f_2, f_3) = 0, \quad \Phi_2(f_1, f_2, f_3) = 0, \qquad (H)$$

n Φ_1, Φ_2 willkürliche Functionen bezeichnen, das Syſtem der allgemeinen grale der Gleichungen (g), (g_1). Aber die Allgemeinheit dieſer Auf- ag muß beſchränkt werden, weil die Functionen p, q den partiellen Dif- zialgleichungen:

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}$$

der totalen Differenzialgleichung:

$$dz = pdx + qdy \qquad (i)$$

gen müſſen.

§. 533. Aus den Gleichungen (f) und (h) kann man die Ausdrücke von x, y, p, q als Functionen von z, a_1, a_2, a_3 oder von z, f_1, f_2, f_3 ableiten, und wenn man die Größen x, y, p, q aus der Gleichung (i) fortschafft, so erhält man die Relation zwischen f_1, f_2, f_3, welcher die Gleichungen (H) genügen müssen, um als Integrale der gegebenen Gleichung betrachtet werden zu können.

Betrachtet man nun x, y, p, q als Functionen von z, f_1, f_2, f_3, so verwandelt sich die Gleichung (i) in:

$$dz = \left(p\frac{dx}{dz} + q\frac{dy}{dz}\right)dz + \left(p\frac{dx}{df_1} + q\frac{dy}{df_1}\right)df_1 + \left(p\frac{dx}{df_2} + q\frac{dy}{df_2}\right)df_2 + \left(p\frac{dx}{df_3} + q\frac{dy}{df_3}\right)df_3.$$

Aber vermöge der Gleichungen (g) hat man:

$$p\frac{dx}{dz} + q\frac{dy}{dz} = 1, \tag{k}$$

so daß sich die vorhergehende Gleichung auf:

$$P_1 df_1 + P_2 df_2 + P_3 df_3 = 0 \tag{l}$$

reducirt, wenn man der Kürze wegen

$$\left.\begin{aligned} p\frac{dx}{df_1} + q\frac{dy}{df_1} = P_1,\quad p\frac{dx}{df_2} + q\frac{dy}{df_2} = P_2 \\ p\frac{dx}{df_3} + q\frac{dy}{df_3} = P_3 \end{aligned}\right\} \tag{m}$$

setzt.

Ferner hat man:

$$\frac{dP_1}{dz} = \frac{d\left(p\frac{dx}{dz} + q\frac{dy}{dz}\right)}{df_1} + \frac{dp}{dz}\cdot\frac{dx}{df_1} + \frac{dq}{dz}\cdot\frac{dy}{df_1} - \left(\frac{dp}{df_1}\cdot\frac{dx}{dz} + \frac{dq}{df_1}\cdot\frac{dy}{dz}\right),$$

oder wegen der Gleichung (k) einfacher:

$$\frac{dP_1}{dz} = \frac{dp}{dz}\cdot\frac{dx}{df_1} + \frac{dq}{dz}\cdot\frac{dy}{df_1} - \left(\frac{dp}{df_1}\cdot\frac{dx}{dz} + \frac{dq}{df_1}\cdot\frac{dy}{dz}\right),$$

und wenn man in dem zweiten Theile dieser Gleichung für:

$$\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}, \frac{dp}{dz}, \frac{dq}{dz}$$

ihre aus den Gleichungen (g), (g_1) und (g_2) gezogenen Werthe substituirt, und außerdem der Kürze wegen

$$p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq} = P$$

setzt, so erhält man:

$$\frac{dP_1}{dz} = -\frac{df}{dz}\cdot\frac{P_1}{P} - \left(\frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{df_1} + \frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{df_1} + \frac{df}{dp}\cdot\frac{dp}{df_1} + \frac{df}{dq}\cdot\frac{dq}{df_1}\right)$$
$$= -\frac{df}{dz}\cdot\frac{P_1}{P} - \frac{df}{df_1}.$$

ber nachdem man in die Function f für x, y, p, q ihre Werthe als Funcionen von z, f_1, f_2, f_3, welche der gegebenen Gleichung genügen, ſubſtituirt it, hat man identiſch $f = 0$; folglich reducirt ſich die vorhergehende Gleiung auf:

$$\frac{1}{P_1} \cdot \frac{dP_1}{dz} = -\frac{1}{P} \cdot \frac{df}{dz},$$

nd aus demſelben Grunde hat man:

$$\frac{1}{P_2} \cdot \frac{dP_2}{dz} = -\frac{1}{P} \cdot \frac{df}{dz}, \quad \frac{1}{P_3} \cdot \frac{dP_3}{dz} = -\frac{1}{P} \cdot \frac{df}{dz},$$

oraus folgt, wenn man integrirt, und durch F_1, F_2, F_3 Functionen von f_1, f_2, f_3 bezeichnet, welche die Veränderliche z nicht mehr enthalten:

$$P_1 = F_1 e^{-\int \frac{1}{P} \cdot \frac{df}{dz} dz}, \quad P_2 = F_2 e^{-\int \frac{1}{P} \cdot \frac{df}{dz} dz}, \quad P_3 = F_3 e^{-\int \frac{1}{P} \cdot \frac{df}{dz} dz}.$$

Die mit der Gleichung (i) gleichbedeutende Gleichung (l) reducirt ſich folglich ach der Hinweglaſſung des gemeinſchaftlichen Factors auf:

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + F_3 df_3 = 0. \qquad (n)$$

Wenn die Functionen f_1, f_2, f_3 durch die Gleichungen (h) beſtimmt ſind, o ſind die Functionen P_1, P_2, P_3 vermöge der Gleichungen (m) bekannt und urch die Hinweglaſſung des gemeinſchaftlichen Factors mit z, deſſen Exiſtenz ben bewieſen iſt, ergibt ſich ebenſo die Zuſammenſetzung der Functionen F_1, F_2, F_3 aus f_1, f_2, f_3. Alsdann läßt ſich die totale Differenzialgleichung n) immer durch das Syſtem zweier Gleichungen mit einer willkürlichen Funcion einer der Größen f_1, f_2, f_3 und mit der Ableitung dieſer willkürlichen Function integriren, und auf dieſe Weiſe erhält man das Syſtem aller particulären Integrale, oder das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung.

§. 534. Aber man kann dazu auch kürzer gelangen; denn die Gleichung $f_1 = a_1$ iſt offenbar eine particuläre Auflöſung der Gleichung (n). Die Auflöſung dieſer Gleichung, worin a_1 eine Conſtante und f_1 eine bekannte Function von x, y, z, p bezeichnet, gibt:

$$p = \varphi(x, y, z, a_1),$$

und alsdann hat man vermöge der Gleichung (f):

$$q = \psi(x, y, z, a_1).$$

Werden dieſe Werthe in die Gleichung (i) ſubſtituirt, ſo machen ſie den zweiten Theil derſelben zu einem genauen Differenziale, weil ſie eine Auflöſung der gegebenen Differenzialgleichung geben müſſen. Wenn man alſo die Differenzialgleichung:

$$dz = \varphi(x, y, z, a_1) \cdot dx + \psi(x, y, z, a_1) \cdot dy$$

ach der bekannten Methode (§. 393) integrirt, ſo erhält man eine Gleichung on der Form:

$$F(x, y, z, a_1, a_2) = 0, \qquad (o)$$

o a_2 eine durch die neue Integration eingeführte andere Conſtante iſt, und eſe Gleichung mit zwei willkürlichen Conſtanten leiſtet der gegebenen Gleiung, wovon ſie ein particuläres Integral iſt, Genüge.

Folglich iſt die Gleichung:

$$F(x, y, z, a_1, \omega a_1) = 0, \qquad (\omega)$$

wo ω eine willkürliche Function bezeichnet, auch ein Integral der gegebenen Differenzialgleichung, welche ebenfalls erfüllt wird, wenn man a_1 durch die Gleichung:

$$\frac{dF}{da_1} + \frac{dF}{d\omega} \cdot \omega' a_1 = 0 \qquad (\omega')$$

als Function von x, y, z bestimmt. Das System der Gleichungen (ω) und (ω') drückt also wegen der darin vorkommenden willkürlichen Function (ω) das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung aus, und jedes particuläre Integral wird daraus durch Elimination von a_1 zwischen diesen beiden Gleichungen, nachdem man die willkürliche Function ω particularisirt hat, abgeleitet.

Nach der Theorie der Umhüllung krummer Flächen (Buch 4. Kap. 8) ist klar, daß die Gleichung (o) die Gleichung der umschlossenen Flächen ist, welche die Eigenschaft haben, der gegebenen Differenzialgleichung Genüge zu leisten, während die Umhüllungsflächen, welche derselben wegen der Unbestimmtheit der zwischen den beiden veränderlichen Parametern der umschlossenen Fläche auf eine allgemeinere Weise Genüge leisten, durch das System der Gleichungen (ω), (ω') ausgedrückt werden.

Die Familien der durch partielle Differenzialgleichungen der ersten Ordnung mit drei Veränderlichen charakterisirten Flächen zerfallen also in zwei Gruppen. Die erste Gruppe enthält die Flächen, deren charakteristische Differenzialgleichung in Beziehung auf die Coefficienten p, q linear ist, so daß das allgemeine Integral durch eine einzige Gleichung mit einer willkürlichen Function gegeben wird und die Fläche durch die Bewegung einer Erzeugungslinie entsteht, welche während ihres Fortrückens zugleich ihre Form verändern kann. Die andere Gruppe enthält die Flächen, deren partielle Differenzialgleichung keine lineare ist, woraus einerseits folgt, daß das allgemeine Integral durch das System zweier Gleichungen gegeben wird, worin zugleich die willkürliche Function und ihre Ableitung vorkommt, und andererseits, daß die Flächen, welche sie ausdrückt, als ebenso viele Umhüllungsflächen betrachtet werden können. Je nachdem die gleichzeitigen Differenzialgleichungen, auf deren Integration die der gegebenen partiellen Differenzialgleichung zurückgeführt wird, algebraische Integrale haben oder nicht, sind auch die erzeugenden oder characteristischen Linien algebraische Curven oder nicht; allein durch diesen Nebenumstand wird an der in Rede stehenden Eintheilung nichts geändert.

§. 535. Wir wollen die vorhergehende Analyse auf die partielle Differenzialgleichung:

$$z^2(1 + p^2 + q^2) - R^2 = 0$$

anwenden, welche die Gleichung der Kanalflächen mit constantem kreisförmigen Durchschnitte ist (§. 261), so verwandelt sich die Gleichung (ε_1) für diesen Fall in:

$$z^2(p^2 + q^2)\frac{dp}{dz} = -pz(1 + p^2 + q^2),$$

und durch ihre Verbindung mit der gegebenen Gleichung ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{dp}{p} + \frac{R^2 dz}{z(R^2 - z^2)} = 0,$$

deren Integral:

$$p^2 = \frac{\alpha^2(R^2 - z^2)}{z^2}$$

t, wo α^2 eine willkürliche Conſtante bezeichnet. Die gegebene Gleichung ibt alsdann:

$$q^2 = \frac{(1-\alpha^2)(R^2 - z^2)}{z^2},$$

nd die Gleichung (i) verwandelt ſich in:

$$\frac{z\,dz}{\sqrt{R^2 - z^2}} = \alpha\,dx + \sqrt{1-\alpha^2}\cdot dy,$$

woraus folgt, wenn man integrirt und durch β eine neue willkürliche Conſtante bezeichnet:

$$-\sqrt{R^2 - z^2} = \alpha x + \sqrt{1-\alpha^2}\cdot y + \beta.$$

Wenn wir, wie es erlaubt iſt, die Conſtanten verändern und

$$-\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = a, \quad -\frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}} = b$$

ſetzen, ſo nimmt die vorhergehende Gleichung die Form an:

$$R^2 - z^2 = \frac{(y - ax - b)^2}{1 + a^2}$$

und gehört zu einem geraden Cylinder, welcher die für die Kanalflächen mit conſtantem kreisförmigen Durchſchnitte abwickelbare eingehüllte Fläche bildet.

§. 536. Es wird nicht nutzlos ſein, einige beſondere Fälle anzuführen, worin man das Integral ſchneller, als nach der allgemeinen Methode erhalten kann. Es ſei z. B.:

$$p = \Pi q$$

die gegebene Gleichung, welche einer durch die Form der gegebenen Function Π charakteriſirten Familie abwickelbarer Flächen angehört (§. 245 und §. 266), ſo hat man:

$$dz = \Pi q \cdot dx + q\,dy,$$

und wenn man theilweiſe integrirt:

$$z = x\Pi q + qy - \int (x\Pi' q + y)\,dq.$$

Damit die angezeigte Integration möglich wird, muß man:

$$x\Pi' q + y = \varphi' q$$

ſetzen, und alsdann hat man:

$$z = x\Pi q + qy - \varphi q.$$

Das Syſtem der Gleichungen:

$$z = x\Pi\alpha + \alpha y - \varphi\alpha, \quad x\Pi'\alpha + y = \varphi'\alpha$$

mit der unbeſtimmten Conſtante α, der willkürlichen Function φ und ihrer Ableitung φ' drückt alſo das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung aus.

Es ſei ferner die Gleichung gegeben:

$$f(p, x) = f(q, y),$$

ſo kann man ſetzen:

$$f(p, x) = \alpha = f(q, y),$$

woraus folgt:

$$p = f_1(x, \alpha), \quad q = f_1(y, \alpha)$$
$$dz = f_1(x, \alpha)dx + f_1(y, \alpha)dy.$$

Die theilweiſe Integration gibt:

$$z = X + Y - \int \left(\frac{dX}{d\alpha} + \frac{dY}{d\alpha}\right) d\alpha,$$

wenn man der Kürze wegen:

$$X = \int f_1(x, \alpha)dx, \quad Y = \int f_1(y, \alpha)dy$$

ſetzt. Das allgemeine Integral beſteht folglich in dem Syſteme der beiden Gleichungen:

$$z = X + Y - \varphi\alpha, \quad \frac{dX}{d\alpha} + \frac{dY}{d\alpha} = \varphi'\alpha,$$

wo φ eine willkürliche Function bezeichnet.

Wenn man endlich die Differenzialgleichung:

$$z^2 - pq = 0$$

hätte, ſo ginge ſchon aus der Form derſelben hervor, daß ſie das particuläre Integral:

$$z = \beta e^{\alpha x + \frac{y}{\alpha}}$$

hätte, wo α, β willkürliche Conſtanten bezeichnen, und folglich wird das allgemeine Integral durch das Syſtem der Gleichungen:

$$z = \varphi\alpha \cdot e^{\alpha x + \frac{y}{\alpha}}, \quad 0 = \varphi'\alpha + \left(x - \frac{y}{\alpha^2}\right)\varphi\alpha$$

gegeben.

§. 537. Wir haben bisher die Lagrange'ſche Methode zur Integration der partiellen Differenzialgleichungen der erſten Ordnung mit den Vervollkommnungen derſelben von Jacobi aus einander geſetzt. Wenn die Differenzialgleichung in Beziehung auf die partiellen Differenziale keine lineare, und die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen größer als zwei iſt, ſo läßt ſich die allgemeine Integration der partiellen Differenzialgleichungen noch, aber durch complicirtere Methoden, auf die Integration eines oder mehrerer Syſteme gewöhnlicher Differenzialgleichungen zurückführen. Ueber dieſen Gegenſtand kann man die Abhandlung von Pfaff in dem Bande der Abhandlungen der Berliner Akademie für das Jahr 1814, Crelle's Journal der Math. Bd. 2 und Bd. 13, und Liouville's Journal Bd. 3, wo man die neueren und ſchönern Unterſuchungen von Jacobi, welche außerhalb der Grenzen der Elemente liegen, findet, zu Rathe ziehen.

Drittes Kapitel.

die Integration der partiellen Differenzialgleichungen höherer gen mit drei Veränderlichen unter endlicher Form. — Be- zen über die singulären und particulären Integrale der par- tiellen Differenzialgleichungen.

---

der Integration der partiellen Differenzialgleichung der zweiten Ordnung mit drei Veränderlichen.

538. Betrachten wir zunächst die Differenzialgleichung der zweiten :

$$Rr + Ss + Tt = V,$$

n Beziehung auf die Ableitungen der zweiten Ordnung r, s, t linear wo R, S, T, V beliebige Functionen der Veränderlichen x, y, z und itungen p, q bezeichnen, so gibt die Elimination von r, t vermittelst chungen:

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy \tag{a}$$

chung:

$$Rdpdy + Tdqdx - Vdxdy = s(Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2).$$

r wollen einzeln:

$$Rdpdy + Tdqdx - Vdydx = 0, \tag{b}$$

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0 \tag{c}$$

mit diesen Gleichungen die Gleichung:

$$dz = pdx + qdy \tag{d}$$

n und annehmen, daß man diesen drei Gleichungen zwischen den fünf lichen x, y, z, p, q durch Gleichungen von der Form:

$$f_1(x, y, z, p, q) = a_1, \quad f_2(x, y, z, p, q) = a_2 \tag{e}$$

kann; so genügt die Gleichung:

$$f_2 = \varphi f_1 \tag{f}$$

benen Differenzialgleichung, wovon sie ein Integral der ersten Ord- , und wegen der Unbestimmtheit des Zeichens φ hat dieses Integral rderliche Allgemeinheit.

: Nachweisung dieses Satzes wollen wir die Gleichung (c) auf die

$$Ry'^2 - Sy' + T = 0 \tag{c_1}$$

und eine ihrer Wurzeln mit y'_1 bezeichnen; so verwandelt sich die g (b) in:

$$Ry'_1 dp + Tdq - Vy'_1 dx = 0. \tag{b_1}$$

eitungen der Gleichungen (e) sind:

$$\frac{df_1}{dx}dx+\frac{df_1}{dy}dy+\frac{df_1}{dz}dz+\frac{df_1}{dp}dp+\frac{df_1}{dq}dq=0,$$

$$\frac{df_2}{dx}dx+\frac{df_2}{dy}dy+\frac{df_2}{dz}dz+\frac{df_2}{dp}dp+\frac{df_2}{dq}dq=0,$$

oder, wenn man y'_1dx für dy ſetzt und dz, dq vermittelſt der Gleich (d) und (b_1) fortſchafft:

$$\left[\frac{df_1}{dx}+y'_1\frac{df_1}{dy}+(p+qy'_1)\frac{df_1}{dz}+\frac{Vy'_1}{T}\cdot\frac{df_1}{dq}\right]dx$$
$$+\left(\frac{df_1}{dp}-\frac{Ry'_1}{T}\cdot\frac{df_1}{dq}\right)dp=0,$$

$$\left[\frac{df_2}{dx}+y'_1\frac{df_2}{dy}+(p+qy'_1)\frac{df_2}{dz}+\frac{Vy'_1}{T}\cdot\frac{df_2}{dq}\right]dx$$
$$+\left(\frac{df_2}{dp}-\frac{Ry'_1}{T}\cdot\frac{df_2}{dq}\right)dp=0.$$

Dieſe letzten Gleichungen müſſen identiſch ſein, weil nach der Vorausſ die Gleichungen (e) das Syſtem der Gleichungen (b), (c), (d) verſi und es iſt folglich einzeln:

$$\left.\begin{aligned}\frac{df_1}{dx}+y'_1\frac{df_1}{dy}+(p+qy'_1)\frac{df_1}{dz}+\frac{Vy'_1}{T}\cdot\frac{df_1}{dq}&=0\\ \frac{df_1}{dp}-\frac{Ry'_1}{T}\cdot\frac{df_1}{dq}&=0\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{df_2}{dx}+y'_1\frac{df_2}{dy}+(p+qy'_1)\frac{df_2}{dz}+\frac{Vy'_1}{T}\cdot\frac{df_2}{dq}&=0\\ \frac{df_2}{dp}-\frac{Ry'_1}{T}\cdot\frac{df_2}{dq}&=0\end{aligned}\right\}.$$

Andererſeits gibt die Gleichung (f):

$$\frac{df_2}{dx}dx+\frac{df_2}{dy}dy+\frac{df_2}{dz}dz+\frac{df_2}{dp}dp+\frac{df_2}{dq}dq$$
$$=\left(\frac{df_1}{dx}dx+\frac{df_1}{dy}dy+\frac{df_1}{dz}dz+\frac{df_1}{dp}dp+\frac{df_1}{dq}dq\right)\cdot\varphi'f_1,$$

und dieſe verwandelt ſich, wenn man für:

$$dz,\ \frac{df_1}{dx},\ \frac{df_1}{dp},\ \frac{df_2}{dx},\ \frac{df_2}{dp}$$

ihre aus den Gleichungen (d) und (e') gezogenen Werthe ſetzt, in:

$$Ry'_1dp+Tdq-Vy'_1dx=(dy-y'_1dx)\,\Phi,$$

wenn man der Kürze wegen:

$$\Phi=-\left[\frac{df_2}{dy}+q\frac{df_2}{dz}-\left(\frac{df_1}{dy}+q\frac{df_1}{dz}\right)\cdot\varphi'f_1\right]:\frac{1}{T}\left(\frac{df_2}{dq}-\frac{df_1}{dq}\cdot\varphi'f\right.$$

ſetzt. Wenn wir für dp, dq ihre aus den Gleichungen (a) abgeleiteten $\mathfrak{T}$ in die Gleichung (g) wieder ſetzen; ſo erhalten wir:

$$(Ry'_1r+Ts-Vy'_1+\Phi y'_1)dx+(Ry'_1s+Tt-\Phi)dy=0,$$

ıb da die Veränderlichen x, y unabhängig ſind, ſo muß einzeln:

$$Ry'_1 r + Ts - Vy'_1 + \Phi y'_1 = 0, \quad Ry'_1 s + Tt - \Phi = 0$$

in. Aber hieraus folgt, daß die Gleichung (g) der gegebenen Gleichung enüge leiſtet, welche Form die nur in Φ vorkommende Function φ auch ben mag. Denn wenn man aus den vorhergehenden Gleichungen die Werthe r, t als Functionen von s ableitet, um ſie in die gegebene Gleichung zu ſtituiren, ſo verſchwindet Φ und es bleibt die Gleichung:

$$s(Ry'^2_1 - Sy'_1 + T) = 0,$$

elche identiſch iſt, weil y'_1 eine Wurzel der Gleichung (c_1) bezeichnet.

§. 539. Um dieſe Rechnung durch einige Beiſpiele zu erläutern, wollen ir zuvörderſt annehmen, daß ſich die Coefficienten R, S, T auf Conſtanten ducıren, und daß $V = 0$ iſt; ſo ſind auch die Wurzeln der Gleichung (c_1) nſtante Zahlen m_1, m_2, und wenn man die erſte dieſer Wurzeln anwendet, erhält man für die Integrale der Gleichungen (b) und (c):

$$y - m_1 x = a_1, \quad Rm_1 p + Tq = a_1,$$

oraus folgt, daß das erſte Integral der gegebenen Differenzialgleichung iſt:

$$Rm_1 p + Tq = \varphi_1 (y - m_1 x).$$

benſo gäbe die Anwendung der Wurzel m_2:

$$Rm_2 p + Tq = \varphi_2 (y - m_2 x).$$

legen der Relation $m_1 m_2 = \frac{T}{R}$ laſſen ſich dieſe beiden erſten Integrale auf e Form:

$$\left.\begin{aligned} p + m_2 q &= \frac{1}{Rm_1} \cdot \varphi_1 (y - m_1 x) \\ p + m_1 q &= \frac{1}{Rm_2} \cdot \varphi_2 (y - m_2 x) \end{aligned}\right\} \qquad (h)$$

ingen, woraus:

$$p = m_2 \psi (y - m_2 x) - m_1 \varphi (y - m_1 x)$$
$$q = \varphi (y - m_1 x) - \psi (y - m_2 x),$$

o der Kürze wegen:

$$\frac{\varphi_1 (y - m_1 x)}{Rm_1 (m_2 - m_1)} = \varphi (y - m_1 x), \quad \frac{\varphi_2 (y - m_2 x)}{Rm_2 (m_2 - m_1)} = \psi (y - m_2 x)$$

ſetzt iſt. Subſtituirt man dieſe Werthe von p, q in die Gleichung (d), ſo mmt:

$$dz = (dy - m_1 dx) \cdot \varphi (y - m_1 x) - (dy - m_2 dx) \cdot \psi (y - m_2 x),$$

oraus folgt, wenn man integrirt und durch Φ, Ψ Functionen bezeichnet, ren Ableitungen die willkürlichen Größen φ, $-\psi$ ſind:

$$z = \Phi (y - m_1 x) + \Psi (y - m_2 x). \qquad (i)$$

ie in dieſem Integrale der gegebenen Differenzialgleichung vorkommenden illkürlichen Functionen geben demſelben alle erforderliche Allgemeinheit.

Es ſei:

$$S = 0, \quad \frac{T}{R} = -a^2,$$

verwandelt ſich die gegebene Differenzialgleichung in:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = a^2 \frac{d^2z}{dy^2}, \tag{1}$$

und ihr vollſtändiges Integral iſt:

$$z = \Phi(y - ax) + \Psi(y + ax). \tag{2}$$

Die Gleichung (1), welche das Geſetz der Transverſalſchwingungen einer elaſtiſchen Saite und das der Fortpflanzung des Schalles in einer cylindriſchen Röhre ausdrückt, iſt die erſte partielle Differenzialgleichung, deren allgemeines Integral man gefunden hat. Die Unterſuchungen der Geometer über die Integration dieſer Gleichung, worauf wir in dem folgenden Kapitel zurückkommen werden, haben die mathematiſche Phyſik begründet und einen neuen Zweig der Analyſis hervorgerufen.

Wenn das Glied V nicht Null wäre und blos die unabhängige Veränderliche x enthielte, ſo müßte man zu den erſten Theilen der Gleichungen (h) das Glied $-\frac{1}{R}\int V dx$ addiren, und ſtatt der Gleichung (i) hätte man alsdann:

$$z = \frac{1}{R}\int dx \int V dx + \Phi(y - m_1 x) + \Psi(y - m_2 x).$$

§. 540. Dieſe Analyſe muß in dem Falle modificirt werden, wo das Glied V die beiden Veränderlichen x, y zugleich enthält, ſo wie in dem Falle, wo die Wurzeln m_1, m_2 einander gleich ſind, ſo daß die beiden willkürlichen Functionen Φ, Ψ in eine einzige zuſammenfallen, und der Werth von z nicht mehr die erforderliche Allgemeinheit hat. Betrachten wir zunächſt den erſten Fall, ſo iſt das eine der erſten Integrale:

$$p + m_2 q - \frac{1}{R}\int V dx = \frac{1}{Rm_1} \cdot \varphi_1(y - m_1 x) = \varphi(y - m_1 x).$$

Das Integral $\int V dx$ iſt in der Vorausſetzung genommen, daß:

$$dy - m_1 dx = 0, \quad \text{folglich} \quad y - m_1 x = \alpha_1$$

iſt, ſo daß man zuerſt dieſen Werth von y in V ſubſtituiren, hierauf in Beziehung auf x integriren und dann für α_1 ſeinen Werth $y - m_1 x$ ſetzen muß, wodurch man erhält:

$$\frac{1}{R}\int V dx = f(x, y - m_1 x),$$

wo f eine bekannte Function iſt, welche ſich durch eine einfache Quadratur aus V ergibt.

Subſtituirt man den Werth von p, ſo erhält man folglich die Gleichung:

$$dz = q(dy - m_2 dx) + f(x, y - m_1 x) \cdot dx + \varphi(y - m_1 x) \cdot dx,$$

welche ſich integriren läßt, wenn man die beiden gewöhnlichen Differenzialgleichungen:

$$dy - m_2 dx = 0$$

$$dz = [f(x, y - m_1 x) + \varphi(y - m_1 x)]\, dx,$$

zugleich integriren kann.

Die erſte gibt den Ausdruck:

$$y - m_2 x = \alpha_2, \tag{k}$$

in Folge deſſen ſich die zweite in:

$$dz = \{f[x, \alpha_2 + (m_2 - m_1)x] + \varphi[\alpha_2 + (m_2 - m_1)x]\}dx \qquad (l)$$

rwandelt, und das Integral derſelben iſt:

$$z - F(x, \alpha_2) - \Phi[\alpha_2 + (m_2 - m_1)x] = \beta_2, \qquad (m)$$

β_2 eine willkürliche Conſtante, Φ eine willkürliche Function und F eine kannte Function bezeichnet, welche ſich durch eine Quadratur aus f ableiten ßt. Das Integral der gegebenen Differenzialgleichung iſt $\beta_2 = \Psi\alpha_2$, wo m für α_2, β_2 ihre durch die Gleichungen (k), (m) gegeben Werthe ſubtuiren muß, und wodurch man erhält:

$$z = F(x, y - m_2x) + \Phi(y - m_1x) + \Psi(y - m_2x).$$

§. 541. Betrachten wir nun den Fall, wo die Wurzeln m_1, m_2 einder gleich ſind, und nehmen der Einfachheit wegen $V = 0$ an, ſo haben r, indem wir die jetzt überflüſſigen Indices hinweglaſſen:

$$y - mx = \alpha, \quad dy = mdx, \quad p + mq = \varphi(y - mx) = \varphi\alpha,$$

d die Gleichung (d) verwandelt ſich in:

$$dz = \varphi\alpha \cdot dx, \quad \text{und folglich} \quad z - x\varphi\alpha = \beta,$$

daß die Relation $\beta = \psi\alpha$ zum Integrale:

$$z = x\varphi(y - mx) + \psi(y - mx) \qquad (n)$$

ibt, und da die willkürlichen Functionen φ, ψ nicht mehr in eine einzige zuammenfallen, ſo hat dieſes Integral die erforderliche Allgemeinheit.

Dieſes iſt auf die Gleichung:

$$B^2r - 2ABs + A^2t = 0$$

nwendbar, welche die Regelflächen ausdrückt, deren Erzeugungslinie ſtets zu iner Ebene $Ax + By = 0$ parallel bleibt (§. 251) und das vollſtändige Integral iſt:

$$z = x\varphi(Ax + By) + \psi(Ax + By).$$

Die partielle Differenzialgleichung derſelben Flächen iſt, wenn die Richtbene die der xy iſt:

$$q^2r - 2pqs + p^2t = 0.$$

Die Gleichungen (c) und (b) werden alsdann:

$$pdx + qdy = dz = 0, \quad qdp - pdq = 0,$$

nd wenn man ſie integrirt, ſo erhält man $z = \alpha$, $p = \beta q$, ſo daß das erſte ntegral der gegebenen Differenzialgleichung $p = q\varphi z$ iſt. Um das zweite ntegral zu erhalten, ſubſtituirt man dieſen Werth von p in die Gleichung (d), odurch man die Gleichung:

$$dz = q(\varphi z \cdot dx + dy)$$

hält, deren Integration ſich auf die der gewöhnlichen Differenzialgleichungen:

$$dz = 0, \quad \varphi z \cdot dx + dy = 0$$

rückführen läßt; aber die Integrale dieſer Gleichungen ſind $z = \alpha_1$, $x\alpha_1 + y = \beta_1$, ſo daß das zweite Integral der gegebenen Differenzialeichung iſt:

$$x\varphi z + y = \psi z. \qquad (o)$$

§. 542. Endlich haben wir im §. 250 für die partielle Differenzialeichung der Regelflächen mit geraden Richtlinien gefunden:

$$x^2r + 2xys + y^2t = 0.$$

Die Gleichungen (c) und (b) werden in dieſem Falle:

$$xdy - ydx = 0, \quad xdp + ydq = 0$$

und ihre Integrale ſind $y = \alpha x$, $p + \alpha q = \beta$, woraus ſich:

$$p + q \cdot \frac{y}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

als das erſte Integral der gegebenen Differenzialgleichung ergibt. Subſtituirt man, wie gewöhnlich, den Werth von p in die Gleichung (d), ſo hat man:

$$dz = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \cdot dx + q\left(dy - \frac{y}{x}dx\right),$$

was auf die Integration der Differenzialgleichungen:

$$xdy - ydx = 0, \quad dz - \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \cdot dx = 0$$

führt. Dieſe Integration gibt $y = \alpha_1 x$, $z - x\varphi\alpha_1 = \beta_1$, und man erhält folglich für das zweite Integral der gegebenen Differenzialgleichung:

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (p)$$

Zu bemerken iſt die Aehnlichkeit der Form der Gleichungen (n), (o), (p), welche ſich alle auf den Fall der Gleichheit der Wurzeln der Gleichung (c_1) beziehen.

§. 543. Die im Vorhergehenden nach Monge aus einander geſetzte Integrationsmethode, wovon wir eben verſchiedene Anwendungen mitgetheilt haben, wird unbrauchbar, wenn das Syſtem der Gleichungen (b), (c), (d), worin im Allgemeinen die fünf veränderlichen Größen x, y, z, p, q vorkommen, und welches man durch Elimination auf eine Differenzialgleichung zwiſchen drei veränderlichen Größen zurückführt, den Bedingungen der Integrabilität nicht genügt. Es ſei z. B. die Differenzialgleichung:

$$r - t - \frac{2p}{x} = 0 \qquad (q)$$

gegeben, ſo verwandeln ſich die Gleichungen (c) und (b) für $m_1 = \pm 1$ in:

$$dy \mp dx = 0, \quad dp \mp dq - \frac{2pdx}{x} = 0;$$

aber die Gleichung mit dp, dq, dx erfüllt die Bedingung der Integrabilität nicht (§. 523), was für ein Zeichen man auch nehmen mag. Jedoch iſt das Integral der Gleichung (q) unter endlicher Form:

$$z = \varphi(y + x) + \psi(y - x) - x[\varphi'(y + x) - \psi'(y - x)],$$

wie man ſich leicht a posteriori überzeugen kann, und die Theorie der Conſtruction der partiellen Differenzialgleichungen zeigt, daß dieſes Integral wegen der beiden Zeichen der willkürlichen Functionen φ, ψ die erforderliche Allgemeinheit hat.

II. Von der Integration der linearen partiellen Differenzialgleichungen mit drei veränderlichen Größen und von einer beliebigen Ordnung.

§. 544. Von den partiellen Differenzialgleichungen einer höhern als der zweiten Ordnung wollen wir hier blos die linearen Gleichungen mit drei veränderlichen Größen:

$$A\frac{d^n z}{dx^n} + B\frac{d^n z}{dx^{n-1}dy} + C\frac{d^n z}{dx^{n-2}dy^2} + \ldots .$$

$$\ldots . + G\frac{d^n z}{dx dy^{n-1}} + H\frac{d^n z}{dy^n} = 0$$

betrachten, wo A, B, C, ... G, H conſtante Coefficienten bezeichnen. Wir wollen $z = \varphi(y + mx)$ ſetzen, ſo kommt:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = m^n \varphi^{(n)}(y + mx), \quad \frac{d^n z}{dx^{n-1}dy} = m^{n-1}\varphi^{(n)}(y + mx), \text{ ꝛc.}$$

und der gegebenen Gleichung geſchieht Genüge, wenn die Conſtante m eine der n Wurzeln $m_1, m_2, \ldots m_n$ der algebraiſchen Gleichung:

$$Am^n + Bm^{n-1} + Cm^{n-2} + \ldots\ldots + Gm + H = 0 \qquad (r)$$

iſt. Wegen der linearen Form der gegebenen Differenzialgleichung kann man ſetzen:

$$z = \varphi_1(y + m_1 x) + \varphi_2(y + m_2 x) + \ldots\ldots + \varphi_n(y + m_n x),$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ verſchiedene willkürliche Functionen bezeichnen, und man überzeugt ſich leicht, daß dieſer Werth von z alle Allgemeinheit hat, welche das Integral der gegebenen Differenzialgleichung geſtattet.

§. 545. Daſſelbe würde nicht mehr der Fall ſein, wenn die Gleichung (r) gleiche Wurzeln hätte, und z. B. $m_1 = m_2$ wäre; denn alsdann würden die beiden Functionen φ_1, φ_2 in eine einzige zuſammenfallen. Aber wenn man in dieſem Falle:

$$z = \varphi_1(y + m_1 x) + x\varphi_2(y + m_1 x)$$

ſetzt, ſo hat man:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = m_1{}^n[\varphi_1{}^{(n)} + x\varphi_2{}^{(n)}] + n m_1{}^{n-1}\varphi_2{}^{(n-1)},$$

$$\frac{d^n z}{dx^{n-1}dy} = m_1{}^{n-1}[\varphi_1{}^{(n)} + x\varphi_2{}^{(n)}] + (n-1)\, m_1{}^{n-2}\varphi_2{}^{(n-1)}, \text{ ꝛc.},$$

ſo daß man durch Subſtitution in die gegebene Gleichung erhält:

$$[Am_1{}^n + Bm_1{}^{n-1} + \ldots . + Gm_1 + H][\varphi_1{}^{(n)} + x\varphi_2{}^{(n)}]$$
$$+ [Anm_1{}^{n-1} + B(n-1)\, m_1{}^{n-2} + \ldots . + H]\,\varphi_2{}^{(n-1)} = 0,$$

woraus erhellet, daß dieſer Werth von z der gegebenen Gleichung Genüge leiſtet, weil m_1 nach der Vorausſetzung eine doppelte Wurzel der Gleichung (r) iſt. Man kann alſo in dieſem Falle

$$z = \varphi_1(y + m_1 x) + x\varphi_2(y + m_1 x)$$
$$+ \varphi_3(y - m_3 x) + \ldots . + \varphi_n(y - m_n x)$$

ſetzen, wo die Anzahl der verſchiedenen willkürlichen Functionen = n bleibt.

III. Bemerkungen über die ſingulären und particulären Integrale der partiellen Differenzialgleichungen.

§. 546. Betrachten wir eine partielle Differenzialgleichung der erſten Ordnung:

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \qquad (f)$$

welche von Wurzelgrößen und Brüchen befreit iſt, und es ſei:

$$z = f(x, y) \qquad (f)$$

eine Auflöſung dieſer Gleichung, worin keine willkürliche Function vorkommt, und welche ein particuläres oder ſinguläres Integral ſein kann. Wenn ſie ein particuläres Integral iſt, ſo kann man das allgemeine Integral durch:

$$z = f(x, y) + \varepsilon\varphi \qquad (\varphi)$$

ausdrücken, wo φ eine Function von x, y, ε bezeichnet, welche für $\varepsilon = 0$ weder verſchwindet, noch unendlich wird (§. 477). Subſtituirt man in die gegebene Differenzialgleichung, ſo erhält man zur Beſtimmung des von der Conſtanten ε unabhängigen Theiles von φ die Gleichung:

$$\varphi\frac{df}{dz} + \frac{df}{dp}\cdot\frac{d\varphi}{dx} + \frac{df}{dq}\cdot\frac{d\varphi}{dy} = 0, \qquad (\varphi_1)$$

worin ſich die partiellen Differenzialcoefficienten:

$$\frac{df}{dz}, \frac{df}{dp}, \frac{df}{dq}$$

auf den Werth $z = f(x, y)$ beziehen. Uebrigens kann man ſich leicht überzeugen, daß der von ε unabhängige Theil von φ dieſelbe Anzahl willkürlicher Functionen enthalten muß, als der vollſtändige Werth von φ, ſo daß die Betrachtung dieſes Theiles von φ hinreichend iſt, um die Natur der Auflöſung (f) kennen zu lernen.

Wenn nun der Werth $z = f(x, y)$ gibt:

$$\frac{df}{dp} = 0, \quad \frac{df}{dq} = 0, \qquad (p, q)$$

ohne daß daraus

$$\frac{df}{dz} = 0 \qquad (z)$$

folgt, ſo kann man der Gleichung (φ_1) nur Genüge leiſten, wenn man $\varphi = 0$ nimmt, ſo daß die Auflöſung (f), da ſie nicht auf die durch die Gleichung (φ) angedeutete Weiſe vervollſtändigt werden kann, ein ſinguläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung bildet.

Die Beſtimmung der ſingulären Integrale beſteht alſo in der Beſtimmung der Werthe von z als Functionen von x, y, welche den Gleichungen (f) und (p, q) zu gleicher Zeit genügen, wenn man p, q zwiſchen dieſen Gleichungen eliminirt, und außerdem muß man ſich überzeugen, daß dieſe Werthe von z die Gleichung (z) nicht verificiren.

Wendet man dieſes auf die Gleichung der Kanalflächen:

$$z^2(1 + p^2 + q^2) - R^2 = 0$$

an, ſo erhält man $z^2p = 0$, $z^2q = 0$ für die Gleichungen (p, q), woraus man nicht $z = 0$ ableiten kann; denn die gegebene Gleichung würde nicht erfüllt werden, wogegen die Gleichung (z) verificirt würde; aber die Auflöſungen $p = 0$, $q = 0$ führen auf das ſinguläre Integral $z^2 - R^2 = 0$.

§. 547. Wenn eine Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

gegeben wäre, ſo führte dieſelbe Rechnung auf die Bedingungsgleichungen (p, q), und außerdem auf:

$$\frac{df}{dr} = 0, \quad \frac{df}{ds} = 0, \quad \frac{df}{dt} = 0, \qquad (r, s, t)$$

ſo daß die Elimination von p, q, r, s, t zwiſchen den Gleichungen (p, q), (r, s, t) und der gegebenen Gleichung einen Werth von z als Function von x, y gäbe, welcher eine ſinguläre Auflöſung wäre, wenn derſelbe Werth von z nicht die Gleichung (z) verificirte. Wenn der Werth (f) blos die Gleichungen (r, s, t) verificirte, ſo hätte man zur Beſtimmung des von φ unabhängigen Theiles von φ die partielle Differenzialgleichung der erſten Ordnung (φ_1), deren Integral nur eine willkürliche Function enthalten könnte, ſo daß die Auflöſung (f) nur ein von der Integration einer ſingulären Auflöſung der erſten Ordnung herrührender particulärer Werth wäre, weil ſie nicht durch Hinzufügung zweier willkürlicher Conſtanten vervollſtändigt werden könnte, wie es die Ordnung der gegebenen Differenzialgleichung fordert.

Hieraus folgt, daß eine Differenzialgleichung der erſten Ordnung, welche zugleich der gegebenen Gleichung und den Gleichungen (r, s, t) genügt, ein ſinguläres Integral der erſten Ordnung iſt.

Es ſei z. B. die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$r^2 - (2rq - y)\left(p - \frac{z}{1+x}\right) = 0 \qquad (3)$$

gegeben, welche weder s, noch t enthält, ſo reducirt ſich das Syſtem der Gleichungen (r, s, t) auf:

$$r - q\left(p - \frac{z}{1+x}\right) = 0.$$

Dieſer Gleichung, ſowie der gegebenen, wird genügt, wenn man

$$p - \frac{z}{1+x} = 0$$

ſetzt, welches eine Differenzialgleichung der erſten Ordnung iſt, deren Integral:

$$z = (1+x)\,\varphi y$$

iſt, wo φ eine willkürliche Function bezeichnet, und folglich iſt dieſe letzte Gleichung ein ſinguläres Integral der gegebenen.

§. 548. In gewiſſen Fällen kann man auch die particulären Integrale der partiellen Differenzialgleichungen angeben, deren allgemeine Integrale nicht bekannt ſind, oder überhaupt nicht unter endlicher Form erhalten werden können, und die ſo erhaltenen particulären Integrale können, obgleich ſie nicht die zu einer analytiſchen Auflöſung erforderliche Allgemeinheit haben, doch die Aufgabe, welche auf die partielle Differenzialgleichung geführt hat, in einer hinreichenden Allgemeinheit löſen. Geſetzt, dieſe Gleichung wäre von der zweiten Ordnung und von der Form $f(p, q, r, s, t) = 0$, ſo daß ſie die Veränderlichen x, y, z nicht enthielte, und wir wollen außerdem annehmen, daß ſie in Beziehung auf r, s, t homogen iſt; ſo läßt ſie ſich, ungeachtet dieſer Einſchränkungen, im Allgemeinen doch nur für gewiſſe Formen der Function (f) integriren. Aber wenn man von allen Flächen, welche dieſer Gleichung genügen können, nur die abwickelbaren, für welche $p = \Pi q$ iſt, in Betracht zieht, ſo kann man ſetzen:

$$s = t\Pi' q, \quad r = s\Pi' q = t(\Pi' q)^2,$$

ſo daß nach der Subſtitution dieſer Werthe von s und r in die gegebene Gleichung, welche in Beziehung auf r, s, t homogen iſt, die Ableitung t daraus verſchwindet. Es bleibt alſo eine gewöhnliche Differenzialgleichung mit q, Πq, $\Pi' q$ oder mit q, p, $\frac{dp}{dq}$, durch welche man die Function Π mit einer willkür-

lichen Conſtanten beſtimmt. Wird alsdann die Gleichung $p = \Pi q$ integrirt, ſo erhält man eine urſprüngliche Gleichung mit einer willkürlichen Function, welche Gleichung eine Familie der abwickelbaren Flächen ausdrückt, welchen die durch die gegebene Differenzialgleichung ausgedrückte Eigenſchaft zukommt.

So enthält z. B. die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$(1 + q^2)\,r - 2pqs + (1 + p^2)\,t = 0$$

der krummen Flächen, für welche die beiden Hauptkrümmungen einander gleich und von entgegengeſetztem Sinne ſind (§. 281), und deren Flächeninhalt zwiſchen gegebenen Grenzen ein Minimum iſt (§. 391), nur die Ableitungen der erſten und zweiten Ordnung, und iſt in Beziehung auf r, s, t homogen. Wenn man alſo unter dieſen krummen Flächen diejenigen ſucht, welche ſich in eine Ebene ausbreiten laſſen, ſo kommt man auf die Gleichung:

$$(1 + q^2)\,dp^2 - 2pq\,dp\,dq + (1 + p^2)\,dq^2 = 0. \qquad (4)$$

Um ſie zu integriren, ſetze man $p = mq + n$, wo m, n Conſtanten bezeichnen, ſo erhält man $1 + m^2 + n^2 = 0$, welches gibt:

$$p = mq + (1 + m^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}. \qquad (5)$$

Ueberdies leiſten auch die Gleichungen $p = \alpha$, $q = b$ der Gleichung (4) Genüge und führen auf die allgemeine Gleichung der Ebene:

$$z = ax + by + c. \qquad (6)$$

Wenn man das Verfahren im §. 536 auf die Gleichung (5) anwendet, ſo erhält man ein Integral, welches durch das Syſtem der beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} z &= (y + mx)\,\alpha + x(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1} - \varphi\alpha \\ y + mx &= \varphi'\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

ausgedrückt wird; aber es iſt nicht möglich, ein reelles Reſultat daraus abzuleiten, wofern man nicht $1 + m^2 = 0$, $\varphi\alpha = c$, $\alpha = c$ ſetzt, und alsdann hat man blos die Auflöſung $z = c$, welche nicht ſo allgemein iſt, als die durch die Gleichung (6) gegebene, obgleich das Syſtem der Gleichungen (7) wegen der darin vorkommenden willkürlichen Function φ eine größere Allgemeinheit zu haben ſcheint. Da übrigens eine der Hauptkrümmungen der abwickelbaren Flächen Null iſt, iſt einleuchtend, daß auch die andere verſchwinden muß, um der einen durch die gegebene Gleichung ausgedrückten geometriſchen Eigenſchaften zu genügen, und daß folglich nur die Ebene unter den abwickelbaren Flächen eine reelle Auflöſung dieſer Gleichung liefern kann.

Viertes Kapitel.

Von der Integration der partiellen Differenzialgleichungen durch Reihen, und insbeſondere der linearen Differenzialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen und mit conſtanten Coefficienten.

§. 549. In dem vorhergehenden Kapitel haben wir geſehen, wie unvollkommen die Verfahrungsarten ſind, durch welche man die Integrale der

rtiellen Differenzialgleichungen von einer höheren als von der ersten Ordnung in den wenigen Fällen unter endlicher Form bestimmt, wo diese Bestimmung möglich ist. Ueberdies ist das Problem der Integration nur dann irklich gelöst, wenn man die in den Integralen vorkommenden willkürlichen nctionen nach den jeder Aufgabe eigenthümlichen Bedingungen ohne alle Beschränkung bestimmt hat, was oft unmöglich ist, selbst wenn sich das Zeichen r willkürlichen Function nur auf reelle Größen erstreckt, aber um so mehr möglich ist, wenn durch die Integrationsmethoden Größen mit imaginären ctoren unter dieses Zeichen getreten sind. Auch haben die Fortschritte der athematischen Physik es nothwendig gemacht, die Rechnung mit partiellen ifferenzialen aus einem andern Gesichtspunkte und zu einem andern Zwecke, s zur Charakterisirung und Classificirung der Familien der krummen Flächen behandeln, weswegen die Geometer die Integrationsprobleme, welche sich nen darboten, auf eine andere Weise haben zu lösen suchen müssen, und es ar natürlich, daß sie sich zu diesem Zwecke des gewöhnlichsten analytischen erfahrens, nämlich des Verfahrens der Reihenentwickelungen zuerst bedienten.

Es sei allgemein eine partielle Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung wischen der Function u und den unabhängigen Veränderlichen x, y, z, t, ꝛc. egeben, und wir wollen eine Hülfsveränderliche θ annehmen, welche auf gend eine Weise aus x, y, z, t, ꝛc. zusammengesetzt ist; so können wir die unction u als in eine Reihe von der Form:

$$u = \Theta\theta^{\alpha} + \Theta_1\theta^{\alpha_1} + \Theta_2\theta^{\alpha_2} + \text{ꝛc.} \qquad (\theta)$$

ntwickelt, annehmen, wo die Exponenten α_i eine zu- oder abnehmende Reihe onstanter Zahlen bilden, während die Coefficienten Θ_i unbekannte Functionen nabhängiger Veränderlicher sind, deren Anzahl wenigstens um eine Einheit leiner ist, als die der Veränderlichen, wovon u abhängt. Wenn man diesen Werth von u in die gegebene Differenzialgleichung substituirt, den ersten Theil ach den Potenzen von θ ordnet und die Coefficienten der einzelnen Glieder er Entwickelung gleich Null setzt; so erhält man eine unendliche Anzahl von gewöhnlichen oder partiellen Differenzialgleichuugen, wovon jede eine unabhängige Veränderliche weniger enthält, als die gegebene Differenzialgleichung, und wenn man dahin gelangt, daß man die allgemeinsten Werthe von Θ_i, α_i erhält, welche dieser Reihe von Gleichungen genügen; so leistet auch die Reihe der gegebenen Differenzialgleichung auf die allgemeinste Weise Genüge. Wenn man für θ successive jede der Veränderlichen x, y, z, t, ꝛc. oder verschiedene Functionen derselben nimmt, so kann man für u mehrere verschiedene Reihenentwickelungen angeben, welche aber jedesmal illusorisch sind, wenn sie nicht auf convergirende Reihen führen.

In diesen verschiedenen Reihenentwickelungen können die auf die allgemeinste Weise bestimmten Coefficienten Θ_i nichts desto weniger verschiedene Anzahlen willkürlicher Functionen enthalten, je nachdem mnn für θ diese oder ne der unabhängigen Veränderlichen oder diese oder jene Function derselben nommen hat. Die Anzahl der willkürlichen Functionen, welche in diesem oefficienten vorkommen, kann nicht größer, aber wohl kleiner als n sein. ir werden diesen Satz auf eine sehr einfache Weise darthun, wenn wir von r arithmetischen Construction der partiellen Differenzialgleichungen handeln, d er wird sich bei der in diesem Kapitel zu betrachtenden Beispielen als hr erweisen.

§. 550. Das eben über die Entwickelung in Reihen durch die Methode r unbestimmten Coefficienten Gesagte hat zum Zwecke, der Theorie alle nur wünschende Allgemeinheit zu geben; aber gewöhnlich braucht man zu den

Reihenentwickelungen nur den Taylor'ſchen oder Maclaurin'ſchen Lehrſatz anzuwenden, wo alsdann die Exponenten α_i nach der Reihe der natürlichen Zahlen fortlaufen. Es ſei z. B. die Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = a\frac{du}{dx}$$

gegeben, ſo gibt die Maclaurin'ſche Formel:

$$u = \varphi x + \frac{t}{1}\cdot\left(\frac{du}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_0 + \frac{t^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dt^3}\right)_0 + \text{ꝛc.}, \quad (1)$$

wo φx den Werth von u für $t = 0$ und $\left(\frac{d^iu}{dt^i}\right)_0$ den Werth der Ableitung $\frac{d^iu}{dt^i}$ für denſelben particulären Werth $t = 0$ bezeichnet. Vermöge der gegebenen Gleichung hat man:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_0 = a\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = a\varphi'x,$$

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_0 = a\left(\frac{d^2u}{dxdt}\right)_0 = a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = a^2\varphi''x, \text{ ꝛc.},$$

und vermittelſt dieſer Werthe verwandelt ſich die Reihe (1) in:

$$u = \varphi x + \frac{at}{1}\cdot\varphi'x + \frac{a^2t^2}{1.2}\cdot\varphi''x + \frac{a^3t^3}{1.2.3}\cdot\varphi'''x + \text{ꝛc.}$$

Aber der zweite Theil dieſer letzten Gleichung iſt nichts anders, als die Reihenentwickelung der Function $\varphi(x + at)$ nach den Potenzen von at, und man erhält folglich auf dieſe Weiſe das geſuchte Integral unter der endlichen Form:

$$u = \varphi(x + at), \quad (2)$$

wie man es nach der Methode im §. 528 erhalten haben würde. Die Function φ bleibt willkürlich, wie es der Fall ſein muß.

Wir hätten die Function u auch durch den Taylor'ſchen Lehrſatz nach den Potenzen von $t - t_0$ entwickeln können, indem wir die Conſtante t_0 unbeſtimmt ließen, um den Ausnahmefall zu umgehen, welchem die Maclaurin'ſche Formel unterworfen iſt, wenn die Entwickelung der Function nach den ganzen und poſitiven Potenzen der Veränderlichen nicht mehr möglich iſt, und φx würde alsdann den Werth der Function u bezeichnen, welcher dem particulären Werthe $t = t_0$ entſpricht. Der Einfachheit der Rechnung wegen werden wir aber immer den Maclaurin'ſchen Lehrſatz anwenden; denn es iſt, wenn man will, immer leicht, für die erhaltenen Reihenentwickelungen andere nach den Potenzen der um eine willkürliche Conſtante verminderten Veränderlichen fortſchreitende Reihenentwickelungen zu ſubſtituiren.

§. 551. Entwickelt man z. B. das Integral der Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2} \quad (3)$$

nach den Potenzen von t und behält dieſelben Bezeichnungen bei, wie vorhin, ſo hat man:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_0 = \varphi''x, \quad \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_0 = \varphi^{iv}x, \quad \left(\frac{d^3u}{dt^3}\right)_0 = \varphi^{v}x, \text{ ꝛc.},$$

folglich:

$$u = \varphi x + \frac{t}{1} \cdot \varphi' x + \frac{t^2}{1.2} \cdot \varphi'' x + \frac{t^3}{1.2.3} \cdot \varphi''' x + \text{ꝛc.} \qquad (4)$$

In dieſem Beiſpiele kann man nicht, wie in dem vorhergehenden aus der Reihenentwickelung des Integrales ſeinen Ausdruck unter endlicher Form erſchließen, wenigſtens nicht nach dem, was bisher darüber vorgekommen iſt; aber ſo oft die Reihe convergent iſt, beſtimmt ſie den Werth von u als Function der unabhängigen Veränderlichen x, t, und dieſer Werth iſt nur von der willkürlichen Function φ abhängig, welche in jedem beſondern Falle angegeben werden muß.

Durch ein ganz ähnliches Verfahren fände man für den nach den Potenzen von x entwickelten Werth von u die Reihe:

$$u = \psi t + \frac{x}{1} \cdot \omega t + \frac{x^2}{1.2} \cdot \psi' t + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot \omega' t + \frac{x^4}{1.2.3.4} \cdot \psi'' t + \text{ꝛc.} \quad (5)$$

Die Functionen ψt, ωt bleiben beide willkürlich und bezeichnen reſp. die Werthe von u, $\frac{du}{dx}$ für $x = 0$.

Um zu zeigen, daß die Integrale (4), (5) auf eins hinauslaufen, obgleich das erſte nur die willkürliche Function φx und ihre Ableitungen, dagegen das zweite die beiden willkürlichen Functionen ψt, ωt enthält, entwickelt Poiſſon die Functionen ψt, ωt nach den Potenzen von t und ſetzt zu dem Zwecke:

$$\psi t = A + B\frac{t}{1} + C\frac{t^2}{1.2} + D\frac{t^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}$$

$$\omega t = A' + B'\frac{t}{1} + C'\frac{t^2}{1.2} + D'\frac{t^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}$$

ſo daß ſich die Gleichung (5) alsdann verwandelt in:

$$u = A + A'\frac{x}{1} + B\frac{x^2}{1.2} + B'\frac{x^3}{1.2.3} + C\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}$$

$$+ \frac{t}{1}\left(B + B'\frac{x}{1} + C\frac{x^2}{1.2} + C'\frac{x^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \frac{t^2}{1.2}\left(C + C'\frac{x}{1} + \text{ꝛc.}\right) + \text{ꝛc.}$$

Bezeichnet man nun, wie es erlaubt iſt, durch φx die willkürliche Function:

$$A + A'\frac{x}{1} + B\frac{x^2}{1.2} + B'\frac{x^3}{1.2.3} + C\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.},$$

ſo fällt der zweite Theil der vorhergehenden Gleichung mit der Reihe (4) zuſammen.

§. 552. Wenn man das Integral der Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dxdt} = u \qquad (6)$$

vermittelſt des Maclaurin'ſchen Lehrſatzes nach den Potenzen von t entwickelt, ſo erhält man:

$$u = \varphi x + \frac{t}{1} \cdot \int \varphi x dx + \frac{t^2}{1.2} \cdot \iint \varphi x dx^2 + \frac{t^3}{1.2.3} \iiint \varphi x dx^3 +$$

und unter dieſer Form ſcheint das Integral nur von der willkürlichen Fu φx abzuhängen, welche den Werth von u für $t = 0$ ausdrückt. Aber zu bemerken, daß durch jede der in der vorhergehenden Reihenentwic unendlich vielen angedeuteten Integrationen eine willkürliche Conſtante führt wird, und daß das Syſtem dieſer, reſp. durch veränderliche Fa multiplicirten Conſtanten einer willkürlichen Function gleich zu achten iſt. man kann ſetzen:

$$\varphi x = A + \varphi_1 x$$

$$\int \varphi x dx = B + A\frac{x}{1} + \varphi_2 x$$

$$\iint \varphi x dx^2 = C + B\frac{x}{1} + A\frac{x^2}{1.2} + \varphi_3 x$$

$$\iiint \varphi x dx^3 = D + C\frac{x}{1} + B\frac{x^2}{1.2} + A\frac{x^3}{1.2.3} + \varphi_4 x$$

ꝛc.,

wo A, B, C, D, ... willkürliche Conſtanten und $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, $\varphi_3 x$, ꝛc. Funct bezeichnen, welche mit x verſchwinden. Durch die Subſtitution dieſer W in die vorhergehende Formel ergibt ſich:

$$u = A\left(1 + \frac{xt}{(1)^2} + \frac{x^2t^2}{(1.2)^2} + \frac{x^3t^3}{(1.2.3)^2} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \varphi_1 x + \frac{t}{1} \cdot \varphi_2 x + \frac{t^2}{1.2} \cdot \varphi_3 x + \frac{t^3}{1.2.3} + \varphi_4 x + \text{ꝛc.}$$

$$+ B\frac{t}{1} + C\frac{t^2}{1.2} + D\frac{t^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}$$

$$+ \frac{x}{1}\left(B\frac{t^2}{1.2} + C\frac{t^3}{1.2.3} + D\frac{t^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \frac{x^2}{1.2}\left(B\frac{t^3}{1.2.3} + C\frac{t^4}{1.2.3.4} + D\frac{t^5}{1.2.3.4.5} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

Setzt man nun:

$$B\frac{t}{1} + C\frac{t^2}{1.2} + D\frac{t^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.} = \psi_1 t$$

ſo erhält man:

$$B\frac{t^2}{1.2} + C\frac{t^3}{1.2.3} + D\frac{t^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.} = \int_0^t \psi_1 t dt = \psi_2 t$$

$$B\frac{t^3}{1.2.3} + C\frac{t^4}{1.2.3.4} + D\frac{t^5}{1.2.3.4.5} = \int_0^t \psi_2 t dt = \psi_3$$

ꝛc.,

ſo daß die Functionen $\psi_1 t$, $\psi_2 t$, $\psi_3 t$, ꝛc. alle mit t zugleich verſchwind man dem Integrale die ſymmetriſche Form:

$$u = A\left(1 + \frac{xt}{(1)^2} + \frac{x^2t^2}{(1.2)^2} + \frac{x^3t^3}{(1.2.3)^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \varphi_1 x + \frac{t}{1} \cdot \varphi_2 x + \frac{t^2}{1.2} \cdot \varphi_3 x + \frac{t^3}{1.2.3} \cdot \varphi_4 x + \text{ꝛc.}$$
$$+ \psi_1 t + \frac{x}{1} \cdot \psi_2 t + \frac{x^2}{1.2} \cdot \psi_3 t + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot \psi_4 t + \text{ꝛc.}$$

den kann.

Wenn die Conſtante A und die Functionen φ_1, ψ_1 willkürlich angenommen ſind, ſo werden alle übrigen Functionen φ_2, ψ_2, φ_3, ψ_3, ꝛc. durch Quadraturen erhalten. A iſt der Zahlenwerth von u für $x = 0$, $t = 0$ und $+ \varphi_1 x$, $A + \psi_1 t$ ſind die Werthe von u als Functionen von x und von welche reſp. $t = 0$ und $x = 0$ entſprechen.

§. 553. Die in den vorhergehenden §§ betrachteten partiellen Differenzialgleichungen waren lineare, und wir wollen nun die Gleichung (3) im §. 547, nämlich:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 - \left(2\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{dz}{dy} - y\right)\left(\frac{dz}{dx} - \frac{z}{1+x}\right) = 0$$

betrachten, für deren ſinguläres Integral wir:

$$z = (1+x)\varphi y \qquad (8)$$

gefunden haben. Ihr durch die Maclaurin'ſche Formel nach den Potenzen von x entwickeltes allgemeines Integral iſt:

$$= \psi y + \frac{x}{1} \cdot \omega y + \frac{x^2}{1.2}(\omega y - \psi y)\left[\psi' y \pm \sqrt{(\psi' y)^2 - \frac{y}{\omega y - \psi y}}\right]$$
$$+ \text{ꝛc.},$$

und wenn man es nach den Potenzen von y entwickelt, ſo erhält man:

$$z = \chi x + \frac{y}{1} \cdot \frac{\chi'' x}{2\left(\chi' x - \frac{\chi x}{1+x}\right)} + \text{ꝛc.}, \qquad (9)$$

daß daſſelbe im erſten Falle von zwei willkürlichen Functionen ψ, ω, und im zweiten Falle blos von einer willkürlichen Function χ abhängt.

Wenn man das Integral aus geometriſchem Geſichtspunkte als die Gleichung einer Ordnung oder Familie krummer Flächen betrachtet, ſo kann man ſagen, daß das ſinguläre Integral (8) dieſelbe Ausdehnung hat, als das durch die Reihe (9) gegebene allgemeine Integral; denn wenn man die Gleichung (8) particulariſiren will, ſo muß man die Curve $z = \varphi y$, nach welcher die Ebene der yz die krumme Fläche durchſchneidet, annehmen, und ebenſo braucht man, um die Gleichung (9) zu particulariſiren, nur die Curve $z = \chi x$, welche der Durchſchnitt der krummen Fläche mit der Ebene der xz iſt, anzunehmen. Die beiden Gleichungen charakteriſiren folglich zwei verſchiedene Familien krummer Flächen, wo in jeder die individuellen Flächen durch Bedingungen derſelben Art und von derſelben Anzahl beſtimmt werden.

§. 554. Die Entwickelung der Integrale in Reihen durch die Anwendung der Taylor'ſchen oder Maclaurin'ſchen Formel, oder durch die zuerſt gegebene allgemeinere Methode der unbeſtimmten Coefficienten führt gewöhnlich auf mühſame oder gar unausführbare Rechnungen, wenn die zu integri-

rende Differenzialgleichung keine lineare iſt, wie man aus dem Beiſpiele im vorhergehenden § ſieht, wenn man die Entwickelung über das dritte Glied hinaus fortſetzen will. Dagegen nimmt die Reihenentwickelung des Integrales eine ebenſo merkwürdige als einfache Form an, wenn die partielle Differenzialgleichung eine lineare, mit drei unabhängigen Veränderlichen und mit conſtanten Coefficienten iſt, und wenn in ihrem letzten Gliede, welches von der Function und ihren partiellen Ableitungen unabhängig iſt, die unabhängigen Veränderlichen nicht vorkommen.

Denn bezeichnet man die Function durch u und die unabhängigen Veränderlichen mit x, t und ſubſtituirt in die gegebene Differenzialgleichung den Werth:

$$u = Ce^{\alpha x + \beta t}, \qquad (C)$$

wo C eine willkürliche Conſtante und α, β unbeſtimmte Parameter bezeichnen; ſo verſchwinden die Exponentialgrößen und die ſie multiplicirende Conſtante C als gemeinſchaftliche Factoren, und es bleibt eine algebraiſche Gleichung:

$$f(\alpha, \beta) = 0, \qquad (f)$$

welcher die Unbeſtimmten α, β genügen müſſen, wenn die Gleichung (C) ein particuläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung ſein ſoll. Dieſen letztern wird wegen ihrer linearen Form folglich genügt, wenn man für u die Summe unendlich vieler particulärer Werthe, wie (C), oder die Reihe:

$$C_1 e^{\alpha_1 x + \beta_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 x + \beta_2 t} + C_3 e^{\alpha_3 x + \beta_3 t} + \text{ꝛc.},$$

welche wir der Kürze wegen gewöhnlich durch:

$$\Sigma \cdot Ce^{\alpha x + \beta t}$$

bezeichnen werden, und worin keine andern willkürlichen Größen, als die Coefficienten C, α vorkommen, ſubſtituirt, wo die Zahlen β vermittelſt der Gleichung (f) durch die Zahlen α beſtimmt werden.

§. 555. Wenden wir dieſes auf die lineare Differenzialgleichung der erſten Ordnung:

$$\frac{du}{dt} = a\frac{du}{dx} + bu$$

an; ſo bekommt die Gleichung (f) die Form $\beta = a\alpha + b$, ſo daß der gegebenen Differenzialgleichung Genüge geſchieht, wenn man:

$$u = e^{bt} \Sigma \cdot Ce^{\alpha(x + at)}$$

nimmt. Für $t = 0$ gibt dieſe Reihe:

$$u = \Sigma \cdot Ce^{\alpha x}.$$

Es ſei folglich φx eine Function von ſolcher Beſchaffenheit, daß man, wenn man ſie in eine Reihe von Exponentialgrößen (§. 114) entwickelte,

$$\varphi x = \Sigma \cdot Ce^{\alpha x}$$

erhielte. Der allgemeine Werth von u iſt unter endlicher Form:

$$u = e^{bt} \varphi(x + at),$$

wie ſich durch eine Vertauſchung der Buchſtaben der Formel (3) im §. 529 ergibt. Die Function φ bleibt wegen der Unbeſtimmtheit der Coefficienten C, α willkürlich, und ſie wird beſtimmt, wenn man den $t = 0$ entſprechenden Werth von u als Function von x angibt.

Wenn man $b = 0$ ſetzt, ſo kommt man wieder auf die Gleichung (2). llgemein, wenn man eine partielle Differenzialgleichung von der Form:

$$\frac{du}{dt} = [u] + bu$$

ıt, wo [u] der Kürze wegen eine lineare Function der partiellen Ableitungen ın u in Beziehung auf die von t verſchiedenen Veränderlichen x, y, z, ... zeichnet; ſo kann man $u = ve^{bt}$ ſetzen, und man erhält die transformirte leichung mit v:

$$\frac{dv}{dt} = [v].$$

§. 556. Es ſei die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2} \qquad (10)$$

:geben, ſo verwandelt ſich die Gleichung (f) in $\beta^2 = a^2\alpha^2$, woraus ſich ır β die beiden Werthe $\beta' = a\alpha$, $\beta'' = -a\alpha$ ergeben. Jedem Werthe von entſprechen zwei verſchiedene Reihen, welche der gegebenen Differenzial- leichung Genüge leiſten, und particuläre Integrale derſelben ſind, und die ımme dieſer beiden Reihen bildet das allgemeine Integral:

$$u = \Sigma \cdot C'e^{\alpha'(x+at)} + \Sigma \cdot C''e^{\alpha''(x-at)},$$

elches mit dem Integrale unter endlicher Form:

$$u = \varphi(x + at) + \psi(x - at), \qquad (11)$$

as ſich von der Formel (2) im §. 539 nur durch die Wahl der Buchſtaben ıterſcheidet, gleichbedeutend iſt.

Hiernach muß ſich das allgemeine Integral der gegebenen Differenzial- leichung unter endlicher Form erhalten laſſen, und n verſchiedene willkürliche unctionen erhalten, wenn ſich $f(\alpha, \beta)$ in n lineare Factoren $\beta - (a\alpha + b)$ rlegen läßt, und insbeſondere, wenn die Function f in Beziehung auf die ıbeſtimmten Größen α, β homogen iſt, oder wenn die lineare Gleichung mit ırtiellen Differenzialen nur partielle Differenziale von derſelben Ordnung ıthält.

Die in dem Integrale (11) vorkommenden beiden willkürlichen Functionen φ, ψ laſſen ſich leicht beſtimmen, wenn man zwei Functionen fx, fx angibt, ovon die erſte für $t = 0$ den Werth von u, und die zweite den von $\frac{du}{dt}$ ısdrückt. Denn vermöge dieſer Data hat man:

$$\varphi x + \psi x = fx, \quad \varphi' x - \psi' x = \frac{1}{a} \cdot fx.$$

urch die Integration der zweiten dieſer Gleichungen erhält man:

$$\varphi x - \psi x = \frac{1}{a} \int fx\,dx = Fx + c,$$

o Fx eine bekannte Function von x und c eine willkürliche Conſtante be- ichnet. Hieraus ergibt ſich:

$$\varphi x = \tfrac{1}{2}(fx + Fx + c), \quad \psi x = \tfrac{1}{2}(fx - Fx - c),$$

o folglich hat man die Gleichung:

$$u = \tfrac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at) + F(x+at) - F(x-at)], \qquad (12)$$

woraus die willkürliche Conſtante c verſchwunden iſt.

§. 557. Nehmen wir die bereits früher betrachtete Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2} \qquad (3)$$

wieder, für welche ſich die Gleichung (f) auf $\beta = \alpha^2$ reducirt; ſo haben wir, je nachdem wir dieſe Gleichung zur Fortſchaffung der Coefficienten β, oder der Coefficienten α anwenden, die beiden Reihenentwickelungen:

$$u = \Sigma \cdot Ce^{\alpha x + \alpha^2 t}, \qquad (13)$$

$$u = \Sigma \cdot C'e^{x\sqrt{\beta'} + \beta' t} + \Sigma \cdot C''e^{-x\sqrt{\beta''} + \beta'' t}. \qquad (14)$$

Wenn man die Reihe (13) nach den Potenzen von t entwickelt, ſo erhält man die Reihe:

$$u = \Sigma \cdot Ce^{\alpha x} + \frac{t}{1} \cdot \Sigma \cdot C\alpha^2 e^{\alpha x} + \frac{t^2}{1.2} \cdot \Sigma \cdot C\alpha^4 e^{\alpha x} + \text{ꝛc.},$$

welche mit der Reihe (4) zuſammenfällt, wenn man $\Sigma \cdot Ce^{\alpha x} = \varphi x$ ſetzt, wo die willkürliche Function φx wieder den Werth von u für $t = 0$ bezeichnet.

Ebenſo fände man, wenn man den zweiten Theil der Gleichung (14) nach den Potenzen von x entwickelte:

$$\begin{aligned} u = {} & \Sigma \cdot C'e^{\beta' t} + \Sigma \cdot C''e^{\beta'' t} \\ & + \frac{x}{1} \cdot (\Sigma \cdot C'\sqrt{\beta'}e^{\beta' t} - \Sigma \cdot C''\sqrt{\beta''}e^{\beta'' t}) \\ & + \frac{x^2}{1.2} \cdot (\Sigma \cdot C'\beta' e^{\beta' t} + \Sigma \cdot C''\beta'' e^{\beta'' t}) \\ & + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot (\Sigma \cdot C'\beta'\sqrt{\beta'}e^{\beta' t} - \Sigma \cdot C''\beta''\sqrt{\beta''}e^{\beta'' t}) + \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Setzt man nun:

$$\psi t = \Sigma \cdot C'e^{\beta' t} + \Sigma \cdot C''e^{\beta'' t},$$

$$\omega t = \Sigma \cdot C'\sqrt{\beta'}e^{\beta' t} - \Sigma \cdot C''\sqrt{\beta''}e^{\beta'' t},$$

ſo kommt man wieder auf die Reihe (5). Um zu zeigen, daß die beiden Functionen ψ, ω willkürlich und von einander unabhängig ſind, wollen wir:

$$\Sigma \cdot C'e^{\beta' t} = \Psi t, \quad \Sigma \cdot C''e^{\beta'' t} = \Pi t$$

$$\Sigma \cdot C'\sqrt{\beta'}e^{\beta' t} = \Psi_1 t, \quad \Sigma \cdot C''\sqrt{\beta''}e^{\beta'' t} = \Pi_1 t$$

ſetzen, woraus folgt:

$$\psi t = \Psi t + \Pi t, \qquad (15)$$

$$\omega t = \Psi_1 t - \Pi_1 t. \qquad (16)$$

Statt dieſer letzten Gleichung kann man ſetzen:

$$\omega' t = \Psi t - \Pi t, \qquad (17)$$

wo ω eine Function iſt, welche durch die umgekehrte der Operation aus ω abgeleitet wird, vermittelſt welcher die Functionen Ψ_1, Π_1 reſp. aus den

unctionen Ψ, Π abgeleitet werden. *) Aus den Gleichungen (15) und (17) olgt:

$$\Psi t = \tfrac{1}{2}\psi t + \tfrac{1}{2}\omega' t, \quad \Pi t = \tfrac{1}{2}\psi t - \tfrac{1}{2}\omega' t,$$

o daß die Functionen Ψ, Π, und folglich die Reihen $\Sigma \cdot C' e^{\beta' t}$, $\Sigma \cdot C'' e^{\beta'' t}$ mmer bestimmt sind, von welcher Beschaffenheit die willkürlichen Functionen ψ, ω auch sein mögen.

Wenn man die Reihe (13) nach den Potenzen von x entwickelt hätte; so hätte man

$$u = \Sigma \cdot C e^{\alpha^2 t} + \frac{x}{1} \cdot \Sigma \cdot C\alpha e^{\alpha^2 t} + \frac{x^2}{1.2} \cdot \Sigma \cdot C\alpha^2 e^{\alpha^2 t} + \text{ꝛc.}$$

erhalten, und diese Entwickelung stimmt wieder mit der Reihe (5) überein, wenn man:

$$\psi t = \Sigma \cdot C^{\alpha^2 t}, \quad \omega t = \Sigma \cdot C\alpha e^{\alpha^2 t}$$

setzt; aber alsdann sind die beiden Functionen ψ, ω nicht mehr von einander unabhängig, sondern es findet zwischen ihnen eine Relation statt, welche nach der obigen Bezeichnung durch $\omega t = \psi_1 t$ oder durch $\omega' t = \psi t$ ausgedrückt wird, was auch darauf hinausläuft, in den Gleichungen (15) und (17) die Function $\Pi = 0$ zu setzen. Die Reihe (13) muß folglich als das allgemeine Integral der Gleichung (3), oder als ein particuläres Integral betrachtet werden, je nachdem diese Reihe von den Potenzen t, oder nach den Potenzen von x entwickelt ist, oder was auf dasselbe hinausläuft, je nachdem die darin vorkommenden willkürlichen Parameter vermittelst des Werthes von u als Function von x für $t = 0$, oder vermittelst der Werthe von u und von $\frac{du}{dx}$ als Functionen von t für $x = 0$ bestimmt werden.

Es ist uns unbekannt, ob man diese merkwürdige Eigenschaft gewisser Reihenentwickelungen, daß sie zugleich ein allgemeines und ein particuläres Integral ausdrücken, schon früher bemerkt hat. Diese Bemerkung widerspricht sogar der Behauptung Poissons, daß man die Reihe (13) so entwickeln könne, daß sie mit der Reihe (5) identisch werde. **)

---

*) Aus der Gleichung $\Sigma \cdot C' e^{\beta' t} = \psi t$ folgt:

$$\Sigma \cdot C'(\beta')^n e^{\beta' t} = \frac{d^n \cdot \psi t}{dt^n}, \quad \Sigma \cdot C'(\beta')^{-n} e^{\beta' t} = \int^{(n)} \psi t \cdot dt^{(n)},$$

wo n eine beliebige ganze positive Zahl bezeichnet. Nach der Analogie kann man schreiben:

$$\Sigma \cdot C'(\beta')^{\frac{1}{2}} e^{\beta' t} = \frac{d^{\frac{1}{2}} \cdot \psi t}{dt^{\frac{1}{2}}}$$

und alsdann hat man vermöge dieser Bezeichnung statt der Gleichungen (16) und (17) die folgenden:

$$\omega t = \frac{d^{\frac{1}{2}}(\psi t - \Pi t)}{dt^{\frac{1}{2}}}, \quad \int^{(\frac{1}{2})} \omega t \cdot dt^{\frac{1}{2}} = \psi t - \Pi t.$$

Die als eine Folge aus der Entwickelung der Functionen in Exponenzialreihen sich ergebende Differenzial- und Integral-Rechnung mit gebrochenen Indices ist der Gegenstand einer wichtigen Abhandlung von Liouville in dem 21. Hefte des Journals der polytechnischen Schule zu Paris.

**) Théorie de la chaleur, p. 139.

§. 558. Wir wollen auch die Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dxdt} = u \tag{6}$$

wieder betrachten, welche für die Gleichung (f), $\alpha\beta = 1$, folglich:

$$u = \Sigma \cdot Ce^{\alpha x + \frac{\alpha}{t}} \tag{18}$$

gibt, und wenn wir nach den Potenzen von t entwickeln:

$$u = \Sigma \cdot Ce^{\alpha x} + \frac{t}{1} \cdot \Sigma \cdot C\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + \frac{t^2}{1.2} \cdot \Sigma \cdot C\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} + \text{ꝛc.}$$

Da man $\varphi x = \Sigma \cdot Ce^{\alpha x}$ setzen kann, so ist klar, daß diese Entwickelung mit der Reihe (7) übereinstimmt. Nur sind alle Glieder der Reihe:

$$\Sigma \cdot C\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} = \int \varphi x dx, \quad \Sigma \cdot \frac{Ce^{\alpha x}}{\alpha^2} = \iint \varphi x dx^2, \text{ ꝛc.,}$$

wenn die Function φ angegeben ist und die Coefficienten C, α zu diesem Zwecke selbst bestimmt sind, ebenfalls vollständig bestimmt, so daß die in den Integralen $\int \varphi x dx$, $\iint \varphi x dx^2$, ꝛc. vorkommenden willkürlichen Constanten selbst vollständig bestimmt sind. Die Reihe (18) gibt also nur ein particuläres Integral der Gleichung (6) und kein allgemeines oder vollständiges Integral derselben, wie S. 149 des eben angeführten Werkes gesagt wird.

Die Gleichung (6) würde ebenfalls verificirt, wenn man

$$u = A \sin.(\alpha x + \beta t) + B \cos.(\alpha x + \beta t)$$

setzte, wofern zwischen den Parametern α, β die Bedingungsgleichung $\alpha\beta + 1 = 0$ stattfindet, und folglich wird der Gleichung (6) genügt, wenn man

$$u = \Sigma\left[A \sin.\left(\alpha x - \frac{t}{\alpha}\right) + B \cos.\left(\alpha x - \frac{t}{\alpha}\right)\right]$$

setzt; aber dieses ist wieder nur ein particuläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung, und selbst dann, wenn man

$$u = \Sigma \cdot A \sin.\left(\alpha' x - \frac{t}{\alpha'}\right) + \Sigma \cdot B \cos.\left(\alpha'' x - \frac{t}{\alpha''}\right)$$

setzte, würde das Integral, wie man sich leicht überzeugt, keine größere Allgemeinheit haben.

§. 559. Allgemein, da die willkürlichen Constanten C, α, β sowohl reell als imaginär angenommen werden können, so ist klar, daß für jede Reihe von Exponentialgrößen eine Reihe von Sinussen und Cosinussen substituirt werden kann, und umgekehrt. Die Natur der Aufgabe bestimmt die Natur der Functionen, welche in der Endauflösung bleiben müssen, nachdem man alle willkürlichen Constanten bestimmt und die Zeichen des Imaginären fortgeschafft hat.

Wenn die Gleichung (f) so beschaffen wäre, daß die Parameter α, β nicht zu gleicher Zeit reell sein können, so wäre dieses ein Beweis, daß man statt gewisser Exponentialgrößen Kreisfunctionen in die Reihe einführen müßte. Dieser Fall bietet sich z. B. bei der Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \tag{19}$$

dar, auf welche sich die Gleichung (10) reducirt, wenn man der willkürlichen

ıſtante α den Werth $\sqrt{-1}$ beilegt, und man genügt dieſer Gleichung, ın man:

$$u = \Sigma \cdot (A' \sin. \alpha' x + B' \cos. \alpha' x) e^{\alpha' t}$$
$$+ \Sigma \cdot (A'' \sin. \alpha'' x + B'' \cos. \alpha'' x) e^{-\alpha'' t}$$

t. Bezeichnet man durch fx und $fx = \frac{dFx}{dx}$ die Werthe von u und $\frac{du}{dx}$ für = 0; ſo hat man:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma \cdot (A' \sin. \alpha' x + B' \cos. \alpha' x) &= \tfrac{1}{2}(fx + Fx + c) \\ \Sigma \cdot (A'' \sin. \alpha'' x + B'' \cos. \alpha'' x) &= \tfrac{1}{2}(fx - Fx - c) \end{aligned}\right\}, \qquad (20)$$

c eine willkürliche Conſtante bezeichnet; und die Functionen f, F mögen thematiſche oder empiriſche Functionen ſein, wofern ſie nur nicht unendlich rden, ſo kann man nach den Formeln in Buch 5, Kap. 12 alle die Coef- enten A', B', α'; A'', B'', α'' doch immer ſo beſtimmen, daß den vorher- enden Gleichungen Genüge geſchieht, wenigſtens für Werthe von x, welche iſchen gegebenen Grenzen liegen.

Das Integral der Differenzialgleichung (19) wäre alſo nach der Formel 2) unter endlicher Form:

$$u = \frac{1}{2}\left[f(x + t\sqrt{-1}) + f(x - t\sqrt{-1})\right.$$
$$\left. + \frac{F(x + t\sqrt{-1}) - F(x - t\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}\right],$$

das Zeichen F dieſelbe Bedeutung hat, wie in den Gleichungen (20), und ſes Integral wird, wenigſtens für die numeriſche Berechnung der Werthe n u illuſoriſch, wenn die Functionen f, F nicht durch algebraiſche Formeln sgedrückt werden, in welche man Werthe von der Form $x \pm t\sqrt{-1}$ ſo ſtituiren kann, daß die Zeichen des Imaginären verſchwinden.

§. 560. Die linearen partiellen Differenzialgleichungen mit conſtanten efficienten ſind beſonders auf die Probleme der Mechanik und der mathe- tiſchen Phyſik anwendbar, bei deren Auflöſung es geſtattet iſt, die Producte d höheren Potenzen gewiſſer veränderlicher Größen ihrer Kleinheit wegen zu nachläſſigen. Zur Beſtimmung der in den Integralen vorkommenden will- lichen Functionen muß man die anfänglichen Werthe gewiſſer Functionen in begrenzten Ausdehnung eines materiellen Syſtemes mit einer, zwei oder i Dimenſionen beſtimmen, wobei es nicht nöthig iſt, daß ſich dieſe Func- nen durch eine mathematiſche Formel ausdrücken laſſen, ſondern es iſt blos orderlich, daß ſie in der Ausdehnung des materiellen Syſtemes, für welches gegeben ſind, endliche und beſtimmte Werthe behalten, weil ſie phyſiſche ößen ausdrücken, welche nothwendig endlich und beſtimmt ſind. Die Formeln Kap. 12 des 5. Buches, ſowie alle diejenigen, welche innerhalb einer be- nzten Ausdehnung eine beliebige mathematiſche oder empiriſche Function aus- cken können, laſſen ſich alſo nothwendig auf die Entwickelung der Integrale partiellen Differenzialgleichungen, worin die willkürlichen Functionen nach ſiſchen Daten beſtimmt werden müſſen, anwenden. Dagegen ſind die henentwickelungen mit Exponentialgrößen nur anwendbar, wenn ſich die nglichen willkürlichen Functionen analytiſch ausdrücken laſſen, und alsdann cken ſie die entwickelten Functionen für alle möglichen Werthe der Ver-

änderlichen aus, mit Ausnahme des Falles, wenn die Reihenentwickel divergent werden.

§. 561. Die einfachſte Differenzialgleichung, auf welche man das über die Beſtimmung der willkürlichen Functionen nach phyſiſchen Daten ſagte anwenden kann, iſt die Gleichung für die Bewegung der ſchwing Saiten (§. 539):

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}, \qquad (1$$

worin t die Zeit, x die Abſciſſe eines Punktes der in Bewegung befind Saite, u die Ordinate dieſes Punktes, welche im Ruhezuſtande $= 0$ iſt a einen Coefficienten bezeichnet, welcher von der Spannung, dem Ge und den Dimenſionen der Saite abhängt. Wenn $x = 0$ und $x = l$ die ciſſen der Endpunkte der ſchwingenden Saite und dieſe beiden Endpunkt ſind; ſo ſind die Werthe von u und von $\frac{du}{dt}$ für $x = 0$, $x = l$ und für Werth von t Null. Im Anfange der Bewegung und für Werthe vo welche zwiſchen Null und l liegen, hat man $u = fx$, $\frac{du}{dt} = fx$, wo die tionen fx, fx der Bedingung genügen müſſen, daß ſie endliche und beſti Werthe haben.

Der Gleichung (21) wird genügt, wenn man

$$u = \Sigma(A \sin. a\alpha t + B \cos. a\alpha t) \sin. \alpha x \qquad (2$$

nimmt, und wenn man

$$\alpha = \frac{i\pi}{l} \qquad (3$$

ſetzt, wo i eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, und alsdann wird die dingung erfüllt, daß die Functionen u, $\frac{du}{dt}$ für $x = 0$, $x = l$ und für Werth von t verſchwinden. Die Gleichung (22) verwandelt ſich alsdan

$$u = \Sigma\left(A \sin. \frac{i\pi at}{l} + B \cos. \frac{i\pi at}{l}\right) \sin. \frac{i\pi x}{l},$$

und es kommt nur noch darauf an, die Coefficienten A, B als Functione Index i zu beſtimmen, und um dieſe Abhängigkeit anzudeuten, wollen wir A_i, B_i, ſtatt A, B ſetzen. Nach den ausgedrückten Bedingungen erhält aber:

$$\Sigma \cdot B_i \sin. \frac{i\pi x}{l} = fx, \quad \Sigma \cdot \frac{i\pi a}{l} A_i \sin. \frac{i\pi x}{l} = fx,$$

und dieſen letzten Gleichungen wird zwiſchen den Grenzen $x = 0$, $x =$ eine beliebige Beſchaffenheit, der Functionen fx und fx genügt, wenn

$$B_i = \frac{2}{l}\int_0^l \sin. \frac{i\pi\xi}{l} \cdot f\xi d\xi, \quad A_i = \frac{2}{i\pi a}\int_0^l \sin. \frac{i\pi\xi}{l} \cdot f\xi d\xi$$

ſetzt (§. 430.).

§. 562 Die Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2},$$

lche mit der Gleichung (3) übereinſtimmt, wenn man der Einfachheit wegen = 1 ſetzt, findet zwiſchen der Temperatur u des Normaldurchſchnittes einer mogenen cylindriſchen Stange, der Zeit t und der von dem einen Ende ſer Stange aus gezählten Abſciſſe x dieſes Querſchnittes ſtatt. Durch a eichnen wir einen Coefficienten, welcher von dem Wärmeleitungsvermögen Stange und von ihrer Wärmecapacität abhängt, durch l die Länge der ange und für den Nullpunkt der Termometerſcale nehmen wir die als con- nt vorausgeſetzte Temperatur des die Stange umgebenden Mittels. Für = 0 und x = 1 muß alſo u = 0 ſein, welchen Werth t auch haben mag. rner muß ſich u für t = 0 auf eine zwiſchen den Grenzen x = 0, x = l illkürlich angenommene Function reduciren, welche den anfänglichen Tem- raturzuſtand der Stange ausdrückt.

Der Differenzialgleichung (24) wird durch die Reihe:

$$u = \Sigma \cdot A \sin. \alpha x e^{-a^2\alpha^2 t} \qquad (25)$$

nügt, und wenn man, wie im vorhergehenden Beiſpiele:

$$\alpha = \frac{i\pi}{l} \qquad (23)$$

immt, ſo werden die ſich auf die beiden Enden der Stange beziehenden Be- ingungen in Rechnung gebracht. Man braucht alsdann nur:

$$A_i = \frac{2}{l}\int_0^l \sin. \frac{i\pi\xi}{l} \cdot f\xi d\xi$$

ı ſetzen, damit der t = 0 entſprechende Werth von u den anfänglichen Tem- raturzuſtand der Stange ausdrückt.

§. 563. Bei den eben mitgetheilten beiden Anwendungen kann man die rch die Formel (23) gegebenen Werthe des Parameters α als die unend- h vielen Wurzeln der transcendenten Gleichung sin. $\alpha l = 0$ betrachten, und ı Allgemeinen hat man zur Beſtimmung der unendlich vielen Werthe von α ne transcendente Gleichung; aber von einer complicirtern Form und von ner ſolchen Beſchaffenheit, daß man die auf einander folgenden Wurzeln nur rch Probiren beſtimmen kann.

Wir wollen dieſelben Data, wie in der vorhergehenden Gleichung bei- halten, nur ſoll die Function u, ſtatt für x = l beſtändig Null zu ſein, an ſer Grenze und für alle Werthe von t der Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dx} + hu = 0 \qquad (26)$$

nügen. Dieſe neue Aufgabe bezieht ſich auf die Beſtimmung der Temperatur ıer homogenen Kugel, welche in ein Mittel von conſtanter Temparatur ge- ıcht und urſprünglich ſo erhitzt iſt, daß alle gleich weit vom Mittelpunkte ſfernte Punkte dieſelbe Temperatur haben. Die Veränderliche x bezeichnet Entfernung eines beliebigen Punktes der Kugel von ihrem Mittelpunkte, Function u iſt das Produkt aus der Temperatur dieſes Punktes und aus ner Entfernung x vom Mittelpunkte der Kugel, und l iſt der Halbmeſſer letztern. Die Bedingung, daß für x = 0 bei jedem Werthe von t die nction u = 0 ſei, folgt daraus, daß die Temperatur des Mittelpunktes der gel nicht unendlich groß werden kann (§. 458), und das Statt finden der leichung (26), worin h einen conſtanten Coefficienten ausdrückt, iſt eine lge von dem an der Oberfläche der Kugel durch Ausſtrahlung und durch rührung ſtattfindenden Wärmeverluſte.

Der Werth von u wird immer durch die Formel (25) gegeben; aber vermöge der Gleichung (26) müſſen die Parameter α die Wurzeln der transcendenten Gleichung:

$$\alpha \cos. \alpha l + h \sin. \alpha l = 0 \qquad (27)$$

ſein. Wir wollen annehmen, dieſe Wurzeln wären berechnet, ſo kommt es darauf an, die Coefficiente A ſo zu beſtimmen, daß ſich u für $t = 0$ auf eine zwiſchen den Grenzen $x = 0$, $x = l$ willkürlich angegebene Function fx reducirt. Folgendes iſt das Verfahren, welches Poiſſon zu dieſer Beſtimmung und zugleich zu dem Beweiſe, daß die Gleichung (27) keine imaginären Wurzeln haben kann, angewandt hat.

§. 564. Wenn wir die beiden Theile der Gleichung (24) durch $\sin. \alpha x dx$ multipliciren, und zwiſchen den Grenzen $x = 0$, $x = l$ integriren; ſo erhalten wir:

$$\frac{d \cdot \int_0^l u \sin. \alpha x dx}{dt} = a^2 \int_0^l \sin. \alpha x \frac{d^2 u}{dx^2} dx, \qquad (28)$$

und die theilweiſe Integration gibt:

$$\int_0^l \sin. \alpha x \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \left[\frac{du}{dx} \sin. \alpha x\right]_0^l - \alpha \int_0^l \cos. \alpha x \frac{du}{dx} dx$$

$$\int_0^l \cos. \alpha x \frac{du}{dx} dx = \left[u \cos. \alpha x\right]_0^l + \alpha \int_0^l u \sin. \alpha x dx,$$

woraus folgt:

$$\int_0^l \sin. \alpha x \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \left[\frac{du}{dx} \sin. \alpha x - \alpha u \cos. \alpha x\right]_0^l - \alpha^2 \int_0^l u \sin. \alpha x dx.$$

Für $x = 0$ iſt $u = 0$, $\sin. \alpha x = 0$ und für $x = l$ hat man vermöge der Gleichung (26):

$$\frac{du}{dx} \sin. \alpha x - \alpha u \cos. \alpha x = -u(h \sin. \alpha l + \alpha \cos. \alpha l),$$

welche Größe wegen der Gleichung (27) Null iſt. Die Gleichung (28) reducirt ſich alſo auf:

$$\frac{d \cdot \int_0^l u \sin. \alpha x dx}{dt} = -\alpha^2 a^2 \int_0^l u \sin. \alpha x dx,$$

und das Integral derſelben iſt:

$$\int_0^l u \sin. \alpha x dx = Ce^{-\alpha^2 a^2 t},$$

wo C den $t = 0$ entſprechenden Werth von:

$$\int_0^l u \sin. \alpha x dx,$$

d. h. das Integral:

$$\int_0^l fx \cdot \sin. \alpha x dx$$

bezeichnet. Durch die Elimination der Conſtanten C erhält man alſo:

$$\int_0^l u \sin. \alpha x dx = e^{-\alpha^2 a^2 t} \int_0^l fx \cdot \sin. \alpha x dx. \qquad (29)$$

Wenn wir in dieſe letzte Gleichung den durch die Formel (25) gegebenen Reihenausdruck des Werthes von u ſubſtituiren, ſo iſt zur Identität der Gleichung erforderlich, daß im erſten Theile derſelben nur das der im zweiten Theile angewandten Wurzel α entſprechende Glied bleibt. Für jede andere von α numeriſch verſchiedene Wurzel α' hat man folglich:

$$\int_0^l \sin. \alpha x \sin. \alpha' x dx = 0, \qquad (30)$$

und die Gleichung (29) gibt blos:

$$A \int_0^l \sin.^2 \alpha x dx = \int_0^l fx \cdot \sin. \alpha x dx,$$

oder, wenn die erſte Integration verrichtet wird:

$$A = \frac{2\alpha \int_0^l fx \cdot \sin. \alpha x dx}{\alpha l - \sin. \alpha l \cos. \alpha l},$$

folglich:

$$u = 2\Sigma \cdot \frac{\alpha \int_0^l fx \cdot \sin. \alpha x dx}{\alpha l - \sin. \alpha l \cos. \alpha l} \sin. \alpha x \cdot e^{-\alpha^2 a^2 t}, \qquad (31)$$

wodurch der Werth von u vollſtändig beſtimmt iſt.

Es iſt zu bemerken, daß, wenn α eine Wurzel der Gleichung (27) iſt, $-\alpha$ eine andere Wurzel derſelben iſt; allein die Auflöſung bekäme keine größere Allgemeinheit, wenn man die negativen Wurzeln in Betracht ziehen wollte, weil die Summe der beiden Glieder:

$$(A_1 \sin. \alpha x \cdot e^{-\alpha^2 a^2 t} + A_2 \sin. (-\alpha x) \cdot e^{-\alpha^2 a^2 t}$$

gleichbedeutend iſt mit:

$$(A_1 - A_2) \sin. \alpha x \cdot e^{-\alpha^2 a^2 t} = A \sin. \alpha x \cdot e^{-\alpha^2 a^2 t},$$

wo der Parameter α nun blos noch poſitive Werthe bekommen kann.

§. 565. Vermittelſt der Gleichung (30) kann man, wie bereits bemerkt worden, darthun, daß die Gleichung (27) keine imaginären Wurzeln haben kann. Denn es ſei $\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1}$ eine imaginäre Wurzel der Gleichung 27), ſo muß dieſe Gleichung auch eine andere der erſten conjugirte imaginäre Wurzel $\alpha' = \mu - \nu\sqrt{-1}$ haben, und nach den gewöhnlichen Transformationen verwandelt ſich die Gleichung (30) in:

$$\frac{1}{4} \int_0^l [\sin.^2 \mu x (e^{\nu x} + e^{-\nu x})^2 + \cos.^2 \mu x (e^{\nu x} - e^{-\nu x})^2] dx = 0,$$

welche Gleichung unmöglich iſt, weil alle Elemente des Integrales im erſten Theile nothwendig poſitiv ſind.

Wenn man die Integration verrichtet, ſo findet man:

$$\int_0^l \sin.\,\alpha x \sin.\,\alpha' x dx = \frac{\sin.(\alpha-\alpha')l}{2(\alpha-\alpha')} - \frac{\sin.(\alpha+\alpha')l}{2(\alpha+\alpha')}$$

$$= \frac{\alpha' \sin.\,\alpha l \cos.\,\alpha' l - \alpha \sin.\,\alpha' l \cos.\,\alpha l}{\alpha^2 - \alpha'^2}. \qquad (32)$$

Da α, α' Wurzeln der Gleichung (27) bezeichnen, ſo iſt der Zähler dieſes letzten Bruches $= 0$ und die Gleichung (30), welche bereits durch eine von der beſondern Form der Function unter dem Integralzeichen $\int$ unabhängige Betrachtung bewieſen iſt, wird alſo erfüllt.

Für $\alpha' = \alpha$ erſcheint der letzte Theil der Gleichung (32) unter der Form $\frac{0}{0}$ und ſein nach der gewöhnlichen Methode beſtimmter wahrer Werth iſt:

$$\frac{\alpha l - \sin.\,\alpha l \cos.\,\alpha l}{2\alpha},$$

welchen wir auch durch directe Berechnung des Integrales $\int_0^l \sin.^2 \alpha x dx$ erhalten haben.

§. 566. Wir wollen in der Gleichung (31), $t = 0$ ſetzen, ſo muß ſich die Function u zwiſchen den Grenzen $x = 0$, $x = l$ auf fx reduciren, und man hat, wenn man der Deutlichkeit wegen für die Veränderliche x unter dem Integrationszeichen eine Hülfsveränderliche ξ ſetzt:

$$fx = 2\Sigma \cdot \frac{\alpha \int_0^l f\xi \cdot \sin.\,\alpha\xi d\xi}{\alpha l - \sin.\,\alpha l \cos.\,\alpha l} \cdot \sin.\,\alpha x.$$

Dieſes iſt eine neue Formel für die Entwickelung der Function fx, welche denen in Buch 5, Kap. 12 analog und ebenſo ſtreng, obgleich auf eine indirecte Weiſe bewieſen iſt. Formeln dieſer Art laſſen ſich wie die linearen partiellen Differenzialgleichungen, welchen ſie entſprechen, beliebig vermehren; allein ſie können nur dann mit Zuverläſſigkeit angewandt werden, wenn die Convergenz der Reihen, welche ſie erzeugen, ſtreng nachgewieſen iſt.

§. 567. Wenn die lineare partielle Differenzialgleichung mit conſtanten Coefficienten drei Veränderliche x, y, t enthielte, ſo könnte man zum particulären Integrale

$$u = Ce^{\alpha x + \beta y + \gamma t}$$

nehmen, und man hätte zwiſchen α, β, γ eine Bedingungsgleichung:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \text{oder} \quad \gamma = \varphi(\alpha, \beta),$$

ſo daß zwei dieſer Parameter unbeſtimmt blieben. Man könnte alſo für das allgemeine Integral:

$$u = \Sigma\Sigma \cdot Ce^{\alpha x + \beta y + t\varphi(\alpha,\beta)}$$

nehmen, wo das doppelte Zeichen $\Sigma\Sigma$ andeutet, daß man ſucceſſive alle möglichen Werthe von α mit allen möglichen Werthen von β verbinden muß. Mit dem vorhergehenden Werthe von u könnte man ähnliche Transformationen vornehmen, wie die im Verlaufe dieſes Kapitels bei der Entwickelung der Functionen mit zwei Veränderlichen angegebenen; aber im Allgemeinen ſind ſolche Entwickelungen, wenn die Anzahl der Veränderlichen größer iſt als zwei, wegen ihrer Weitſchichtigkeit unbrauchbar, und man muß alsdann ſtatt der unendlichen Reihen beſtimmte Integrale anwenden, wie wir in dem folgenden Kapitel zeigen wollen.

Fünftes Kapitel.

Ueber die Integration der linearen partiellen Differenzialgleichungen durch bestimmte Integrale.

§. 568. Im §. 551 haben wir gesehen, daß das Integral der Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2} \tag{1}$$

durch die Reihe:

$$u = \varphi x + \frac{t}{1}\cdot\varphi''x + \frac{t^2}{1.2}\cdot\varphi^{iv}x + \frac{t^3}{1.2.3}\cdot\varphi^{vi}x + \text{ꝛc.} \tag{2}$$

ausgedrückt wird, welche ihrerseits selbst durch ein bestimmtes Integral summirt über unter endlicher Form ausgedrückt werden kann.

Denn nach den bekannten Formeln (§. 403):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}d\omega = \sqrt{\pi}, \quad \text{(a)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\omega^{2i+1}d\omega = 0 \tag{b}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\omega^{2i}d\omega = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{2^i}\cdot\sqrt{\pi} \tag{c}$$

nimmt die Gleichung (2) folgende Form an:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\varphi x + 2\omega\sqrt{t}\cdot\varphi' x + \frac{(2\omega\sqrt{t})^2}{1.2}\varphi'' x + \frac{(2\omega\sqrt{t})^3}{1.2.3}\cdot\varphi''' x + \frac{(2\omega\sqrt{t})^4}{1.2.3.4}\cdot\varphi^{iv}x + \text{ꝛc.}\Big]e^{-\omega^2}d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x + 2\omega\sqrt{t})e^{-\omega^2}d\omega. \tag{3}$$

Auch hätte man:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x - 2\omega\sqrt{t})e^{-\omega^2}d\omega,$$

und folglich:

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x + 2\omega\sqrt{t}) + \varphi(x - 2\omega\sqrt{t})]e^{-\omega^2}d\omega.$$

Wenn man den Ausdruck auf diese Form bringt, so erhellet daraus besser, daß t sowohl auf positive, wie auf negative Werthe von t anwendbar ist, denn die Glieder, welche für negative Werthe von t mit dem Zeichen des imaginären behaftet sind, heben sich gegenseitig auf, und in der That kann man in der Reihe (2), woraus der Ausdruck (3) abgeleitet ist, der Veränderlichen t negative Werthe beilegen.

Der Ausdruck (3) läßt sich auch sehr einfach aus der Formel:

$$u = \Sigma\cdot Ce^{\alpha x + \alpha^2 t} \quad (\text{§. } 557)$$

ableiten, denn die Gleichung (a) gibt, wenn man darin $\omega - \alpha\sqrt{-1}$ für ω ſetzt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2+2\alpha\omega\sqrt{-1}-\alpha^2 t} d\omega = \sqrt{\pi}$$

folglich:

$$e^{\alpha^2 t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2+2\alpha\omega\sqrt{-1}} d\omega, \qquad (4)$$

und mithin:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Sigma \cdot C e^{\alpha(x+2\omega\sqrt{-1})} \cdot e^{-\omega^2} d\omega,$$

welche Formel mit dem Ausdrucke (3) übereinſtimmt, wenn man, wie es erlaubt iſt:

$$\varphi(x+2\omega\sqrt{-1}) \quad \text{für} \quad \Sigma \cdot C e^{\alpha(x+2\omega\sqrt{-1})}$$

ſetzt. Soll dieſe Formel anwendbar ſein, ſo muß die Function φ, obgleich ſie willkürlich iſt, doch ſo vorausgeſetzt werden, daß das Product $\varphi(x+2\omega\sqrt{-1})e^{-\omega^2}$ für $\omega = \pm\infty$ und für beliebige Werthe von t, x verſchwindet, damit das Integral immer einen endlichen Werth behält. Vermöge dieſer Einſchränkung ergibt ſich durch eine directe Rechnung, daß die Gleichung (3) der gegebenen Genüge leiſtet.

§. 569. Das vollſtändige Integral der Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dxdt} = iu$$

iſt (§. 552):

$$u = A\left(1 + \frac{xt}{(1)^2} + \frac{x^2t^2}{(1.2)^2} + \frac{x^3t^3}{(1.2.3)^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \varphi_1 x + \frac{t}{1} \cdot \varphi_2 x + \frac{t^2}{1.2} \cdot \varphi_3 x + \frac{t^3}{1.2.3} \cdot \varphi_4 x + \text{ꝛc.}$$
$$+ \psi_1 t + \frac{x}{1} \cdot i\psi_2 t + \frac{x^2}{1.2} \cdot \psi_3 t + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot \psi_4 t + \text{ꝛc.}$$

Wenn man die Ableitungen der Functionen $\varphi_1 x, \psi_1 t$ mit $\varphi x, \psi t$ bezeichnet, ſo hat man:

$$\varphi_i x = \frac{1}{1.2.3\ldots(i-1)} \int_0^x (x-\omega)^{i-1} \varphi\omega d\omega$$
$$\psi_i t = \frac{1}{1.2.3\ldots(i-1)} \int_0^t (t-\omega)^{i-1} \psi\omega d\omega;$$

denn die $i$mal wiederholte theilweiſe Integration gibt:

$$\int (x-\omega)^{i-1} \varphi\omega d\omega = (x-\omega)^{i-1} \varphi_1\omega + (i-1)(x-\omega)^{i-2} \varphi_2\omega$$
$$+ (i-1)(i-2)(x-\omega)^{i-3} \varphi_3\omega + \ldots + (i-1)(i-2)\ldots 3.2.1\, \varphi_i\omega,$$

wo vermöge der Definition an der Grenze $\omega = 0$ alle die Functionen $\varphi_i\omega$ und an der Grenze $\omega = x$ alle Glieder des zweiten Theiles verſchwinden, welche $x = \omega$ zum gemeinſchaftlichen Factor haben, ſo daß man für $\varphi_i x$ den vorhin angegebenen Werth erhält, und dieſelbe Rechnung iſt auf die Function $\psi_i t$ anwendbar.

Durch dieſe Transformation erhält man alſo:

$$u = A\left(1 + \frac{xt}{(1)^2} + \frac{x^2t^2}{(1.2)^2} + \frac{x^3t^3}{(1.2.3)^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \int_0^x \left[1 + \frac{t(x-\omega)}{(1)^2} + \frac{t^2(x-\omega)^2}{(1.2)^2} + \frac{t^3(x-\omega)^3}{(1.2.3)^2} + \text{ꝛc.}\right]\varphi\omega d\omega$$
$$+ \int_0^t \left[1 + \frac{x(t-\omega)}{(1)^2} + \frac{x^2(t-\omega)^2}{(1.2)^2} + \frac{x^3(t-\omega)^3}{(1.2.3)^2} + \text{ꝛc.}\right]\psi\omega d\omega,$$

und wenn i wieder eine ganze poſitive Zahl bezeichnet, ſo hat man (§. 404):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{2i}\alpha d\alpha = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots 2i} \cdot \frac{\pi}{2}$$

der:

$$\frac{\pi}{(1.2.3\ldots i)^2} = \frac{2^{2i+1}}{1.2.3\ldots 2i} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^{2i}\alpha d\alpha.$$

Man kann alſo den erſten Theil des Werthes von u auf die Form bringen:

$$\frac{2}{\pi} A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{2^2 \cdot xt}{1.2} \sin.^2\alpha + \frac{2^4 \cdot x^2t^2}{1.2.3.4} \sin.^4\alpha + \text{ꝛc.}\right) d\alpha$$
$$= \frac{1}{\pi} A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{2\sqrt{xt} \cdot \sin.^2\alpha} + e^{-2\sqrt{xt} \cdot \sin.^2\alpha}\right) d\alpha,$$

und für die beiden andern Theile des Werthes von u, welche auf eine ähnliche Weiſe zuſammengeſetzt ſind, iſt es einfacher, die Exponentialgrößen in Sinuſſe zu verwandeln, ſo daß man endlich erhält:

$$u = \frac{A}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{2\sqrt{xt} \cdot \sin.^2\alpha} + e^{-2\sqrt{xt} \cdot \sin.^2\alpha}\right) d\alpha$$
$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^x \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.\left(2\sqrt{t(\omega-x)} \sin.^2\alpha\right) d\alpha\right] \varphi\omega d\omega$$
$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^t \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.\left(2\sqrt{x(\omega-t)} \sin.^2\alpha\right) d\alpha\right] \psi\omega d\omega.$$

Wir ſind hier auf doppelte beſtimmte Integrale gekommen, während wir das Integral der Gleichung (1), durch ein einfaches beſtimmtes Integral ausdrückt, erhalten hatten.

§. 570. Um ein Beiſpiel von der Integration der linearen Differenzialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten zu geben, wollen wir die Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{ku}{x^2} \qquad (5)$$

men, welche das particuläre Integral $u = ye^{\alpha t}$ hat, wofern y eine Function einzigen Veränderlichen x iſt, welche der Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{k}{x^2} y = \alpha y \qquad (6)$$

Genüge leiſtet. Das Integral dieſer letzten Gleichung muß zwei willkürliche Conſtanten A, B enthalten und für das vollſtändige Integral der Gleichung (5) kann man $u = \Sigma \cdot ye^{\alpha t}$ nehmen, wo ſich die Summe Σ auf alle möglichen Werthe der Conſtanten A, B, α erſtreckt.

Der Bequemlichkeit der Rechnung wegen wollen wir α^2 für α und $m(m-1)$ für k ſetzen, ſo iſt das vollſtändige Integral der Gleichung (6) nach der Formel (17) im §. 471:

$$y = Ax^m \int_0^{\pi} e^{\alpha x \cos.\omega} \sin.^{2m-1}\omega d\omega + Bx^{1-m} \int_0^{\pi} e^{\alpha x \cos.\omega} \sin.^{1-2m}\omega d\omega.$$

Subſtituiren wir dieſen Werth von y in die Gleichung $u = \Sigma \cdot ye^{\alpha^2 t}$ und ſetzen dann für $e^{\alpha^2 t}$ ſeinen aus der Gleichung (4) gezogenen Werth, indem wir die in dieſer letzten Gleichung vorkommenden ω accentuiren, um ſie von den in dem Ausdrucke von y vorkommenden zu unterſcheiden, ſo erhalten wir:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^m \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} [\Sigma \cdot Ae^{\alpha(x\cos.\omega + 2\omega'\sqrt{-1})}] e^{-\omega'^2} \sin.^{2m-1}\omega d\omega' d\omega$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{1-m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} [\Sigma \cdot Be^{\alpha(x\cos.\omega + x'\sqrt{-1})}] e^{-\omega'^2} \sin.^{1-2m}\omega d\omega' d\omega,$$

und wenn man:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \Sigma \cdot Ae^{\alpha x} = \varphi x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \Sigma \cdot Be^{\alpha x} = \psi x$$

ſetzt, ſo hat man einfacher:

$$u = x^m \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \varphi(x\cos.\omega + 2\omega'\sqrt{-t}) e^{-\omega'^2} \sin.^{2m-1}\omega d\omega' d\omega$$

$$+ x^{1-m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \psi(x\cos.\omega + 2\omega'\sqrt{-t}) e^{-\omega'^2} \sin.^{1-2m}\omega d\omega' d\omega.$$

Uebrigens hat Poiſſon dargethan*), daß das Integral, ungeachtet der beiden Functionszeichen φ, ψ nur von der willkürlichen Function von x abhängt, welche den Werth von u für $t = 0$ ausdrückt.

§. 571. Da die Rechnungskunſtgriffe, vermittelſt welcher wir oben die vollſtändigen Integrale verſchiedener partieller Differenzialgleichungen durch beſtimmte Integrale ausgedrückt haben, keine gleichförmige Methode bilden, ſo kann man, wie Fourier zuerſt gethan hat, andere Betrachtungen anwenden, welche ſich der Fundamentaleigenſchaft der linearen Differenzialgleichung eng anſchließen.

Nehmen wir z. B. die Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2},$$

welcher durch den particulären Werth:

$$u = Ae^{-\alpha^2 t} \cos.\alpha(x - \xi)$$

*) Journal de l'École polytechnique, 19e cahier, pag. 241.

Benüge geſchieht, wo A, α, ξ unbeſtimmte Parameter bezeichnen. Statt dieſen Parametern durch endliche Intervalle von einander getrennte Werthe beizulegen, kann man annehmen, daß ſie unendlich viele Werthe ſtetig durchlaufen, und man kann ſogar zwiſchen den Parametern A, ξ eine willkürliche Relation:

$$A = \omega(\xi)$$

aufſtellen, wodurch die Allgemeinheit der Auflöſung durchaus nicht beſchränkt wird, ſondern im Gegentheil durch Einführung einer willkürlichen Function, welche man nach den Erforderniſſen der Aufgabe annehmen kann, die erforderliche Allgemeinheit bekommt. Man bemerkt leicht die Analogie, welche wiſchen dieſem Kunſtgriffe und dem ſtattfindet, deſſen ſich Lagrange und Monge bedient haben, um aus einem particulären Integrale, worin aber eine hinreichende Anzahl willkürlicher Conſtanten fehlen, das Syſtem von Gleichungen abzuleiten, welche vermöge der darin vorkommenden willkürlichen Functionen das allgemeine Integral ausdrücken können (§. 525 und §. 534).

So genügt man z. B. der gegebenen Differenzialgleichung wegen ihrer linearen Form, wenn man:

$$u = \iint e^{-\alpha^2 t} \cos.\, \alpha(x - \xi) \cdot \omega(\xi) d\xi d\alpha$$

ſetzt, von welcher Beſchaffenheit die Function ω und die Integrationsgrenzen auch ſein mögen. Ferner wollen wir annehmen, daß ſich die Function u für $t = 0$ auf φx reduciren müſſe, ſo braucht man nach der Fourier'ſchen Formel (§. 435) nur:

$$\omega(\xi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \varphi(\xi)$$

zu ſetzen, indem die obern und untern Integrationsgrenzen reſp. $+\infty$ und $-\infty$ ſind, und man hat folglich:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 t} \cos.\, \alpha(x - \xi) \varphi\xi d\xi d\alpha. \qquad (7)$$

Wir haben den Werth von u bereits durch ein einfaches beſtimmtes Integral ausgedrückt erhalten, und um dieſen Werth wieder zu finden, braucht man in der vorhergehenden Formel nur die in Beziehung auf α angedeutete Integration zu verrichten. In der That iſt nach der Formel (k) im §. 410:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 t} \cos.\, \alpha(x - \xi) d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$$

folglich:

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \varphi\xi d\xi,$$

und es kommt blos noch darauf an, unter dem Integrationszeichen die Hülfsveränderliche zu vertauſchen, indem man:

$$\frac{(x - \xi)^2}{4t} = \omega^2, \quad \text{oder} \quad \xi = x + 2\omega\sqrt{t}$$

ſetzt, um wieder auf die Formel (3) zu kommen.

Wenn man ſtatt der gegebenen die Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2}$$

hätte, ſo müßte man in den Formeln (7) und (3) offenbar t in $a^2 t$ verwandeln, wodurch man erhielte:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 a^2 t}\cos.\,\alpha(x-\xi)\varphi\xi\,d\xi\,d\alpha$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+2a\omega\sqrt{t})e^{-\omega^2}\,d\omega.$$

§. 572. Die vorhergehenden Gleichungen drücken die Fortpflanzungsgesetze der Wärme in einer unendlich langen cylindrischen Stange von einem unendlich kleinen normalen Querschnitte aus, wenn der Wärmeverlust durch Ausstrahlung und durch Berührung an der ganzen Oberfläche der Stange als Null oder unmerklich angenommen wird. Wenn die Stange als unbestimmt lang betrachtet wird, so findet in Beziehung auf die Grenzwerthe von x keine Bedingung mehr statt, wodurch sich im Allgemeinen die Aufgaben, bei welchen man bestimmte zwischen unendlichen Grenzen genommene Integrale anwendet, von denen unterscheiden, bei deren Auflösung man das Integral in Reihen entwickelt, deren Glieder durch die Reihe der Wurzeln einer transcendenten Gleichung gegeben werden.

Es sei nun die Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)$$

mit vier unabhängigen Veränderlichen gegeben, welche sich auf die Fortpflanzung der Wärme in einem nach allen Richtungen unbegrenzten homogenen Körper bezieht, und wo sich die Function u für $t=0$ auf $\varphi(x,y,z)$ reduciren muß.

Wenn wir der Einfachheit wegen:

$$\varphi(\xi,\eta,\zeta)\cdot e^{-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)a^2t} = \theta$$

setzen, so gibt die auf Functionen mit drei Veränderlichen erstreckte Fourier'sche Formel:

$$u = \frac{1}{8\pi^3}\overline{\int\int\int\int\int\int}_{-\infty}^{\infty}\theta\cdot\cos.\,\alpha(x-\xi)\cdot\cos.\,\beta(y-\eta)\cdot\cos.\,\gamma(z-\zeta)\cdot d\xi d\eta d\zeta d\alpha d\beta d\gamma.$$

Durch eine Analyse, wie die oben angewandte wird das sechsfache Integral auf ein dreifaches reducirt, und man hat:

$$u = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}}\cdot\overline{\int\int\int}_{-\infty}^{\infty} e^{-(\omega^2+\omega'^2+\omega''^2)}\varphi(x+2a\omega\sqrt{t},y+2a\omega'\sqrt{t},z+2a\omega''\sqrt{t})\,d\omega d\omega' d\omega''.$$

Die Querstriche über und unter den Integrationszeichen deuten an, daß alle Integrale zwischen denselben Grenzen genommen sind.

§. 573. Betrachten wir nun die Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2\frac{d^2u}{dx^2}, \tag{8}$$

welcher durch die particulären Werthe:

$$A\cos.\,\alpha at\cos.\,\alpha(x-\xi), \qquad B\sin.\,\alpha at\cos.\,\alpha(x-\xi)$$

Genüge geschieht, und nehmen wir an, daß sich die Function u, $\frac{du}{dt}$ für $t=0$ resp. auf:

$$u = fx, \qquad (9) \qquad \frac{du}{dt} = fx = a\frac{dFx}{dx} \qquad (10)$$

ucirem; ſo geſchieht der Gleichung (8) und der Bedingungsgleichung (9) enüge, wenn man:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \text{cos. } \alpha at \text{ cos. } \alpha(x-\xi) f\xi d\xi d\alpha$$

t; aber dieſer Werth von u gibt $\frac{du}{dt} = 0$ für $t = 0$, und genügt folglich er Bedingungsgleichung (10) nicht. Dagegen leiſtet der Werth:

$$u = \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sin. } \alpha at}{\alpha} \text{cos. } \alpha(x-\xi) f\xi d\xi d\alpha,$$

enus folgt:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \text{cos. } \alpha at \text{ cos. } \alpha(x-\xi) f\xi d\xi d\alpha$$

er Gleichung (8) und der Bedingung (10), aber nicht der Bedingung (9) enüge, weil derſelbe $u = 0$ für $t = 0$ gibt. Es wird alſo der gegebenen ifferenzialgleichung und den Bedingungsgleichungen (9), (10) zu gleicher eit Genüge geleiſtet, wenn man

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \text{cos. } \alpha at \text{ cos. } \alpha(x-\xi) f\xi d\xi d\alpha$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sin. } \alpha at}{\alpha} \text{cos. } \alpha(x-\xi) f\xi d\xi d\alpha$$

t. Bekanntlich hat die Gleichung (8), welche die Gleichung für die ſchwingenden Saiten und für die Schallwellen in einer cylindriſchen Röhre iſt, ein ntegral unter endlicher Form, wovon das vorhergehende eine Transformation in muß. In der That kann der erſte Theil des Werthes von u auf die orm:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\text{cos. } \alpha(x+at-\xi) + \text{cos. } \alpha(x-at-\xi)] f\xi d\xi d\alpha$$

ebracht werden, und reducirt ſich vermöge des Fourier'ſchen Lehrſatzes auf:

$$\tfrac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)].$$

Der zweite Theil des Werthes von u verwandelt ſich durch eine ähnliche ransformation in:

$$\frac{1}{4\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\text{sin. } \alpha(x+at-\xi)}{\alpha} - \frac{\text{sin. } \alpha(x-at-\xi)}{\alpha}\right] f\xi d\xi d\alpha. \qquad (11)$$

Das Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\text{sin. } \alpha(x+at-\xi)}{\alpha} - \frac{\text{sin. } \alpha(x-at-\xi)}{\alpha}\right] d\alpha$$

educirt ſich nach §. 413 auf π oder $-\pi$, je nachdem

$$\xi > x - at, \quad \xi < x + at, \quad \text{und folglich: } t > 0,$$

der:

$$\xi > x + at, \quad \xi < x - at, \quad \text{und folglich: } t > 0$$

i. Es verſchwindet für die Werthe von ξ, welche außerhalb der Grenzen

$\xi = x - at$, $\xi = x + at$ liegen, und den Factoren $x + at - \xi$, $x - a$ entgegengeſetzte Zeichen ertheilen. Das Integral (11) hat alſo zum W

$$\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} f\xi d\xi = \frac{1}{2}[F(x+at) - F(x-at)]$$

und wenn man die beiden Theile des Werthes von u vereinigt, ſo l man wieder auf die Gleichung (12) im §. 556.

Für die Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right),$$

welche das Fortpflanzungsgeſetz der Wellen in einem Mittel, deſſen Ela in allen Richtungen dieſelbe iſt, oder in einem nicht cryſtalliſirten M ausdrückt, ergibt ſich leicht ein Integral von ähnlicher Form, wie da Gleichung (8). Es ſeien $f(x, y, z)$, $f(x, y, z)$ die Functionen, welch für $t = 0$ reſp. auf u und $\frac{du}{dt}$ reduciren, und wir wollen

$$a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \theta^2$$

$$f(\xi, \eta, \zeta)\cos.\theta t + f(\xi, \eta, \zeta)\frac{\sin.\theta t}{\theta} = \Theta$$

ſetzen, ſo iſt das Integral:

$$u = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int\int\int \cos.\alpha(x-\xi)\cos.\beta(y-\eta)\cos.\gamma(z-\zeta)\,.\,\Theta d\xi d\eta d\zeta d\alpha d\beta$$

Aber dieſes ſechsfache Integral, woraus ſich die Geſetze der Erſche ſchwer würden erkennen laſſen, kann, wie Poiſſon gezeigt hat *), ü doppelte Integral verwandelt werden:

$$u = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x + at\cos.\theta,\ y + at\sin.\theta\sin.\omega,\ z + at\sin.\theta\cos.\omega)\,t\sin.$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x + at\cos.\theta, y + at\sin.\theta\sin.\omega, z + at\sin.\theta\cos.\omega)t\sin.\theta$$

Im Allgemeinen beſteht die Schwierigkeit darin, die Ordnung des fachen Integrales, auf welches die Anwendung des Fourier'ſchen Lehr unmittelbar führt, ſo viel, als es die Natur der Aufgabe geſtattet, z niedrigen; allein dieſe Reduction ſcheint bis jetzt noch keinen allgemeinen geln zu unterliegen.

§. 574. Betrachten wir zuletzt noch die Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + a^2\frac{d^4u}{dx^4} = 0,$$

welche ſich auf die Fortpflanzung der Transverſalſchwingungen eines elaſt Stabes, welcher zu beiden Seiten des urſprünglichen Erſchütterungsn punktes eine unbeſtimmte Länge hat, bezieht, und wobei wieder angeno wird, daß $u = fx$ und $\frac{du}{dt} = fx$ für $t = 0$ ſein muß.

Der gegebenen Gleichung geſchieht durch den particulären Werth:

$$u = A\cos.\alpha^2 at\cos.\alpha(x - \xi)$$

*) Nouveaux mémoires de l'Académie des sciences, tom. III.

mäge, und folglich gibt eine ähnliche Rechnung, wie die frühern für das ständige Integral:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos.\,\alpha^2\,at\cos.\,\alpha(x-\xi)f\xi d\xi d\alpha$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin.\,\alpha^2\,at}{\alpha^2}\cos.\,\alpha(x-\xi)f\xi d\xi d\alpha.$$

Der erste Theil des Werthes von u läßt sich auf ein einfaches bestimmtes tegral zurückführen; denn nach der ersten der Gleichungen (i) im §. 409 t man:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos.\,\alpha^2\,at\cos.\,\alpha(x-\xi)\,d\alpha$$
$$=\left[\cos.\left(\frac{x-\xi}{2\sqrt{at}}\right)^2+\sin.\left(\frac{x-\xi}{2\sqrt{at}}\right)^2\right]\sqrt{\frac{\pi}{2at}}$$

b wenn man folglich:

$$\xi = x + 2\omega\sqrt{at} \qquad (12)$$

t, so nimmt der erste Theil des Werthes von u folgende Form an:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sin.\,\omega^2+\cos.\,\omega^2)f(x+2\omega\sqrt{at})d\omega.$$

Wenn also die Function $fx = 0$ ist, oder wenn die Molecule des elastiten Stabes anfangs aus ihren ursprünglichen Lagen des Gleichgewichtes entt sind, ohne anfängliche Geschwindigkeiten in den auf der Axe der Stange krechten Ebenen zu bekommen, so hat man blos die Gleichung:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sin.\,\omega^2+\cos.\,\omega^2)f(x+2\omega\sqrt{at})d\omega,$$

liche wegen ihrer Aehnlichkeit mit der Gleichung (3) merkwürdig ist.

Für schwingende Platten, welche in allen Richtungen dieselbe Elasticität ben, werden die Normalschwingungen ausgedrückt durch die Differenzialichung:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+a^2\left(\frac{d^4u}{dx^4}+2\frac{d^4u}{dx^2dy^2}+\frac{d^4u}{dy^4}\right)=0.$$

Wir wollen annehmen, daß sich die Function u im Anfange der Zeit auf x, y) reducire, und daß die Function $\frac{du}{dt}=0$ sei, so wird der Werth von durch das vierfache Integral:

$$=\frac{1}{4\pi^2}\overline{\overline{\int\int\int\int}}_{-\infty}^{\infty}\cos.\,(\alpha^2+\beta^2)\,at\cos.\,\alpha(x-\xi)\cos.\,\beta(y-\eta)f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\,d\alpha\,d\beta$$

gedrückt. Das doppelte Integral:

$$\overline{\overline{\int\int}}_{-\infty}^{\infty}\cos.\,(\alpha^2+\beta^2)\,at\cos.\,\alpha(x-\xi)\cos.\,\beta(y-\eta)\,d\alpha d\beta$$

$$\overline{\overline{\int\int}}_{-\infty}^{\infty}[\cos.\,\alpha^2at\cos.\,\beta^2at-\sin.\,\alpha^2at\sin.\,\beta^2at]\cos.\,\alpha(x-\xi)\cos.\,\beta(y-\eta)\,d\alpha d\beta \qquad (13)$$

kann erhalten werden; denn wenn man zuerſt die Integration in Beziehung auf α nach den Formeln (j) im §. 409 verrichtet, ſo findet man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\cos.\alpha^2 at \cos.\beta^2 at - \sin.\alpha^2 at \sin.\beta^2 at] \cos.\alpha(x-\xi)d\alpha$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{at}} \cdot \left[\cos.\beta^2 at \sin.\left(\frac{\pi}{4}+\omega^2\right) - \sin.\beta^2 at \sin.\left(\frac{\pi}{4}-\omega^2\right)\right],$$

wo ω den durch die Gleichung (12) gegebenen Werth hat. Das Integral (13) verwandelt ſich alſo in:

$$\sqrt{\frac{\pi}{at}} \cdot \sin.\left(\frac{\pi}{4}+\omega^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \cos.\beta^2 at \cos.\beta(y-\eta)\,d\beta$$

$$-\sqrt{\frac{\pi}{at}} \cdot \sin.\left(\frac{\pi}{4}+\omega^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \sin.\beta^2 at \cos.\beta(y-\eta)\,d\beta.$$

Aber in dieſem letzten Ausdrucke werden die Integrationen in Beziehung auf β auf dieſelbe Weiſe verrichtet, und wenn man

$$\eta = y + 2\omega' \sqrt{at}$$

ſetzt; ſo erhält man für den Werth des Integrales (13):

$$\frac{\pi}{at}\left[\sin.\left(\frac{\pi}{4}+\omega^2\right)\sin.\left(\frac{\pi}{4}+\omega'^2\right) - \sin.\left(\frac{\pi}{4}-\omega^2\right)\sin.\left(\frac{\pi}{4}-\omega'^2\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{at} \sin.(\omega^2+\omega'^2).$$

Folglich nimmt der Werth von u die eben ſo einfache als elegante Form an:

$$u = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sin.(\omega^2+\omega'^2) \cdot f(x+2\omega\sqrt{at},\ y+2\omega'\sqrt{t})\,d\omega d\omega'.$$

Sechstes Kapitel.

Ueber die Conſtruction der partiellen Differenzialgleichungen.

§. 575. Betrachten wir zuvörderſt die partielle Differenzialgleichung der erſten Ordnung mit drei Veränderlichen:

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad \text{oder} \quad q = f(x, y, z, p), \qquad (s)$$

und es ſei φx der Werth von z als Function von x, wenn die Veränderliche $y = 0$ iſt; ſo hat man für $y = 0$:

$$q = f(x, 0, \varphi x, \varphi' x), \quad \text{oder} \quad \frac{dz}{dy} = \Phi x.$$

Wenn alſo die Function Φx für alle Werthe von x endlich bleibt, und Δy eine ſehr kleine Größe der erſten Ordnung bezeichnet, ſo hat man bis auf

größen der zweiten Ordnung genau $\Delta z = \Phi x \cdot \Delta y$, so daß bei dieſem Grade der Annäherung:

$$z = \varphi x + \Phi x \cdot \Delta y = \varphi_1 x$$

der Ausdruck des $y = \Delta y$ entſprechenden Werthes von z als Function von x iſt, und ebenſo könnte man den $y = 2\Delta y$ entſprechenden Ausdruck $z = \varphi_2 x$ beſtimmen, u. ſ. f.

Wir wollen x, y, z als die drei rechtwinkligen Coordinaten einer krummen Fläche betrachten, ſo iſt:

$$z = \varphi x \qquad (b)$$

die Gleichung der Durchſchnittslinie dieſer Fläche mit der Ebene der xz und der Durchſchnitt der Ebene, welche die krumme Fläche nach dieſer Linie berührt, mit der Ebene der xz, iſt die Tangente an der Curve (b). Vermöge dieſer Bedingung und der Gleichung (a) iſt die Richtung der Berührungsebene für jeden Werth von x vollſtändig beſtimmt, ſo daß man im Raume die cylindriſche Fläche beſchreiben kann, welche die vermittelſt der Gleichung (a) zu conſtruirende Fläche nach der willkürlichen Curve (b) umhüllt. Wenn man die Umhüllungsfläche mit einer zu der Ebene der xz parallelen Ebene, deren Entfernung von dieſer Coordinatenebene eine ſehr kleine Größe der erſten Ordnung iſt, durchſchneidet, ſo iſt die Ordinate des Durchſchnittes der Umhüllungsfläche nur um eine ſehr kleine Größe der zweiten Ordnung von der Ordinate der Durchſchnittslinie der umhüllten Fläche mit derſelben Ebene verſchieden, und folglich kann der Durchſchnitt der Umhüllungsfläche für die Berührungslinie der krummen Fläche mit einer zweiten Umhüllungsfläche, welche man wie die erſte conſtruirt, genommen werden, u. ſ. f.

Statt die Gleichung der Durchſchnittscurve der krummen Fläche mit der Ebene der xz willkürlich anzunehmen, hätte man auch die Gleichung des Durchſchnittes der krummen Fläche mit jeder andern parallelen Ebene geben können. Hieraus folgt, daß, wenn man einen Ausdruck von z durch x, y angeben kann, welcher der Gleichung (a) genügt, dieſer Ausdruck eine willkürliche Function enthalten muß, welche man nach Belieben annehmen kann, um die krumme Fläche durch eine gegebene Curve gehen zu laſſen, wenn derſelbe denſelben Grad von Allgemeinheit haben ſoll, als die partielle Differenzialgleichung, der er Genüge leiſtet.

§. 576. Zu demſelben Reſultate gelangt man, wenn man für die Conſtruction einer krummen Fläche im Raume die Conſtruction ihrer Niveaulinien (§. 126) in einer horizontalen Ebene ſubſtituirt. Geſetzt, daß außer der Gleichung (a) auch der Durchſchnitt der krummen Fläche mit der horizontalen Ebene der x, y oder die Gleichung:

$$y = \varphi x \qquad (\beta)$$

dieſer Durchſchnittslinie gegeben ſei, ſo hat man für alle Punkte der krummen Fläche, welche der Curve (β) angehören, $p + q\varphi' x = 0$, und dieſe Gleichung gibt in Verbindung mit der gegebenen Gleichung (a) die Werthe von p, q, ſowie die von $p^2 + q^2$ als Functionen von x, y für jeden Punkt der krummen Fläche, welcher der Niveaulinie (β) angehört. Wenn man in jedem Punkte dieſer Curve Normale zieht und auf jeder Normale eine Länge nimmt, welche der ſehr kleinen Größe der erſten Ordnung $\frac{\Delta z}{\sqrt{p^2 + q^2}}$ gleich iſt, ſo bekommt man auf der Ebene der xy bis auf Größen der zweiten Ordnung genau die Projection einer zweiten Niveaulinie, für welche die Ordinate z den Werth

Δz hat, und wenn man daſſelbe Verfahren weiter fortſetzt, ſo kann man ſich dieſer Curve zum Beſchreiben der Projection einer dritten Niveaulinie, deren Ordinate z den Werth $2\Delta z$ hat, bedienen, u. ſ. f.

§. 577. Dieſe Betrachtungen erſtrecken ſich auf die partiellen Differenzialgleichungen der erſten Ordnung mit einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen. Es ſei die Differenzialgleichung:

$$F\left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{du}{dz} = f\left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}\right) \qquad (c)$$

gegeben, vermittelſt welcher man die Function u von drei unabhängigen Veränderlichen x, y, z conſtruiren ſoll. Zu dieſem Zwecke iſt es nothwendig, daß die Function $u = \varphi(x, y)$ für einen particulären Werth von z, z. B. für $z = 0$, angegeben wird. Alsdann hat man für die ſehr kleine Größe der erſten Ordnung $z = \Delta z$ die Gleichung:

$$\frac{du}{dz} = f\left[x, y, 0, \varphi(x, y), \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}\right] = \Phi(x, y),$$

woraus bis auf Größen der zweiten Ordnung $\Delta u = \Phi(x, y) \cdot \Delta z$ genau folgt:

$$u = \varphi(x, y) + \Phi(x, y) \cdot \Delta z = \varphi_1(x, y).$$

Ebenſo würde man den $z = 2\Delta z$ entſprechenden Werth $u = \varphi_2(x, y)$ beſtimmen, u. ſ. f.

Wenn man alſo einen Ausdruck von u als Function von x, y, z angeben kann, welcher der Gleichung (c) genügt, ſo muß dieſer Ausdruck, um denſelben Grad von Allgemeinheit zu haben, als die partielle Differenzialgleichung, welcher er Genüge leiſtet, eine willkürliche Function von zwei Veränderlichen enthalten, welche man ſo beſtimmen kann, daß ſich die Function u auf eine gegebene Function von zwei der Veränderlichen x, y, z reducirt, wenn man der dritten Veränderlichen einen gewiſſen particulären Werth beilegt.

Daſſelbe erhellet auch aus der Betrachtung der Niveauflächen (§. 129); denn geſetzt, man hätte im Raume eine erſte Niveaufläche:

$$z = \varphi(x, y) \qquad (\gamma)$$

conſtruirt, für welche die Function u einen gewiſſen particulären Werth, z. B. den Werth Null hat, für die Punkte (x, y, z), welche der krummen Fläche:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} = \frac{1}{q} \cdot \frac{du}{dy} \qquad (\gamma')$$

angehören, wo p, q die ſich aus der Gleichung (γ) ergebenden Werthe von $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ bezeichnen. Die Gleichungen (c) und (γ') beſtimmen folglich für die in Rede ſtehenden Punkte die Werthe der drei partiellen Ableitungen $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$, und folglich den Werth der Wurzelgröße:

$$R = \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}.$$

Wenn man nun in jedem Punkte der Fläche (γ) eine Normale errichtet und auf jeder Normale eine Länge nimmt, welche der ſehr kleinen Größe der erſten

Ordnung $\frac{\Delta u}{R}$ gleich iſt, ſo beſtimmt man bis auf Größen der zweiten Ordnung genau eine zweite Niveaufläche im Raume, für welche die Function u den Werth Δu hat (§. 129, 151 und 238). Durch die Fortſetzung deſſelben Verfahrens conſtruirt man die Function u, wenn man die Reihe ihrer Niveauflächen conſtruirt.

§. 578. Eine partielle Differenzialgleichung der zweiten Ordnung zwiſchen der Function z und den unabhängigen Veränderlichen x, y hat in dem allgemeinſten Falle die Form:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Wir wollen zunächſt annehmen, daß ſie ſich auf:

$$F(x, y, z, p, q, r) = 0$$

reducirt, ſo kann man ſich derſelben, wenn man ſie auf die Form:

$$q = f(x, y, z, p, r)$$

bringt, bedienen, um, wie vorhin (§. 575) die Function z zu conſtruiren, wenn man zuvor den $y = 0$ entſprechenden Werth $z = \varphi x$ willkürlich angenommen hat.

Aber wenn man dieſelbe Gleichung (d) in Beziehung auf r auflöſ't, und ſie verwandelt ſich in:

$$r = \frac{d^2 z}{dx^2} = f(x, y, z, p, q),$$

ſo conſtruirt man ſucceſſive die Werthe von z für $x = \Delta x$, $x = 2\Delta x$, $x = 3\Delta$, ꝛc., indem man die Functionen von y willkürlich annimmt, welche die Werthe von z und von $p = \frac{dz}{dx}$ für $x = 0$ ausdrücken. Denn es ſeien ψy und ωy dieſe beiden willkürlichen Functionen, ſo hat man für $x = 0$:

$$r = \frac{dp}{dx} = f(0, y, \psi y, \omega y, \psi' y) = \Phi y,$$

woraus bis auf Größen der zweiten Ordnung genau folgt:

$$\Delta p = \Phi y \cdot \Delta x, \quad p + \Delta p = \omega y + \Phi y \cdot \Delta x = \omega_1 y.$$

Ueberdies verwandeln ſich die Functionen z und q, deren Werthe ψy und $\psi' y$ für $x = 0$ ſind, für $x = \Delta x$ bei demſelben Grade von Annäherung in:

$$z + \Delta z = \psi y + p\Delta x = \psi y + \omega y \cdot \Delta x = \psi_1 y,$$

$$q + \Delta q = \psi'_1 y.$$

Nun iſt aber für $x = 2\Delta x$ der Werth von z:

$$\psi_1 y + \omega_1 y \cdot \Delta x = \psi_2 y,$$

und wenn man dieſelbe Rechnung ſucceſſive weiter fortſetzt, ſo beſtimmt man die Reihe der Werthe von z.

Man ſieht alſo, daß die Gleichung mit x, y, z, welche der Gleichung (d) mit der möglichſten Allgemeinheit genügt, eine oder zwei willkürliche Functionen enthalten kann, je nachdem dieſe willkürlichen Functionen durch Bedingungen in Beziehung auf die anfänglichen Werthe von x, oder durch Bedingungen in Beziehung auf die anfänglichen Werthe von y beſtimmt werden müſſen. Dieſes

analytiſche Factum, welches, als man es zum erſten Male an der Gleichung $r = q$ bemerkte (§. 551), faſt paradox erſchien, erklärt ſich alſo ſehr einfach durch die Natur der partiellen Differenzialgleichungen.

§. 579. Wir wollen nun annehmen, daß die Ableitung s in der gegebenen Differenzialgleichung von der Form:

$$F(x, y, z, p, q, r, s) = 0 \qquad (\sigma)$$

vorkommt. Wenn es darauf ankommt, die Function vermittelſt ihres anfänglichen Werthes $z = \varphi x$ für $y = 0$ zu conſtruiren, ſo gibt die Subſtitution dieſes anfänglichen Werthes die Differenzialgleichung der erſten Ordnung:

$$F\left(x, 0, \varphi x, \varphi' x, q, \varphi'' x, \frac{dq}{dx}\right) = 0, \qquad (\varepsilon)$$

woraus man durch Integration den anfänglichen Werth von q als Function von x ableiten kann. Der Ausdruck dieſes anfänglichen Werthes iſt von der willkürlichen Function φx abhängig, und enthält außerdem eine durch die Integration eingeführte willkürliche Conſtante, d. h., um die Function z zu conſtruiren, muß man außer der Function φx den Zahlenwerth von q für $y = 0$ und $x = 0$, oder für jeden andern particulären Werth von x annehmen. Es ſei $q = \Phi(x, C)$ der Werth von q als Function von x und der durch die Integration der Gleichung (ε) erhaltenen Conſtante C, ſo hat man für $y = \Delta y$ bis auf Größen der zweiten Ordnung genau:

$$z = \varphi x + \Phi(x, C) \cdot \Delta y = \varphi_1 x.$$

Für denſelben Werth von y hat man $q = \Phi_1(x, C_1)$, wo C_1 eine durch die Integration der Gleichung:

$$F\left(x, \Delta y, \varphi_1 x, q, \varphi_1'' x, \frac{dq}{dx}\right) = 0$$

eingeführte willkürliche Conſtante bezeichnet; u. ſ. f. Die Reihe der willkürlichen Conſtanten C, C_1, ꝛc. kann als eine willkürliche Function von y betrachtet werden, welche, wie die Function φx gegeben ſein muß, um die Function z, welche der Gleichung (σ) genügen muß, conſtruiren zu können.

Wenn man für $x = 0$ die anfänglichen Werthe $z = \psi y$, $p = \omega y$ gäbe, ſo hätte man zu gleicher Zeit:

$$r = \frac{dp}{dx} = f(0, y, \psi y, \omega y, \psi' y, \omega' y),$$

und man käme wieder auf den im vorhergehenden § betrachteten Fall.

Wenn endlich die Ableitung t ſowohl als r in der gegebenen Gleichung vorkäme, ſo wäre die Symmetrie wieder hergeſtellt, und die Art der Conſtruction wäre dieſelbe, man möchte die Gleichung in Beziehung auf r oder in Beziehung auf t auflöſen.

Dieſe Unterſuchung ließe ſich leicht auf Differenzialgleichungen von höhern Ordnungen mit einer beliebigen Anzahl unabhängiger Veränderlicher ausdehnen.

§. 580. Wenn die Zeit eine der unabhängigen Veränderlichen iſt, ſo iſt zu bemerken, daß die zur Conſtruction der partiellen Differenzialgleichung erforderlichen willkürlichen Functionen immer für die Anfangswerthe dieſer Veränderlichen gegeben ſein müſſen. So muß man z. B. bei der Conſtruction der Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}, \qquad (1)$$

wo u die Temperatur des der Abscisse x entsprechenden Querschnittes einer cylindrischen Stange am Ende der Zeit t bezeichnet (§. 562), annehmen, daß die Function $u = \varphi x$, welche das Gesetz der Temperaturen der Stange ausdrückt, für einen bestimmten Werth von t, z. B. für $t = 0$ gegeben ist. Abgesehen von der Bedeutung der Buchstaben u, x, t, könnte man ohne Zweifel dieselbe Differenzialgleichung construiren, wenn die Werthe ψt und ωt von u und von $\frac{du}{dx}$ für einen bestimmten Werth von x, z. B. für $x = 0$, gegeben wären; allein die Functionen ψt und ωt können keine gegebenen Größen der Aufgabe sein, und im Gegentheil ist die Reihe der Werthe von u nothwendig vermöge der Gleichung (1) in Verbindung mit der anfänglichen Bedingung $u = \varphi x$ bestimmt. Dieses ist eine Folgerung aus der Eigenschaft der Veränderlichen t, auf welche wir bereits mehrere Male aufmerksam gemacht haben, nämlich, daß t eine nothwendige unabhängige veränderliche Größe und keine blos willkürlich angenommene ist.

Die oben angegebenen Verfahrungsarten sind in der Ausübung fast unbrauchbar; allein es war auch blos unser Zweck, zu zeigen, was eine partielle Differenzialgleichung, sie mag ein analytisches Integral haben, oder nicht, an und für sich bedeutet.

§. 581. Alle diese Verfahrungsarten der arithmetischen Construction der partiellen Differenzialgleichungen setzen voraus, daß die Ableitungen endliche Werthe behalten. Es sei z. B. die Differenzialgleichung:

$$p(y - y_0) - qx = 0 \qquad (2)$$

gegeben, welche zu den Rotationsflächen um eine auf der Ebene der xy senkrechte Axe, welche die Axe der y in einem Punkte trifft, dessen Entfernung vom Anfangspunkte der y_0 bezeichnet wird; gehören, so kann man diese Gleichung auf die Form:

$$q = \frac{p(y - y_0)}{x}$$

bringen, und wenn man annimmt, daß der Werth:

$$z = \varphi x \qquad (3)$$

für $y = 0$ gegeben ist, so kann man das Constructionsverfahren im §. 575 anwenden, wofern x zwischen den Constructionsgrenzen nicht verschwindet, weil sonst der Werth von q unendlich werden würde. In der That haben wir im §. 256 bemerkt, daß die Meridiancurve einer Rotationsfläche um eine gegebene Axe im Allgemeinen nicht in ihrer ganzen Ausdehnung bestimmt ist, weil die Durchschnittscurve der krummen Fläche mit einer Ebene, wie die der xz, gegeben wird, und daß folglich die Rotationsfläche selbst nicht in ihrer ganzen Ausdehnung bestimmt ist. Wenn man durch die Punkte, wo die Curve (3) die Axe der z schneidet, parallele Ebenen zu der Ebene der xy legt, so ist, je nach der Richtung, welche man der Rotationsaxe gibt, nur der zwischen diesen Ebenen liegende Theil der Rotationsfläche durch das System der Gleichungen (2) und (3) bestimmt. Streng genommen, gibt sogar die Construction im §. 575 nicht dieses ganze Stück der Rotationsfläche, sondern nur das Stück, welches zwischen andern zu der Ebene der xy

parallelen Ebenen liegt, die den durch die Punkte, wo die Curve (3) die Axe der x trifft, gelegten Ebenen ſich beliebig nähern. Die Stetigkeitsunterbrechung, welche $x = 0$ entſpricht, zeigt an, daß die Conſtruction nicht auf Theile der Oberfläche erſtreckt werden kann, welche durch die Data der Conſtruction, nämlich durch die Gleichungen (2) und (3) nicht beſtimmt werden können.

Achtes Buch.

Rechnung mit endlichen Differenzen.

Erſtes Kapitel.

Rechnung mit endlichen Differenzen und Integrale oder Summen endlicher Differenzen für die entwickelten Functionen mit einer einzigen veränderlichen Größe.

§. 582. Gleich zu Anfang dieſes Werkes (Buch 1, Kap. 4) haben wir die endlichen Differenzen zwiſchen den Werthen betrachtet, welche eine veränderliche Größe ſucceſſive annimmt, und ſie durch das vor die Veränderliche geſetzte Zeichen Δ angedeutet, und haben mit der Reihe dieſer Differenzen, wie mit der urſprünglichen Reihe, operirt, indem wir die Differenzen der ſucceſſiven Glieder der erſten Differenzenreihe nahmen und ſo die Differenzen der zweiten Ordnung, welche durch Δ^2 bezeichnet wurden, bildeten, u. ſ. f. Allein es war dort blos unſer Zweck, die Theorie der unendlich kleinen Differenzen der verſchiedenen Ordnungen und die Prinzipien der Differenzialrechnung zu begründen, an welche ſich das Wichtigſte der Theorie der Functionen, was bis jetzt bekannt iſt, anſchließt. Es finden jedoch zwiſchen den endlichen Differenzen der verſchiedenen Ordnungen, und den Veränderlichen, wovon ſie abgeleitet ſind, Relationen ſtatt, welche ebenfalls entwickelt zu werden verdienen, wodurch ein neuer Zweig der Theorie der Functionen, nämlich die ſogenannte endliche Differenzenrechnung entſteht, mit deren kurzen Auseinanderſetzung wir das gegenwärtige Werk beſchließen wollen.

Wir wollen durch:

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_n \qquad (y_n)$$

eine Reihe von $n+1$ Werthen der Größe y bezeichnen, ſo haben wir (§. 43):

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0 + \ldots$$
$$\ldots + \Delta^n y_0. \qquad (a)$$

Dieſe Formel, worin der Werth von y_n vermittelſt des anfänglichen Werthes von y_0 und ſeiner Differenzen bis zu der n^{ten} Ordnung incl. ausgedrückt wird, kann nach dem im §. 43 Geſagten ſymboliſch ausgedrückt werden durch:

$$y_n = (1 + \Delta)^n y_0, \qquad (a)$$

und umgekehrt kann die Differenz $\Delta^n y_0$ durch die Glieder der Reihe (y_n) ausgedrückt werden; denn durch ſucceſſive Subſtitutionen erhält man die Gleichungen:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\ \Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,$$
$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0, \text{ ꝛc.},$$

welche ſämmtlich in der allgemeinen Formel:

$$\Delta^n y_0 = y_n - \frac{n}{1} y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} y_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} y_{n-3} + \ldots\ldots \pm y_0 \qquad (b)$$

enthalten ſind, auf die man das gewöhnliche inductoriſche Beweisverfahren leicht anwenden kann. Denn geſetzt, die Formel (b) finde für den Index n ſtatt, ſo hat man:

$$\Delta^{n+1} y_0 = \Delta^n y_1 - \Delta^n y_0 = y_{n+1} - \frac{n}{1} y_n + \frac{n(n-1)}{1.2} y_{n-1}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} y_{n-2} + \ldots - y_n + \frac{n}{1} y_{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2} y_{n-2} + \ldots\ldots$$
$$= y_{n+1} - \frac{n+1}{1} y_n + \frac{(n+1)n}{1.2} y_{n-1} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} y_{n-2} + \text{ꝛc.},$$

ſo daß die Formel noch für den Index $n+1$ ſtattfindet. Uebrigens läßt ſie ſich ſymboliſch durch:

$$\Delta^n y_0 = (y - 1)^n \qquad (\beta)$$

ausdrücken, wofern man nach der Entwickelung die Exponenten von y in Indices verwandelt und in dem letzten Gliede der Entwickelung y_0 ſtatt der Einheit ſetzt.

§. 583. Wir wollen nun y als eine Function einer andern Veränderlichen x betrachten, ſo daß, wenn die Veränderliche x ſucceſſive die Werthe:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n \qquad (x_n)$$

durchläuft, die Function y ſucceſſive die correſpondirenden Werthe:

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_n \qquad (y_n)$$

annimmt, und alsdann beſteht der Zweck der Berechnung der Differenzen der Function $y = fx$ darin, dieſe Differenzen als Functionen der Differenzen der Veränderlichen x auszudrücken, ſobald die Form der Function f angegeben iſt.

Die einfachſte Vorausſetzung, welche man machen kann, beſteht darin, daß die Veränderliche x nach gleichen Incrementen zunimmt, ſo daß ſich die Reihen (x_n) und (y_n) reſp. in:

$$x_0, x_0 + \Delta x, x_0 + 2\Delta x, x_0 + 3\Delta x, \ldots\ldots x_0 + n\Delta x;$$
$$fx, f(x_0 + \Delta x), f(x_0 + 2\Delta x), f(x_0 + 3\Delta x), \ldots. f(x_0 + n\Delta x)$$

verwandeln.

In dieſer Vorausſetzung hindert nichts, $\Delta x = 1$ zu ſetzen; denn wäre $\Delta x = h$, wo h eine von der Einheit verſchiedene Conſtante iſt, ſo brauchte man nur $x = x_0 + ih$ zu ſetzen, um y in eine Function von einer neuen Veränderlichen i zu verwandeln, welche nach Incrementen zunimmt, die der Einheit gleich ſind.

Wenn die Veränderliche x nicht nach gleichen Incrementen zunähme, so ire die Berechnung der Differenzen der Function y so lange eine unbenmte Aufgabe, als das Geſetz der auf einander folgenden Werthe von x ht angegeben iſt, und folglich müßte jedes Glied x_i der Reihe (x_n) einen timmten Werth annehmen, ſobald der Zahlenwerth des Index i gegeben, r $x_i = fi$ wäre. Aber alsdann wäre y auch eine Function von i, von lcher man die Differenzen nehmen könnte, wenn angenommen würde, daß Veränderliche, wovon ſie abhängt, die Reihe der natürlichen Zahlen durchft, und folglich nach conſtanten der Einheit gleichen Incrementen wächſt.

Dieſe Veränderliche i, welche den Index, oder die Ordnungszahl eines iedes in der Reihe, wozu daſſelbe gehört, bezeichnet, iſt folglich die nothndig unabhängig veränderliche Größe, von welcher man ſich alle übrigen ränderlichen als abhängig denken kann, und welche hier vermöge einer in loſophiſcher Beziehung ſehr merkwürdigen Analogie dieſelbe Rolle ſpielt, wie Veränderliche t, welche die Zeit bezeichnet, in der Theorie der Fluxionen.

Im Allgemeinen kann eine Reihe von Gliedern, welche ſich nach einem timmten Geſetze ändern, von einem willkürlich gewählten Anfangsgliede aus r- und rückwärts beliebig weit fortgeſetzt werden, und man muß ſich daher Allgemeinen vorſtellen, daß die Veränderliche i ſucceſſive die Reihe der nzen Zahlen, ſowohl der poſitiven, als negativen durchläuft, wo übrigens i den Anwendungen auf beſondere Unterſuchungen auch ein Theil dieſer Reihe gfallen kann.

§. 584. Die Veränderliche i, welche einen Index oder eine Ordnungsl bezeichnet, iſt nothwendig discontinuirlich; aber die Veränderlichen x, y nen ſtetige Größen ausdrücken, und obgleich ſich die Differenzenrechnung r auf Reihen von Werthen bezieht, welche durch endliche Intervalle von nander getrennt ſind; ſo müſſen doch die Reſultate der Rechnung verſchieden rpretirt werden, je nachdem ſie auf weſentlich continuirliche oder discontirliche Größen angewandt werden.

Denn betrachten wir die beiden Reihen:

$$\ldots y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots y_i, \ldots \quad (\varepsilon)$$

$$\ldots \Delta y_{-3}, \Delta y_{-2}, \Delta y_{-1}, \Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \ldots \Delta y_i, \ldots \quad (\gamma)$$

b nehmen der Einfachheit wegen an, daß das allgemeine Glied jeder ſelben unmittelbar als eine Function des Index i gegeben iſt, ſo iſt klar, ß man zu jedem Gliede der Reihe (ε) eine willkürliche Conſtante C addiren nte, ohne daß die aus der erſten abgeleitete Reihe (γ) dadurch verändert rde. Umgekehrt, wenn das allgemeine Glied Δy_i oder die Reihe (γ) geen iſt, und man kann durch irgend ein Mittel eine Function y_i finden, e Differenz der erſten Ordnung Δy_i iſt; ſo muß man zu y_i eine willſche Conſtante C addiren, um die Reihe (ε) in ihrer möglichſt größten gemeinheit zu erhalten. Die Reihe (ε) wird alſo vermittelſt der Reihe) nur dann vollſtändig beſtimmt, wenn der Zahlenwerth eines Gliedes der len Reihe, z. B. der Zahlenwerth des Gliedes y_0 gegeben iſt, und hierin gt ſich wieder eine vollkommene Aehnlichkeit zwiſchen den Differenzen und fferenzialen.

Wir wollen nun annehmen, daß es ſich nicht mehr um die bloße Conction von Reihen handle, ſondern daß man, indem die Veränderlichen x, y ge Größen bezeichnen, für alle möglichen Werthe von y und x

$$y = fx, \Delta y = f(x + \Delta x) - fx = f(x, x + \Delta x) \quad (f)$$

e; ſo wird die Function f nicht blos nicht geändert, wenn man zu fx eine nſtante C, ſondern auch, wenn man eine periodiſche Function:

$$\omega(x, \Delta x)$$

zu fx addirt, welche jedesmal dieſelben Werthe wieder annimmt, wenn x um Δx zunimmt, und welche überdies eine beliebige Form haben kann. Wenn alſo umgekehrt die Function f gegeben iſt, und man kann durch irgend ein Mittel eine Function f finden, welche f zur Differenz hat; ſo bleibt die Function y nicht blos ihrem Zahlenwerthe, ſondern auch ihrer Form nach noch unbeſtimmt.

Um vermittelſt der Gleichung (f) eine Curve zu conſtruiren, deren Ordinate y iſt, muß man ſich vorſtellen, daß man vorläufig ganz willkürlich das Curvenſtück MN (Fig. 103), deſſen Endpunkte den Abſciſſen $OP = x$, $OQ = x_0 + \Delta x$ entſprechen, beſchrieben habe, und daß die Differenz NN' der Ordinaten der beiden Endpunkte der Werth von Δy iſt, welchen die Gleichung (f) für $x = x_0$ gibt. Alsdann iſt die Curve in ihrem ganzen Verlaufe beſtimmt; denn es ſei $Op = x$ irgend eine zwiſchen x_0 und $x_0 + \Delta x$ liegende Abſciſſe; ſo nehme man $pq = \Delta x$, und alsdann iſt die Differenz mn der Ordinaten pn, qu vermöge der Gleichung (f) gegeben. Folglich beſtimmt der Zug des Bogens MN in Verbindung mit der Gleichung (f) auch den Zug des Bogens NN_1, deſſen Endpunkte die Ordinaten $x_0 + \Delta x$, $x_0 + 2\Delta x$ haben, und da dieſelbe Conſtruction, ſowohl in dem Sinne der poſitiven, als in dem der negativen x, beliebig oft wiederholt werden kann; ſo folgt, daß der Zug der ganzen Curve beſtimmt iſt, wobei wohl zu bemerken iſt, daß derſelbe Stetigkeitsunterbrechungen einer beliebigen Ordnung darbieten kann.

§. 585. Die Operation, vermöge welcher man aus dem Gliede Δy_i das Glied y_i, oder die Reihe (c) aus der Reihe (γ) ableiten kann, iſt eine Summation im eigentlichen Sinne des Wortes; denn es iſt identiſch:

$$y_i = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots + \Delta y_{i-1},$$

ſo daß man durch eine bloße algebraiſche Addition die Reihe (c) aus der Reihe (γ) ableiten kann, wofern man übrigens das Anfangsglied y_0 kennt, welches die Stelle der eben erwähnten Conſtanten oder willkürlichen Function vertritt, je nachdem y eine discontinuirliche oder continuirliche Veränderliche iſt.

Sowie man das Zeichen $\int$ zur Andeutung einer Summe von Differenzialen oder eines eigentlichen Integrales anwendet, ebenſo bedient man ſich des Zeichens Σ, um eine eigentliche Summe oder ein Integral für endliche Differenzen anzuzeigen. Die Zeichen Σ und Δ ſind einander entgegengeſetzt, und heben ſich gegenſeitig auf, wie die Zeichen $\int, d$. Es folgt z. B. aus der vorhergehenden Formel:

$$\Sigma y_i = \Sigma y_0 + y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{i-1}, \qquad (d)$$

und das Glied Σy_0 bezeichnet alsdann die durch die Integration eingeführte willkürliche Conſtante oder Function.

Wenn man eine ähnliche Bezeichnung wie die, welche man gegenwärtig für die gewöhnlichen beſtimmten Integrale anwendet, gebraucht, ſo iſt:

$$\Sigma y_i - \Sigma y_0 = \Sigma_0^i y_i,$$

und folglich:

$$\Sigma_0^i y_i = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{i-1}. \qquad (e)$$

Wir haben das Zeichen Σ im Verlaufe dieſes Werkes ſchon als Summenzeichen angewandt, und zuweilen bedient man ſich der Bezeichnung:

$$\sum_{i_0}^{i_1} y_i,$$

um die Summe der Werthe der Function y_i für alle Werthe des Index i von

$= i_0$ bis $i = i_1$ incl. kurz anzudeuten. Die Formel (e) zeigt, daß das $i$te Glied y_i von dieſer Summe ausgeſchloſſen bleiben muß, wenn das Zeichen Σ ein Integral bei endlichen Differenzen andeutet, und in dem entgegengeſetzten Falle wird jede Zweideutigkeit beſeitigt, wenn man S für Σ ſetzt, und ſchreibt:

$$S_{i_0}^{i_1} y_i.$$

Die durch das Zeichen Σ angedeutete Operation kann ebenſo, wie die durch das Zeichen Δ angezeigte umgekehrte Operation beliebig oft wiederholt werden, und dieſe Wiederholung wird ebenfalls durch einen oben zur Rechten des Zeichens Σ geſetzten Index angedeutet. Aus der Formel (d) folgt alſo:

$$\Sigma^2 y_i = \Sigma^3 y_0 + \Sigma y_0 + \Sigma y_1 + \Sigma y_2 + \ldots + \Sigma y_{i-1}$$

$$\Sigma^3 y_i = \Sigma^3 y_0 + \Sigma^2 y_0 + \Sigma^2 y_1 + \Sigma^2 y_2 + \ldots + \Sigma^2 y_{i-1} \text{ ꝛc.}$$

Da $\Sigma y_1, \Sigma y_2, \ldots \Sigma y_{i-1}$ durch die Formel (d) als Functionen von Σy_0 beſtimmt werden, ſo ſieht man, daß der Ausdruck $\Sigma^2 y_i$ zwei willkürliche Conſtanten oder Functionen, nämlich $\Sigma^2 y_0$ und Σy_0 enthält. Der Werth von $\Sigma^3 y_i$ iſt von dieſen beiden willkürlichen Größen und außerdem von einer dritten Größe derſelben Art $\Sigma^3 y_0$ abhängig, und im Allgemeinen iſt das unbeſtimmte Integral $\Sigma^n y_i$ je nach der Beſchaffenheit der Größe y von n Conſtanten oder willkürlichen Functionen abhängig.

§. 586. Wenn u, v, w, ... beliebige Functionen derſelben veränderlichen Größe bezeichnen, und a eine Conſtante iſt, ſo hat man offenbar:

$$\Delta(u + v + w + \ldots.) = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \ldots.$$

$$\Sigma(u + v + w + \ldots.) = \Sigma u + \Sigma v + \Sigma w + \ldots.$$

$$\Delta \cdot au = a \Delta u, \quad \Sigma \cdot au = a \Sigma u.$$

Das Verfahren der theilweiſen Integration (§. 55) iſt auf die Integrale wie auf die gewöhnlichen Integrale anwendbar. Wenn man

$$\Sigma \cdot uv = v \Sigma u + w$$

iſt, wo w eine zu beſtimmende unbekannte Function bezeichnet, ſo erhält man, wenn man von beiden Theilen dieſer Gleichung die Differenzen nimmt:

$$uv = (v + \Delta v) \Sigma(u + \Delta u) - v \Sigma u + \Delta w,$$

folglich:

$$\Delta w = - \Delta v \Sigma(u + \Delta u),$$

und mithin:

$$\Sigma \cdot uv = v \Sigma u - \Sigma[\Delta v \Sigma(u + \Delta u)],$$

oder wenn man u_1 ſtatt $u + \Delta u$ ſetzt:

$$\Sigma \cdot uv = v \Sigma u - \Sigma(\Delta v \Sigma u_1).$$

Durch Wiederholung derſelben Rechnung ergibt ſich:

$$\Sigma \cdot uv = v \Sigma u - \Delta v \Sigma^2 u_1 + \Sigma(\Delta^2 v \Sigma^2 u_2)$$

$$\Sigma \cdot uv = v \Sigma u - \Delta v \Sigma^2 u_1 + \Delta^2 v \Sigma^3 u_2 - \Sigma(\Delta^3 v \Sigma^3 u_3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma \cdot uv = v \Sigma u - \Delta v \Sigma^2 u_1 + \Delta^2 v \Sigma^3 u_2 - \Delta^3 v \Sigma^4 u_3 + \text{ ꝛc.}$$

Dieſe letzte Gleichung kann man auf folgende Form bringen:

$$\Sigma \cdot uv = v \Sigma u - \Delta v (\Sigma^2 u + \Sigma u)$$

$$\Delta^2 v (\Sigma^3 u + 2\Sigma^2 u + \Sigma u) - \Delta^3 v (\Sigma^4 u + 3\Sigma^3 u + 3\Sigma^2 u + \Sigma u) + \text{ ꝛc.},$$

wo ſich die Entwickelung ſchließt, wenn die Differenzen der Function v nach einer hinreichenden Anzahl von Differenzirungen Conſtanten werden.

§. 587. Wir wollen annehmen, daß $y = fx$ eine ganze und rationale Function von x ſei, ſo beſteht dieſelbe aus einer Summe von Gliedern von der Form Ax^m, wo A eine conſtante, und m eine ganze poſitive Zahl bezeichnet, ſo daß die Differenzirung der ganzen rationalen Functionen auf die der Function $y = x^m$ zurückkommt.

Wir wollen daher:

$$y_0 = x^m,\ y_1 = (x + \Delta x)^m,\ \text{ꝛc.}$$

ſetzen, ſo haben wir nach der binomiſchen Formel, wenn wir nach den abnehmenden Potenzen von x ordnen:

$$\Delta y_0 = \Delta \cdot x^m = mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}\Delta x^2 + \ldots \quad (g)$$

$$\Delta y_1 = m(x + \Delta x)^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2}(x + \Delta x)^{m-2}\Delta x^2 + \ldots,$$

und folglich, wenn wieder auf dieſelbe Weiſe geordnet wird:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta^2 \cdot x^m = m(m-1)\,x^{m-2}\Delta x^2 + \ldots.$$

Ebenſo fände man:

$$\Delta^3 \cdot x^m = m(m-1)(m-2)\,x^{m-3}\Delta x^3 + \ldots.$$

und allgemein:

$$\Delta^i \cdot x^m = m(m-1)(m-2)\ldots(m-i+1)\,x^{m-i}\Delta x^i + \ldots,$$

was übrigens auch daraus folgt, daß ſich das Verhältniß $\frac{\Delta^i \cdot x^m}{\Delta x^i}$ an der Grenze $\Delta x = 0$ auf $\frac{d^i \cdot x^m}{dx^i}$ reduciren muß.

Man hat alſo:

$$\Delta^m \cdot x^m = m(m-1)(m-2)\ldots : 3.2.1.\Delta x^m, \quad (h)$$

und da dieſe Differenz conſtant iſt, ſo verſchwinden die Differenzen der höhern Ordnungen.

Andererſeits gibt die Formel (b):

$$\Delta^n \cdot x^m = [x + n\Delta x]^m - \frac{n}{1}[x + (n-1)\Delta x]^m + \frac{n(n-1)}{1.2}[x + (n-2)\Delta x]^m - \ldots \pm x^m,$$

und wenn man den zweiten Theil nach den Potenzen von Δx entwickelt, und der Kürze wegen

$$n^i - \frac{n}{1}(n-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^i + \ldots = N,$$

ſetzt, ſo kommt:

$$\Delta^n \cdot x^m = N_0 x^m + \frac{m}{1} N_1 x^{m-1} \Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2} N_2 x^{m-2} \Delta x^2 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + N_m \Delta x^m.$$

lan hat aber eben gesehen, daß Δx^n die niedrigste Potenz von Δx in der ntwickelung von $\Delta^n \cdot x^m$ ist, und folglich ist die Zahl N^i für alle niedrigern erthe von i als n gleich Null.

Nach der Formel (h) hat man auch:

$$\Delta^n \cdot x^n = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1.\Delta x^n,$$

ıd folglich:

$$N_n = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1.$$

§. 588. Es sei:

$$y = x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots\ldots[x-(m-1)\Delta x],$$

› kommt:

$$\Delta y = x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots\ldots[x-(m-2)\Delta x]\cdot m\Delta x,$$

oraus sich leicht ergibt:

$$\Delta^2 y = x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots[x-(m-3)\Delta x]\cdot m(m-1)\Delta x^2,$$

ıd allgemeiner:

$$\Delta^i y = x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots\ldots[x-(m-i-1)\Delta x]\cdot m(m-1)\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots(m-i+1)\Delta x^i.$$

:s findet also zwischen der Formel, welche das Differenzial der Potenz x^m ıd der, welche die Differenz der aus m Factoren bestehenden Factorielle §. 417) gibt, wenn die Differenz der auf einander folgenden Factoren $= \Delta x$, ıd der erste Factor $= x$ ist, eine merkwürdige Analogie statt.

Wenn man

$$y = x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots\ldots[x+(m-1)\Delta x]$$

ßte, so fände man ebenso:

$$\Delta y = (x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots\ldots[x+(m-1)\Delta x]\cdot m\Delta x, \qquad (i)$$

ıd folglich:

$$\Delta^i y = (x+i\Delta x)[x+(i+1)\Delta x]\ldots[x+(m-1)\Delta x]\cdot m(m-1)\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots(m-i+1)\Delta x^i.$$

Es sei endlich:

$$y = \frac{1}{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots\ldots[x+(m-1)\Delta x]},$$

hat man:

$$\Delta y = -\frac{m\Delta x}{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots\ldots(x+m\Delta x)}, \qquad (j)$$

$$\Delta^i y = \pm\frac{m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+i-1)\cdot\Delta x^i}{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots\ldots[x+(m+i-1)\Delta x]},$$

› das Zeichen + oder − genommen werden muß, je nachdem i eine gerade er ungerade Zahl ist.

§. 589. Auch von den Exponential- und Kreisfunctionen lassen sich die :cessiven Differenzen leicht bilden; denn man hat unmittelbar:

$$\Delta a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1),\quad \Delta^2 a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^2, \ldots$$

$$\ldots \Delta^i a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^i, \tag{k}$$

und nach den ersten Formeln der Trigonometrie ist:

$$\left.\begin{aligned}\Delta \sin. x &= 2 \sin. \tfrac{1}{2}\Delta x \cdot \cos.(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)\\ \Delta \cos. x &= -2 \sin. \tfrac{1}{2}\Delta x \cdot \sin.(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)\end{aligned}\right\}. \tag{l}$$

Hieraus folgt:

$$\Delta^2 \sin. x = -4 \sin.^2 \tfrac{1}{2}\Delta x \cdot \sin.(x + \Delta x),$$

$$\Delta^2 \cos. x = -4 \sin.^2 \tfrac{1}{2}\Delta x \cdot \cos.(x + \Delta x),$$

und allgemein:

$$\Delta^{2i} \sin. x = \pm 2^{2i} \sin.^{2i} \tfrac{1}{2}\Delta x \cdot \sin.(x + i\Delta x),$$

$$\Delta^{2i} \cos. x = \pm 2^{2i} \sin.^{2i} \tfrac{1}{2}\Delta x \cdot \cos.(x + i\Delta x),$$

$$\Delta^{2i+1} \sin. x = \pm 2^{2i+1} \sin.^{2i+1} \frac{1}{2}\Delta x \cdot \cos.\left(x + \frac{2i+1}{2}\Delta x\right),$$

$$\Delta^{2i+1} \cos. x = \pm 2^{2i+1} \sin.^{2i+1} \frac{1}{2}\Delta x \cdot \sin.\left(x + \frac{2i+1}{2}\Delta x\right),$$

wo man das obere oder untere Zeichen nehmen muß, je nachdem i eine gerade oder ungerade Zahl ist.

§. 590. Die Integrale mit endlichen Differenzen der geringen Anzahl von Functionen, bei welchen sich die durch das Zeichen Σ angedeutete Operation verrichten läßt, werden durch die Umkehrung der vorhin abgeleiteten Formeln der Differenzirung erhalten. Betrachten wir zunächst die Function x^m, so gibt die Formel (g), nachdem man $m+1$ für m gesetzt hat:

$$\Delta \cdot x^{m+1} = (m+1)x^m \Delta x + \frac{(m+1)m}{1.2} x^{m-1} \Delta x^2$$

$$+ \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} x^{m-2} \Delta x^3 + \text{ꝛc.},$$

woraus folgt:

$$x^{m+1} = (m+1)\Sigma \cdot x^m \Delta x + \frac{(m+1)m}{1.2} \Sigma \cdot x^{m-1} \Delta x^2$$

$$+ \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} \Sigma \cdot x^{m-2} \Delta x^3 + \text{ꝛc.},$$

und endlich:

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \left\{\frac{m\Delta x}{1.2} \cdot \Sigma x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2.3} \Delta x^2 \cdot \Sigma x^{m-2} + \text{ꝛc.}\right\}.$$

Wenn man in dieser Formel successive $m = 0, = 1, = 2, = 3,$ ꝛc. setzt, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma x^0 &= \frac{x}{\Delta x}\\
\Sigma x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{\Delta x} - \frac{1}{2}x\\
\Sigma x^2 &= \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3}x\Delta x\\
\Sigma x^3 &= \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2.2}x^2\Delta x\\
\Sigma x^4 &= \frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3\Delta x - \frac{1}{5.6}x\Delta x^3\\
\Sigma x^5 &= \frac{1}{6}\cdot\frac{x^6}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{2.6}x^4\Delta x - \frac{1}{2.6}x^2\Delta x^3
\end{aligned}\right\} \quad (m)$$

ꝛc.

es dieses Integrale muß überdies nach dem im §. 584 Gesagten durch Constante oder durch eine willkürliche periodische Function ergänzt werden, durch diese Formeln erhält man das Integral jeder rationalen und ganzen braischen Function. Das Gesetz, welches die successiven Glieder der Entlung von Σx^m befolgen, erhellet aus dem vorhergehenden Schema nicht t, und wir werden daher in dem folgenden Kapitel allgemeinere Betrachen über diesen Punkt anstellen.

Aus den Formeln (i), (j), (k), (l) ergibt sich:

$$\Sigma\left\{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots.[x+(m-1)\Delta x]\right\}$$

$$\frac{1}{m+1)\Delta x}\left\{(x-\Delta x)x(x+\Delta x)\ldots.[x+(m-1)\Delta x]\right\}+\omega, \quad (n)$$

$$\frac{1}{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots.[x+(m-1)\Delta x]} =$$

$$\frac{1}{(m-1)\Delta x\cdot x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots.[x+(m-2)\Delta x]}+\omega, \quad (p)$$

$$\Sigma\cdot a^x = \frac{a^x}{a^{\Delta x}-1}+\omega \quad (q)$$

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma\sin.x &= -\frac{\cos.(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin.\frac{1}{2}\Delta x}+\omega\\
\Sigma\cos.x &= \frac{\sin.(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin.\frac{1}{2}\Delta x}+\omega
\end{aligned}\right\}, \quad (r)$$

ω die Constante oder die willkürliche periodische Function bezeichnet.

§. 591. Die Formeln im vorhergehenden § lassen sich ganz natürlich die Summation der Reihen anwenden. Nach der im §. 585 angegebenen ichnung wollen wir durch $S^i_{i_0}$ die Summe der Glieder der Reihe, deren meines Glied y_i ist, von dem Gliede y_{i_0} bis zu dem Gliede y_i incl. beien, so daß

$$S^i_{i_0}\, y_i = \Sigma^i_{i_0}\, y_i + y_i, \text{ oder } S^i_{i_0}\, y_i = \Sigma^{i+1}_{i_0}\, y_i$$

iſt; ſo geben die Formeln (m) zunächſt:

$$S^i_1 \cdot x = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + i = \frac{1}{2} i^2 + \frac{1}{2} i$$

$$S^i_1 \cdot x^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + i^2 = \frac{1}{3} i^3 + \frac{1}{2} i^2 + \frac{1}{2.3} i$$

$$S^i_1 \cdot x^3 = 1 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + i^3 = \frac{1}{4} i^4 + \frac{1}{2} i^3 + \frac{1}{2.2} i^2$$

ꝛc.

Bekanntlich fangen die Reihen der figurirten Zahlen, wie die vorhergehenden, mit der Einheit an, und haben die Ausdrücke:

$$\frac{i}{1}, \frac{i(i+1)}{1.2}, \frac{i(i+1)(i+2)}{1.2.3}, \text{ ꝛc.}$$

zum allgemeinen Gliede; man kann alſo die Formel (n) auf die Summation dieſer Reihen anwenden, und man erhält:

$$1 + 2 + 3 + 4 \ldots + i = \frac{i(i+1)}{1.2}$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{i(i+1)}{1.2} = \frac{i(i+1)(i+2)}{1.2.3}$$

$$1 + 4 + 10 + 20 + \ldots + \frac{i(i+1)(i+2)}{1.2.3} = \frac{i(i+1)(i+2)(i+3)}{1.2.3.4}$$

ꝛc.,

ſo daß die Summe einer beliebigen dieſer Reihen das allgemeine Glied der Reihe von einer unmittelbar höhern Ordnung iſt, eine ſehr bekannte Relation, welche zur Definition der figurirten Zahlen genommen werden kann.

Die reciproken Reihen, deren allgemeine Glieder durch:

$$\frac{1}{i}, \frac{1.2}{i(i+1)}, \frac{1.2.3}{i(i+1)(1+2)}, \text{ ꝛc.}$$

ausgedrückt werden, laſſen ſich vermittelſt der Formel (p) ſummiren, mit Ausnahme der erſten, für welche dieſe Formel wegen eines im Nenner verſchwindenden Factors unbrauchbar wird. Für die übrigen findet man:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1.2}{i(i+1)} = \frac{2}{1} - \frac{2}{i+1}$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1.2.3}{i(i+1)(i+2)} = \frac{3}{2} - \frac{3}{(i+1)(i+2)}$$

ꝛc.

Wenn man $i = \infty$ ſetzt, ſo erhält man $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, ꝛc. für die Summen der ins Unendliche fortlaufenden Reihen.

Aus der Formel (q) ergibt ſich die bekannte Formel:

$$a + a^2 + a^3 + \ldots + a^i = \frac{a^{i+1} - a}{a - 1}$$

für die Summation der geometriſchen Progreſſionen.

Wenn wir in den Formeln (r) $x = p + iq$, $\Delta x = q$ ſetzen, ſo geben ſie:

$$\Sigma_{\circ}^{i} \sin.(p+iq) = -\frac{\cos.(p+iq-\frac{1}{2}q) - \cos.(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin.\frac{1}{2}q}$$

$$\Sigma_{\circ}^{i} \cos.(p+iq) = \frac{\sin.(p+iq-\frac{1}{2}q) - \sin.(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin.\frac{1}{2}q},$$

und folglich nach §. 406 und §. 423:

$$S_{\circ}^{i} \sin.(p+iq) = -\frac{\cos.(p+iq+\frac{1}{2}q) - \cos.(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin.\frac{1}{2}q}$$

$$S_{\circ}^{i} \cos.(p+iq) = \frac{\sin.(p+iq+\frac{1}{2}q) - \sin.(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin.\frac{1}{2}q}.$$

Zweites Kapitel.

Euler's Formel zur Bestimmung der Summen durch gewöhnliche Integrale und der Integrale durch die Summen. — Anwendung auf die Stirling'sche Formel. — Ueber die Interpolation.

I. Euler's Formel zur Bestimmung der Summen durch gewöhnliche Integrale und der Integrale durch die Summen.

§. 592. Die Taylor'sche Formel gibt:

$$\Delta fx = \frac{\Delta x}{1} \cdot f'x + \frac{\Delta x^2}{1.2} \cdot f''x + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \cdot f'''x + \text{ꝛc.},$$

folglich:

$$fx = \frac{\Delta x}{1} \cdot \Sigma f'x + \frac{\Delta x^2}{1.2} \cdot \Sigma f''x + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \cdot \Sigma f'''x + \text{ꝛc.}$$

und, wenn man $f'x = fx$ setzt:

$$\int fx\,dx = \frac{\Delta x}{1} \cdot \Sigma fx + \frac{\Delta x^2}{1.2} \cdot \Sigma f'x + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \cdot \Sigma f''x + \text{ꝛc.},$$

oder vielmehr:

$$\Sigma fx = \frac{1}{\Delta x}\int fx\,dx - \frac{\Delta x}{1.2} \cdot \Sigma f'x - \frac{\Delta x^2}{1.2.3} \cdot \Sigma f''x - \text{ꝛc.} \qquad (a)$$

Aber aus demselben Grunde ist:

$$\Sigma f'x = \frac{1}{\Delta x} \cdot fx - \frac{\Delta x}{1.2} \cdot \Sigma f''x - \frac{\Delta x^2}{1.2.3} \cdot \Sigma f'''x - \text{ꝛc.} \qquad (a')$$

$$\Sigma f''x = \frac{1}{\Delta x} f'x - \frac{\Delta x}{1.2} \cdot \Sigma f'''x - \frac{\Delta x^2}{1.2.3} \cdot \Sigma f^{iv}x - \text{ꝛc.} \qquad (a'')$$

ꝛc.,

ſo daß man aus der Reihe (a) die Integrale $\Sigma f'x$, $\Sigma f''x$, ꝛc. eliminiren kann. Die Elimination wird auf die gewöhnliche Weiſe verrichtet, indem man die Gleichungen (a), (a'), (a''), ꝛc., nachdem alle Glieder von (a') durch den Factor $A_0 \Delta x$, alle Glieder von (a'') durch den Factor $A_1 \Delta x^2$ u. ſ. f., multiplicirt ſind, zuſammenaddirt und dann die Multiplicatoren der zu eliminirenden Integrale gleich Null ſetzt. Dieſe Rechnung gibt:

$$\Sigma fx = \frac{1}{\Delta x}\int fx\,dx + A_0 fx + A_1 \Delta x f'x + A_2 \Delta x^2 f''x + A_3 \Delta x^3 f'''x + \text{ꝛc.}, \qquad (1)$$

wo die Zahlencoefficienten A_i unabhängig von der Form der Function f ſucceſſive durch das Syſtem der folgenden Gleichungen beſtimmt werden:

$$\left.\begin{aligned} &A_0 + \frac{1}{1.2} = 0,\quad A_1 + \frac{A_0}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} = 0 \\ &A_2 + \frac{A_1}{1.2} + \frac{A_0}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} = 0 \\ &A_3 + \frac{A_2}{1.2} + \frac{A_1}{1.2.3} + \frac{A_0}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} = 0, \text{ ꝛc.} \end{aligned}\right\}. \qquad (A)$$

Wenn man $fx = e^x$ ſetzt, ſo erhält man:

$$\Sigma e^x = \frac{e^x}{e^{\Delta x} - 1},\quad \int e^x dx = e^x,\quad f^{(n)}x = e^x,$$

und die Gleichung (1) gibt nach der Hinweglaſſung des gemeinſchaftlichen Factors e^x:

$$\frac{1}{e^{\Delta x} - 1} = \frac{1}{\Delta x} + A_0 + A_1 \Delta x + A_2 \Delta x^2 + A_3 \Delta x^3 + \text{ꝛc.}$$

woraus folgt, daß der Coefficient A_i derjenige iſt, womit α_i in der Entwickelung der Function:

$$\frac{1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha} \qquad (a)$$

nach den ganzen und poſitiven Potenzen von α multiplicirt iſt.

Wenn man für A_0 ſeinen Werth $-\frac{1}{2}$ wieder ſetzt; ſo erhält man:

$$A_1\alpha + A_2\alpha^2 + A_3\alpha^3 + \text{ꝛc.} = \frac{1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{e^\alpha + 1}{2(e^\alpha - 1)} - \frac{1}{\alpha} = \frac{e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}}}{2\left(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}\right)} \cdot - \frac{1}{\alpha}.$$

Nun iſt aber der letzte Theil dieſer Gleichung offenbar eine impaare Function von α, und folglich müſſen in der Reihenentwickelung dieſer Function die Coefficienten der geraden Potenzen von α verſchwinden. Mithin iſt der Coefficient A_i für alle von 0 verſchiedenen geraden Werthe des Index i Null.

Wenn man die in Rede ſtehende Entwickelung verrichtete, ſo erhielte man den Ausdruck von A_i unmittelbar als Function des Index i; allein wir wollen uns bei dieſer zwar eleganten, aber complicirten Rechnung nicht auf-

lten, da ſich die Coefficienten A_i vermittelſt der Gleichungen (A), deren eſetz einleuchtend iſt, ſehr bequem ſucceſſive berechnen laſſen.

Da die Coefficienten A_{2i+1} abwechſelnd poſitiv und negativ ſind, ſo wollen r die Gleichung (1) auf die Form:

$$\Sigma fx = C + \frac{1}{\Delta x}\int fx\,dx - \frac{1}{2}fx + A_1\Delta x \cdot f'x - A_3\Delta x^3 \cdot f'''x + A_5\Delta x^5 \cdot f^v x - \text{ꝛc.} \qquad (2)$$

ingen, wo C die willkürliche Conſtante bezeichnet, welche die unbeſtimmten ıtegrationszeichen Σ und $\int$ mit ſich führen, und alsdann bezeichnen die Buchben A_{2i+1} lauter poſitive Zahlen.

§. 593. Wenn man:

$$B_{2i+1} = 1.2.3....(2i+2) \cdot A_{2i+1}$$

ıt, ſo iſt die Reihe der Zahlen B_{2i+1} die der ſogenannten Bernoulli'ſchen ıhlen, weil Jacob Bernoulli zuerſt die Analyſten darauf aufmerkſam geıcht hat. Dieſe Reihe von Zahlen kommt oft bei Reihenentwickelungen zum ɔrſchein und hat in Beziehung auf die Summen, ſowohl der directen als r inverſen Potenzen der natürlichen Zahlen, merkwürdige Eigenſchaften. ɛtzt man z. B. $fx = x^m$, ſo gibt die Gleichung (2):

$$\Sigma x^m = C + \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \frac{1}{2}x^m + B_1\frac{m\Delta x}{1} - B_3\frac{m(m-1)(m-2)\Delta x^3}{1.2.3.4}x^{m-3} + \text{ꝛc.},$$

ɔraus das Bildungsgeſetz der Formeln (m) im §. 590 erhellet.

Die Reihe:

$$A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + \text{ꝛc.}$$

convergent; aber die Reihe:

$$B_1 - B_3 + B_5 - B_7 + \text{ꝛc.}$$

ht, weil die Zahlen B_{2i+1} über jede Grenze hinaus wachſen. Die Werthe r erſten Glieder dieſer Reihe ſind folgende:

$$B_1 = \frac{1}{6} = 0{,}166666...., \quad B_9 = \frac{5}{66} = 0{,}075757....,$$

$$B_3 = \frac{1}{80} = 0{,}033333...., \quad B_{11} = \frac{691}{2730} = 0{,}253113....,$$

$$B_5 = \frac{1}{42} = 0{,}023809...., \quad B_{13} = \frac{7}{6} = 1{,}166666....,$$

$$B_7 = \frac{1}{30} = 0{,}033333...., \quad B_{15} = \frac{3617}{510} = 7{,}092156...., \text{ ꝛc.}$$

§. 594. Wir wollen annehmen, daß das Intervall $x - x_0$ ein genaues elfaches von Δx ſei, ſo folgt aus der Gleichung (2), wenn man von den beſtimmten Integralen zu den beſtimmten übergeht:

$$\sum_{x_0}^{x} fx = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x} fx\,dx - \frac{1}{2}(fx - fx_0) + A_1\Delta x(f'x - f'x_0) - A_3\Delta x^3(f'''x - f'''x_0) + A_5\Delta x^5(f^v x - f^v x_0) - \text{ꝛc.} \qquad (3)$$

Die Formel (2), welche gewöhnlich Euler zugeschrieben und deswegen die Euler'sche Formel genannt wird, oder die Formel (3), welche eine Transformation derselben ist, gestatten eine zweifache Anwendung, je nachdem sich das Integral $\int f x dx$ als eine endliche Function von x ausdrücken läßt, oder nicht. Im ersten Falle gehört das Integral $\sum_{x_0}^{x} fx$ meistens nicht in die Categorie derjenigen, auf welche sich die vorhin angegebenen Integrationsmethoden anwenden lassen, und man könnte den genauen Werth desselben nur durch eine wirkliche Summation erhalten, eine Operation, die sehr mühsam und oft sogar unausführbar ist, wenn die Differenz Δx eine sehr große Anzahl von Malen in der Differenz $x - x_0$ enthalten ist. In diesem Falle betrachtet man das Glied:

$$\frac{1}{\Delta x} \int f x dx$$

als einen Näherungswerth des Integrales $\sum_{x_0}^{x} fx$, und die Correction, welche man an diesem Näherungswerthe anbringen muß, wird durch die Formel (3) in Reihenform gegeben. Wenn man dagegen das unbestimmte Integral $\int f x dx$ nicht als Function von x erhalten kann und es darauf ankommt, den Werth des bestimmten Integrales:

$$\int_{x_0}^{x} f x dx$$

näherungsweise zu berechnen, so theilt man das Intervall $x - x_0$ in gleiche Theile Δx, welche klein genug sind, damit das Product:

$$\Delta x \sum_{x_0}^{x} fx$$

einen Näherungswerth des gesuchten Integrales gibt, jedoch so, daß die arithmetische Summation, durch welche man das Integral $\sum_{x_0}^{x} fx$ erhält, wegen der Größe der Zahl $\frac{x - x_0}{\Delta x}$ nicht gar zu mühsam wird. Die Correction, welche man an diesem Näherungswerthe anbringen muß, wird wieder in Reihenform durch die Gleichung (3) gegeben, welche folglich sowohl die Stelle einer Summationsformel, als die einer Quadraturformel vertritt.

Wenn wir nach der im §. 585 angenommenen Bezeichnungsart das Zeichen S für das Zeichen Σ setzen, so erhalten wir statt der Formeln (2) und (3) die beiden folgenden:

$$\mathbf{S} fx = C + \frac{1}{\Delta x} \int f x dx + \frac{1}{2} fx + A_1 \Delta x f'x - A_2 \Delta x^3 f'''x + A_5 \Delta x^5 \cdot f^v x - \text{ꝛc.}, \quad (4)$$

$$\mathbf{S}_{x_0}^{x} fx = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x} f x dx + \frac{1}{2} (fx - fx_0) + A_1 \Delta x (f'x - f'x_0) - A_3 \Delta x^3 (f'''x - f'''x_0) + A_5 \Delta x^5 (f^v x - f^v x_0) - \text{ꝛc.} \quad (6)$$

§. 595. Um aber die Anwendung dieser Reihen, welche nicht immer convergent sind, im Allgemeinen zu rechtfertigen, ist es durchaus nothwendig, die Grenzen des Fehlers angeben zu können, welchen man begeht, wenn man die Reihe bei einem Gliede von irgend einem Range abbricht (§. 25). Nun hat aber Poisson ein Verfahren angeben, durch welches man die Euler'sche

ihe, und zugleich den Reſt derſelben, durch ein beſtimmtes Integral aus-
rückt, erhält alſo auch die Grenze dieſes Reſtes, und wegen der Wichtig-
des Gegenſtandes müſſen wir daher hier dieſe weſentliche Vervollkommnung
er Fundamentalformel der Analyſis näher angeben.

Der Einfachheit der Rechnungen wegen wollen wir annehmen, daß die
enzen der Integrale in der Euler'ſchen Formel gleiche Zahlenwerthe und
gegengeſetzte Zeichen haben, was man immer bewirken kann, wenn man
Anfangspunkt der Veränderlichen verändert, und die Formel (m) im
433:

$$fx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f\xi d\xi + \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left[\sum_{1}^{\infty} \cos.\frac{i\pi(x-\xi)}{a}\right] f\xi d\xi, \quad (7)$$

der betrachtet, welche für alle zwiſchen den Integrationsgrenzen liegende
erthe von x ſtattfindet. An dieſen Grenzen ſelbſt hat man:

$$[fa + f(-a)] = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f\xi d\xi + \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left[\sum_{1}^{\infty} \cos.\frac{i\pi(\xi \pm a)}{a}\right] f\xi d\xi. \quad (8)$$

Nimmt man $a = n\Delta x$ und legt der Veränderlichen x ſucceſſive die $2n-1$
dieſelbe Differenz Δx verſchiedenen Werthe:

$$-(n-1)\Delta x, -(n-2)\Delta x, \ldots -\Delta x, 0, \Delta x, 2\Delta x, \ldots (n-1)\Delta x$$

, für welche die Gleichung (7) ſtattfindet, nimmt die Summe der correſpon-
enden Werthe von fx und addirt die halbe Summe der Werthe von fx für
$= \pm a$, ſo erhält man:

$$\Delta x\left[\sum_{-a}^{a} fx + \frac{1}{2}fa - \frac{1}{2}f(-a)\right] = \frac{\Delta x}{2}[fa + f(-a)]$$

$$+\frac{2n-1}{2n}\int_{-a}^{a} fx\,dx + \frac{1}{n}\int_{-a}^{a}\left[\sum_{1}^{\infty} p\cos.\frac{i\pi x}{n\Delta x}\right] fx\,dx. \quad (9)$$

Wir haben unter den Integrationszeichen x für ξ geſetzt, was jetzt ohne
eideutigkeit geſchehen kann, und zu gleicher Zeit haben wir der Kürze wegen:

$$= 1 + 2\cos.\frac{i\pi}{n} + 2\cos.\frac{2i\pi}{n} + 2\cos.\frac{3i\pi}{n} + \ldots + 2\cos.\frac{(n-1)i\pi}{n}$$

ſetzt. Die Größe p reducirt ſich jedesmal auf $2n-1$, wenn i ein Viel-
hes von 2n iſt. Außerdem hat man:

$$p\cos.\frac{i\pi}{n} = p + \cos.i\pi - \cos.\frac{(n-1)i\pi}{n},$$

raus für alle anderen Werthe von i, $p = -\cos.i\pi$ folgt. Hierauf nimmt
n die Summe Σ_1^∞, indem man [illegible] annimmt, daß dieſer Werth von
ohne Ausnahme ſtattfindet, [illegible] $= 2i'n$ und nimmt eine zweite
mme Σ_1^∞ in Bezieh[illegible] man im Verlaufe dieſer zweit-
mmation [illegible]eihe iſt die erſten
$2i'n\pi = 2n$, welche
. Die unter[illegible]efindliche periodiſche [illegible]nsgrenzen
mme dieſer [illegible]egen der Gleichung: Integrale
$\frac{1}{2}fx_0$) gegen
$\cos.\frac{i\pi(a-x)}{a}$
ht ſich

$$\sum_1^\infty p \cos. \frac{i\pi x}{n\Delta x} = -\sum_1^\infty \cos. \frac{i\pi(a-x)}{a} + 2n \sum_1^\infty \frac{2i'\pi x}{\Delta x}.$$

Die Gleichung (9) gibt folglich:

$$\Delta x \left[\sum_{-a}^{a} fx + \frac{1}{2} fa - \frac{1}{2} f(-a)\right] = \frac{\Delta x}{2}[fa + f(-a)]$$
$$+\left(1 - \frac{\Delta x}{a}\right)\int_{-a}^{a} fx dx - \frac{\Delta x}{a}\int_{-a}^{a}\left[\sum_1^\infty \cos. \frac{i\pi(a-x)}{a}\right] fx dx$$
$$+2\int_{-a}^{a}\left[\sum_1^\infty \cos. \frac{2i'\pi x}{\Delta x}\right] fx dx,$$

oder vielmehr wegen der Gleichung (8):

$$\Delta x \left[\sum_{-a}^{a} fx + \frac{1}{2} fa - \frac{1}{2} f(-a)\right] = \int_{-a}^{a} fx dx$$
$$+2\int_{-a}^{a}\left[\sum_1^\infty \cos. \frac{2i'\pi x}{\Delta x}\right] fx dx.$$

Nun hindert nichts, i für i' zu ſetzen und den Anfangspunkt der Veränderlichen x oder die Form der Function f ſo zu verändern, daß die Grenzen des Integrales beliebig ſind. Wir können alſo ſchreiben:

$$\Delta x \left[\sum_{x_0}^{x} fx + \frac{1}{2} fx - \frac{1}{2} fx_0\right]$$
$$-\int_{x_0}^{x} fx dx = 2\int_{x_0}^{x}\left[\sum_1^\infty \cos. \frac{2i\pi x}{\Delta x}\right] fx dx. \qquad (10)$$

Setzt man:

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \text{ꝛc.} = \frac{1}{2}(2\pi)^{2n} A_{2n-1}, \qquad (11)$$

und berückſichtigt, daß an den Grenzen des Integrales, für welche der Werth der Veränderlichen x nach der Vorausſetzung ein genaues Vielfaches von Δx iſt:

$$\cos. \frac{2i\pi x}{\Delta x} = 1, \quad \sin. \frac{2i\pi x}{\Delta x} = 0$$

iſt; ſo gibt das Verfahren der theilweiſen Integration:

$$2\int_{x_0}^{x}\left[\sum_1^\infty \cos. \frac{2i\pi x}{\Delta x}\right] fx dx = -A_1 \Delta x^2 (f'x - f'x_0)$$
$$+A_3 \Delta x^4 (f'''x - f'''x_0) \ldots \mp A_{2n-1} \Delta x^{2n} (f^{(2n-1)}x - f^{(2n-1)}x_0)$$
$$\pm 2\left(\frac{\Delta x}{2\pi}\right)^{2n}\int_{x_0}^{x}\left[\sum_1^\infty \frac{1}{i^{2n}} \cos. \frac{2i\pi x}{\Delta x}\right] f^{(2n)}x dx. \qquad (12)$$

§. 596. Durch Vergleichung der Gleichungen (10) und (12) erhalten
uler'ſche Formel wieder, wie ſie die Gleichung (3) gibt, und zu-
en wir den Werth des Reſtes, welcher vernachläſſigt wird, wenn
§. 595. e bei einem Gliede von beliebigem Range abbricht, durch ein
convergent ſind, gral ausgedrückt. Die Coefficienten A_1, A_3, ꝛc., welche durch
die Grenzen des Fl) beſtimmt werden, können keine andern ſein, als die durch
die Reihe bei einem A) oder durch die Entwickelung der Function (α) nach den
hat aber Poiſſon eingegebenen Coefficienten. Die Gleichung (11) drückt alſo

ine ſehr merkwürdige Eigenſchaft der Coefficienten A oder der ſich daraus rgebenden Bernoulli'ſchen Zahlen aus.

Wegen der Gleichung (11) hat man offenbar:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{i^{2n}} \cdot \cos. \frac{2i\pi x}{\Delta x} < \frac{1}{2}(2\pi)^{2n} A_{2n-1},$$

nd wenn man durch λ_n den größten Zahlenwerth bezeichnet, welchen die unction $f^{(2n)}x$ zwiſchen den Grenzen des Integrales annehmen kann, ſo hat nan, abgeſehen von den Zeichen:

$$R_n = 2\left(\frac{\Delta x}{2\pi}\right)^{2n} \int_{x_0}^{x} \left[\sum_1^\infty \frac{1}{i^{2n}} \cos. \frac{2i\pi x}{\Delta x}\right] f^{(2n)}x\,dx$$
$$< \lambda_n (x - x_0) A_{2n-1} \Delta x^{2n}.$$

Wenn man die Euler'ſche Formel auf eine Quadratur anwenden will, ſo kann man Δx immer ſo klein annehmen, daß die obere Grenze des Reſtes R_n unter jede gegebene Größe herabſinkt. Wenn dieſelbe Formel auf die Beſtimmung einer Summe oder eines Integrales mit endlichen Differenzen angewandt wird, und die Differenz Δx gegeben iſt, ſo kann es geſchehen, daß der Werth R_n für ohne Ende wachſende Werthe des Index n nicht ohne Ende abnimmt, weswegen man aber doch von der Formel Gebrauch machen kann, wenn die obere Grenze von R_n für einen ſchicklichen Werth von n von der Ordnung der Größen iſt, welche vernachläſſigt werden können.

Wenn die Function $f^{(2n)}x$ in der ganzen Ausdehnung der Integration daſſelbe Zeichen behält, ſo hat man auch, abgeſehen vom Zeichen:

$$R_n < A_{2n-1} \Delta x^{2n} \int_{x_0}^{x} f^{(2n)}x\,dx,$$

oder:

$$R_n < A_{2n-1} \Delta x^{2n} (f^{(2n-1)}x - f^{(2n-1)}x_0),$$

d. h. der vernachläſſigte Reſt hat einen kleineren Zahlenwerth, als das letzte beibehaltene Glied.

Die Euler'ſche Formel wird unbrauchbar, wenn die ungeraden Differenziale von fx verſchwinden, oder allgemeiner, wenn ſie den beiden Grenzen des Integrales gleich ſind, und der zweite Theil der Gleichung (10) läßt ſich alsdann nicht mehr in eine nach den ſteigenden Potenzen von Δx fortſchreitende Reihe entwickeln.

§. 597. Allgemein, wenn die Function fx in der ganzen Ausdehnung der Integration daſſelbe Zeichen behält, ſo kann man Δx ſo klein annehmen, daß der Zahlenwerth des Verhältniſſes:

$$\int_{x_0}^{x} \left[\sum_1^\infty \cos. \frac{2i\pi x}{\Delta x}\right] fx\,dx : \int_{x_0}^{x} fx\,dx \qquad (13)$$

unter jede gegebene Größe herabſinkt, weil der Factor von fxdx in dem erſten Integrale das Zeichen verändert. Wenn außerdem Δx eine Größe iſt, welche in Vergleich zu dem gegenſeitigen Abſtande $x - x_0$ der Integrationsgrenzen vernachläſſigt werden kann, ſo darf man nicht blos das erſte der Integrale (13) gegen das zweite, ſondern auch die Glieder $\Delta x(\frac{1}{2}fx - \frac{1}{2}fx_0)$ gegen $\Delta x \sum_{x_0}^{x} fx$ vernachläſſigen, und man hat:

$$\Delta x \sum_{x_0}^{x} fx = \int_{x_0}^{x} fx\,dx,$$

ſo daß ſich in Beziehung auf unſere Verſuchs- und Meſſungsmittel
verhält, wie wenn ſich ein Syſtem von discontinuirlichen Theilen in ei
continuirliches Syſtem verwandelte. Vermöge dieſes Satzes betrachte
z. B. zwei Körper bei der Berechnung ihrer gegenſeitigen Anziehung al
Maſſen, indem man von den Poren oder Zwiſchenräumen, deren Exiſten
eine Menge von Erſcheinungen außer Zweifel geſetzt iſt, deren Dime
aber für uns unmeßbar klein ſind, abſtrahirt. Man nimmt an, daß die
der in einem Raume von unmeßbar kleinen Dimenſionen enthaltenen Th
welcher aber dennoch eine ſehr große Anzahl ſolcher Theilchen enthalte
gleichmäßig in dieſem ganzen Raume verbreitet iſt, und der begangene
muß in Beziehung auf die gemeſſene Größe von derſelben Ordnung ſei
die Dimenſionen des Volumens der Theilchen in Beziehung auf die
ſionen der beobachteten Körper, d. h. der Fehler iſt für unſere Meſſung
unmeßbar klein.

Wenn dagegen die Function fx innerhalb der Ausdehnung der Inte
das Zeichen verändert, ſo können die beiden Glieder des Verhältniſſe
ungeachtet der Kleinheit von Δx unter einander vergleichbare Größen ſei
Poiſſon hat aus dieſer Bemerkung eine ſinnreiche Erklärung einiger
welchen die Molecularconſtitution der Naturkörper unterworfen zu ſein
abgeleitet.

Bei der Auseinanderſetzung der Grundprincipien der Infinitesimalre
im Anfange dieſes Werkes haben wir zu zeigen geſucht, wie man vo
Begriffe der discontinuirlichen Veränderungen ausgegangen iſt, um die
nung auf ſtetige Veränderungen, welche ſich bei den meiſten Naturerſchei
darbieten, oder darzubieten ſcheinen, anwenden zu können, und in der
hergehenden iſt die Andeutung eines umgekehrten Verfahrens enthalten,
man der Bequemlichkeit der Rechnung wegen die wirklich discontinu
Veränderungen als continuirliche betrachtet. Dieſes Verfahren findet be
bei der Beſtimmung der Verhältniſſe großer Zahlen, welche in der Co
tionslehre und in der Wahrſcheinlichkeitsrechnung häufig vorkommen, ſei
wendung, wobei eine von Stirling herrührende Formel, welche ſic
wir in dem folgenden Abſchnitte zeigen wollen, aus der weiter oben
teten Euler'ſchen Formel gibt, ſtets angewandt wird.

II. Anwendung der Stirling'ſchen Formel.

§. 598. Wenn wir die Euler'ſche Formel zur Beſtimmung der
der Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis x incl. anwenden, ſo habe

$$\Delta x = 1, \quad \int \log. x\,dx = x \log. x - x + \text{const.}$$

$$fx = \frac{1}{x}, \quad f''x = \frac{1.2}{x^3}, \quad f^4x = \frac{1.2.3.4}{x^5}, \text{ ꝛc.,}$$

und folglich gibt die Formel (4):

$$\log.[1.2.3....x] = C + x \log. x - x + \frac{1}{2} \log. x + \frac{B_1}{2x}$$

$$- \frac{B_3}{3.4.x^3} + \frac{B_5}{5.6.x^5} - \frac{B_7}{7.8.x^7} + \text{ꝛc.,}$$

woraus ſich ergibt, wenn man 2x für x ſetzt:

$$\log.[1.2.3...(2x-1)2x] = C + 2x \log. 2x - 2x + \frac{1}{2} \log. 2x + \frac{B_1}{4x}$$

Es iſt aber identiſch:

$$1.2.3\ldots(2x-1)\,2x = 2^x.1.2.3\ldots.x.1.3.5\ldots.(2x-1),$$

d folglich:

$$\log.(1.2.3\ldots.x)+\log.[1.3.5\ldots.(2x-1)]$$
$$= C + x\log.2 + 2x\log.x - 2x + \frac{1}{2}\log.2x + \frac{B_1}{4x} - \text{ꝛc.}$$

Wenn man mit dieſer Gleichung die Gleichung (14) durch Subtraction rbindet, ſo erhält man die folgende Formel, welche die Conſtante C nicht hr enthält:

$$\text{g.}[1.3.5\ldots(2x-1)] = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log.2 + x\log.x - x - \frac{B_1}{4x} + \text{ꝛc.} \quad (15)$$

ıdererſeits hat man:

$$\frac{(1.2.3\ldots.x.2^x)^2}{2x} = 2.2.4.4.6.6\ldots.(2x-2)(2x-2)2x,$$

$$1.3.5\ldots.(2x-1)]^2 = 1.3.3.5.5.7\ldots.(2x-3)(2x-1)(2x-1),$$

d wenn man dieſe Gleichungen mit den Gleichungen (14) und (15) ver- ıdet, ſo ergibt ſich nach den Regeln der Logarithmenrechnung leicht:

$$\text{og.}\left[\frac{2.2.4.4.6.6\ldots.(2x-2)(2x-2)2x}{1.3.3.5.5.7\ldots.(2x-3)(2x-1)(2x-1)}\right] = 2C - 2\log.2 + \frac{3}{2}\frac{B_1}{x} + \text{ꝛc.}$$

ßt man nun x gegen das Unendliche convergiren, ſo convergirt der erſte heil der letzten Gleichung nach dem Wallis'ſchen Theoreme gegen die renze $\log.\frac{\pi}{2}$, während ſich der zweite Theil für $x=\infty$ auf $2C-2\log.2$ ducirt, woraus folgt $C=\log.\sqrt{2\pi}$, und folglich iſt:

$$\log.(1.2.3\ldots.x) = \log.\sqrt{2\pi} + x\log.x - x + \tfrac{1}{2}\log.x + \frac{B_1}{2x} - \frac{B_3}{3.4x^3} + \frac{B_5}{5.6x^5} - \frac{B_7}{7.8.x^7} + \text{ꝛc.} \quad (16)$$

Setzt man in dieſer letzten Gleichung $x=1000$, multiplicirt die Glieder ne das Zeichen log. durch den Modulus der Logarithmentafeln (§. 64), mit ſich die Summe auf Logarithmen der Tafeln bezieht, und ſchließt die ihe bei dem Gliede mit dem Coefficienten B_3; ſo findet man den Werth:

$$\log.\text{vulg.}(1.2.3\ldots.1000) = 2567{,}6046442221328\ldots\ldots,$$

elcher bis auf die dreizehnte Decimalſtelle genau iſt. Wenn man $x=10$ ßte, und bei dem Gliede mit dem Coefficienten B_{23} ſtehen bliebe; ſo fände an einen bis auf die zwanzigſte Decimalſtelle genauen Werth. *)

Aus dieſer Rechnung geht hervor, daß das Product 1.2.3...1000 in ſerm Zahlenſyſteme durch eine Zahl von 2568 Ziffern ausgedrückt wird, ren vier erſte Ziffern zur Linken 4023 ſind, ſo daß dieſe Zahl zwiſchen:

$$4024\cdot 10^{2564} \text{ und } 4023\cdot 10^{2564}$$

gt.

*) Vergl. die Einleitung zu dem Werkchen: Tabularum ad faciliorum et breviorem probabilitatis computationem utilium enneas, auct. *Degen*. Copenhagae, 1824.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat man oft die Verhältnisse sehr großer Zahlen anzugeben, welche die combinatorische Analysis unter der Form von Factoriellen oder Facultäten gibt, und deren unmittelbare numerische Berechnung ganz unausführbar sein würde. Um nun diese Verhältnisse mit einer hinreichenden Genauigkeit, welche mit der Genauigkeit der empirischen Constanten vergleichbar ist, anzugeben, braucht man offenbar für jedes Glied des Verhältnisses auf die eben bei der Factorielle 1.2.3....1000 angegebene Weise nur die Kennziffer seines Logarithmus, und die ersten Ziffern des Decimaltheiles desselben zu bestimmen.

§. 599. Wenn man in der Gleichung (14), $x = 1$ setzt, so ergibt sich daraus:

$$C = 1 - \frac{B_1}{1.2} + \frac{B_3}{3.4} - \frac{B_5}{5.6} + \frac{B_7}{7.8} - \frac{B_9}{9.10} + \frac{B_{11}}{11.12} - \text{&c.},$$

oder durch Substitution der für die Bernoulli'schen Zahlen gefundenen Werthe:

$$C = 1 - 0{,}08333.... + 0{,}00275.... - 0{,}00079.... + 0{,}00059...$$
$$- 0{,}00084.... + 0{,}00209.... - \text{&c.},$$

was genügt, um die Divergenz der Reihe darzuthun und zu zeigen, daß sie nicht zur Bestimmung des Werthes der Constante C angewandt werden kann.

Die in den Gleichungen (14) und (15) nach den ungeraden und negativen Potenzen von x fortschreitende Reihe ist ebenfalls divergent; aber, wenn man für x die Zahl 1000 nimmt, so hat das Glied mit B_3 schon blos noch auf die Decimalen von einer höhern als der 11ten Ordnung Einfluß, und man müßte eine sehr große Anzahl von Gliedern umfassen, um die Divergenz dieser Reihe durch die fortwährende Zunahme der Coefficienten B darzuthun. Wenn man blos $x = 10$ setzte, so wäre das Glied mit B_5 kleiner, als eine Decimaleinheit der 8ten Ordnung, und man müßte wieder, um die Divergenz der Reihe darzuthun, eine zu große Anzahl von Gliedern umfassen, als daß sich die Rechnung praktisch ausführen ließe.

Es ist jedoch hinreichend, daß die Reihe zuletzt divergent wird, um den Rechnungen bei der Anwendung derselben nur dann mathematische Strenge beizulegen, wenn sich eine Grenze des vernachlässigten Restes angeben läßt (§. 25). Nun ergibt sich aber diese Grenze in diesem besondern Falle mit der größten Leichtigkeit aus der, welche Poisson für den Rest der Euler'schen Reihen angegeben hat; und muß man, um hinreichend enge Grenzen zu erhalten, den Anfangspunkt der Summation verändern, und man kann z. B. die Summe $S_1^x \log. x$ in $S_1^{11} \log. x + S_{11}^x \log. x$ zerlegen, so daß man die Constante $S_1^{11} \log. x$ mit jeder gewünschten Genauigkeit direct berechnen kann. Alsdann hat man:

$$S_{11}^x \log. x = x \log. x - x + 1 - 11 \log. 11$$
$$- \frac{B_1}{1.2}\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{x}\right) + \frac{B_3}{3.4}\left(\frac{1}{11^3} - \frac{1}{x^3}\right) - \frac{B_5}{5.6}\left(\frac{1}{11^5} - \frac{1}{x^5}\right) + \text{&c.}$$

Wenn man die Reihe mit dem Gliede B_5 schließt, so ist der vernachlässigte Rest nach dem Vorhergehenden kleiner, als eine Decimaleinheit der 8ten Ordnung, welchen Werth x an der obern Grenze des Integrales auch haben mag.

Auch ist noch zu bemerken, daß Liouville den Rest der bei dem Gliede mit B_{2i-1} geschlossenen Reihe (16) auf folgende Form gebracht hat:

$$\frac{1}{1.2.3...(2i+2)}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{2i} f^{(2i+2)}(\theta\alpha)\,d\alpha,$$

wo $f\alpha$ die Function $\frac{\alpha}{e^\alpha-1}$ (§. 592), und θ eine zwiſchen 0 und 1 liegende Zahl bezeichnet. *) Wenn man den größten Zahlenwerth der Function $f^{(2i+2)}\alpha$ durch λ_{2i+2} bezeichnet, ſo iſt der Zahlenwerth des vernachläſſigten Reſtes zwiſchen den Grenzen $0, \infty$ kleiner als:

$$\frac{\lambda_{2i+2}}{1.2.3..(2i+2)}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{2i}\,d\alpha = \frac{\lambda_{2i+2}}{(2i+1)(2i+2)x^{2i+1}}.$$

Wenn man in der Reihe (16) nur die von den Coefficienten B unabhängigen Glieder beibehält, ſo gibt dieſe Rechnung für den Ausdruck des vernachläſſigten Reſtes:

$$\frac{1}{1.2}\int_0^\infty e^{-\alpha x} f''(\theta\alpha)\,d\alpha,$$

und der größte Zahlenwerth der Function:

$$f''\alpha = \frac{e^\alpha[(\alpha-2)e^\alpha+\alpha+2]}{(e^\alpha-1)^3}$$

iſt, wie Lionville gezeigt hat, $f''(0) = \frac{1}{6} = B_1$. In dieſem Falle iſt alſo der vernachläſſigte Reſt kleiner als $\frac{B_1}{2x}$, und wenn x von der Ordnung der Tauſenden iſt, ſo iſt der vernachläſſigte Reſt kleiner als eine Decimaleinheit der vierten Ordnung. Dieſe Rechnung, wobei man die genaue Beſtimmung der Conſtante C zu benutzen ſucht, hat folglich vor der vorhin angegebenen den Vortheil, den Werth der Grenze des vernachläſſigten Reſtes zu vermindern, wenn man in der Stirling'ſchen Formel alle Glieder mit den Bernoulli'ſchen Zahlen hinwegläßt; aber ſoll dieſes zuläſſig ſein, ſo muß x eine große Zahl, wenigſtens von der Ordnung der Tauſender ſein, und im entgegengeſetzten Falle gelangt man durch die angeſtellten Betrachtungen einfacher zu einem Werthe der Grenze des Reſtes, deſſen Kleinheit bei allen Anwendungen genügt.

III. Von der Interpolation.

§. 600. Wir haben bereits mehrere Male Gelegenheit gehabt, von dem Probleme der Interpolation (§. 21) zu reden, deſſen Gegenſtand darin beſteht, eine ſtetige, mathematiſch ausdrückbare Function zu beſtimmen, welche für gewiſſe Werthe der unabhängigen Veränderlichen beſtimmte Werthe, welche die Werthe einer andern continuirlichen oder discontinuirlichen Function ſind, annimmt. Wenn dieſe letzte Function ſtetig iſt, und die Werthe, zwiſchen welchen man interpoliren ſoll, einander hinreichend nahe liegen, ſo nimmt man an, daß die beiden Functionen innerhalb des Intervalles dieſer Werthe nahezu übereinſtimmen, weil zwei Curven in dem Intervalle der ihnen gemeinſchaftlichen Punkte faſt zuſammenfallen, wenn die gemeinſchaftlichen Punkte einander hinreichend nahe liegen, und weder die eine, noch die andere Curve in dieſem Intervalle eine Stetigkeitsunterbrechung erfährt.

Das Problem der Interpolation iſt ſeiner Natur nach offenbar unbeſtimmt. In gewiſſen Fällen kann es als eine Anwendung der mathematiſchen Theorie

*) Journal de mathématiques, tom. IV, pag. 317.

der Wahrſcheinlichkeiten betrachtet werden; allein wir haben daſſelbe hier nur in ſo fern zu betrachten, als es ſich an die Rechnung mit endlichen Differenzen anſchließt.

Wir wollen die Formel im §. 43 und 582, nämlich:

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0 + \ldots + \Delta^n y_0,$$

wieder betrachten, worin y eine Function der Veränderlichen x iſt, welche für die Werthe $x = 0$, $x = \Delta x$, $x = 2\Delta x, \ldots . x = n\Delta x$ gegeben iſt. Wir wollen $n\Delta x = x$, $y_n = fx$ und $y_0 = f(0)$ ſetzen; ſo verwandelt ſich dieſe Formel in:

$$fx = f(0) + \frac{x}{1.\Delta x}\Delta f(0) + \frac{x(x-\Delta x)}{1.2.\Delta x^2}\Delta^2 f(0) + \text{ꝛc.} \qquad (17)$$

Wenn der Werth y_0 nicht $x = 0$, ſondern $x = x_0$ entſpräche, ſo müßte man im zweiten Theile der vorhergehenden Gleichung $x - x_0$ für x und fx_0 für $f(0)$ ſetzen.

Wenn man in der Formel (17), deren Aehnlichkeit mit der Maclaurin'ſchen Reihe in die Augen fällt, $x = 0$, $x = \Delta x$, $x = 2\Delta x, \ldots x = n\Delta x$ ſetzt, ſo kommt man wieder auf die Werthe $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$, welche zur Bildung der Differenzen Δy_0, $\Delta^2 y_0, \ldots . \Delta^n y_0$ gedient haben; aber man kann auch annehmen, daß die Gleichung (17) für alle dazwiſchen liegende Werthe von x ſtattfindet, und alsdann erfüllt dieſe Gleichung den Zweck einer Interpolationsformel. Man kann ſie auch auf die Form:

$$fx = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{ꝛc.} \qquad (18)$$

bringen, wo $A_0, A_1, A_2, \ldots . A_n$ gegebene Conſtanten bezeichnen. Man muß vorausſetzen, daß die Differenzen $\Delta, \Delta^2, \Delta^3$, ꝛc. abnehmen, ſo daß man bei den Differenzen der n^{ten} Ordnung ſtehen bleiben kann, wenn man die der höhern Ordnungen vernachläſſigt, und alsdann enthält die Formel (17) oder (18) nur eine endliche Anzahl von Gliedern, ſo daß man ſtatt der Function fx eine ganze rationale Function von x hat.

§. 601. Wenn die Differenzen von den höhern, als von der n^{ten} Ordnung Null wären, ſo könnte man die Tafel der Werthe von fx vor und hinter dem zum Anfangspunkte genommenen Gliede doch beliebig weit fortſetzen, indem man ſich zu dieſem Zwecke entweder der Formel (17) bediente, oder indem man die Differenzen von den niedrigeren Ordnungen durch ſucceſſive Additionen bildete. Auch kann man die Tafel erweitern, wenn die Differenzen der n^{ten} Ordnung blos ſehr klein ſind, indem man ſie als ſtreng $= 0$ behandelt; aber alsdann muß man jenſeits der urſprünglichen Grenzen der Tafel einige bekannte Werthe von fx haben, welche gleichſam als feſte Anhaltspunkte dienen, und deren Uebereinſtimmung mit den berechneten Werthen eine hinreichende Garantie für die Genauigkeit der zwiſchenliegenden Werthe gibt, wenigſtens bis auf Größen von der Ordnung genau, welche man zu vernachläſſigen berechtigt iſt. Die Grenzen, innerhalb welcher man die Tafel erweitern darf, ſind diejenigen, zwiſchen welchen man die Gleichung (17) als Interpolationsformel anwenden kann.

Wenn die Tafeln für Werthe der Veränderlichen berechnet ſind, die einander ſo nahe liegen, daß man innerhalb einer gewiſſen Ausdehnung die Differenzen der erſten Ordnung als conſtant und die von den höhern Ordnungen als Null betrachten kann, ſo reducirt ſich die Interpolation, wie ſchon oft gezeigt worden, auf die Berechnung von Proportionaltheilen.

§. 602. Wenn man die Formel (3) auf die Berechnung des Zahlenwerthes des bestimmten Integrales $\int_{x_0}^{x} fx\,dx$ anwendet, so kann es geschehen, daß die Function fx nur durch eine Tafel gegeben ist, welche blos zu einer näherten Berechnung der Werthe der Ableitungen fx, $f'x$, $f''x$, ꝛc. die Mittel an die Hand gibt (§. 44). Wir wollen annehmen, daß diese Tafel die Werthe von fx für Werthe von x gibt, welche sich nach gleichen Unterschieden ändern, wenn das Intervall der Grenzen $x - x_0$ wieder ein Vielfaches von Δx ist. Wenn man eine Veränderliche z und eine Function:

$$fz = f(x + z) + f(x_0 - z)$$

als Hülfsgrößen anwendet, so daß:

$$f^{(n)}(0) = f^{(n)}x - f^{(n)}x_0, \quad \Delta^n f(0) = \Delta^n fx - \Delta^n fx_0 \qquad (19)$$

ist, und annimmt, daß die Veränderliche z successive die Werthe $0, \Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x$, ꝛc. annimmt; so gibt die Formel (17) durch eine bloße Vertauschung von f mit f und von x mit z:

$$fz = f(0) + \frac{z}{1}\Delta f(0) + \frac{z(z-\Delta x)}{1.2.\Delta x^2}\Delta^2 f(0) + \text{ꝛc.}$$

Wenn man nun diese Formel nach dem Prinzipe der Interpolation als für beliebige Werthe von z stattfindend betrachtet, so kann man die beiden Theile als stetige Functionen von z differenziren, und wenn man dann $z = 0$ setzt, so erhält man:

$$\Delta x f'(0) = \Delta f(0) - \tfrac{1}{2}\Delta^2 f(0) + \tfrac{1}{3}\Delta^3 f(0) - \tfrac{1}{4}\Delta^4 f(0) + \text{ꝛc.},$$

$$\Delta x^3 f'''(0) = \Delta^3 f(0) - \tfrac{3}{2}\Delta^4 f(0) + \text{ꝛc.}, \ldots\ldots \text{ꝛc.}$$

Setzt man für $f'(0), f'''(0), \ldots \Delta f(0), \Delta^2 f(0), \ldots$ ihre durch die Gleichungen (19) gegebenen Werthe wieder und substituirt in die Formel (3), so erhält man die von Laplace in der Mécanique céleste zuerst gegebene Formel:

$$\int_{x_0}^{x} fx\,dx = \Delta x\Big[\sum_{x_0}^{x} fx + \frac{1}{2}fx - \frac{1}{2}fx_0 - \frac{1}{12}(\Delta fx - \Delta fx_0)$$

$$+ \frac{1}{24}(\Delta^2 fx - \Delta^2 fx_0) - \frac{19}{20}(\Delta^3 fx - \Delta^3 fx_0)$$

$$+ \frac{3}{160}(\Delta^4 fx - \Delta^4 fx_0) - \frac{863}{60480}(\Delta^5 fx - \Delta^5 fx_0) + \text{ꝛc.}\Big]$$

Es muß vorausgesetzt werden, daß sich die Tafel der Werthe von fx über die obere Integrationsgrenze hinaus erstreckt, damit sie die sich auf diese oberen Grenzen beziehenden Differenzen Δfx, $\Delta^2 fx$, $\Delta^3 fx$, ꝛc. implicite bestimmt.

§. 603. Das umgekehrte Problem der Interpolation besteht in der Bestimmung des Werthes von x, welcher einem gegebenen Werthe fx der Function f entspricht. Wenn man die Gleichung (17) als Interpolationsformel anwendet, so läuft die Auflösung dieser Aufgabe auf die Auflösung einer algebraischen Gleichung des n^{ten} Grades hinaus, indem $\Delta^n f(0)$ die höchste in der Formel vorkommende Differenz ist. Statt aber bei dieser Auflösung sich der allgemeinen Methoden von einer so schwerfälligen Anwendung zu bedienen, findet man successive Annäherungen an, und setzt zu dem Zwecke:

$$x = \frac{\Delta x}{Fx} \cdot \frac{fx - f(0)}{\Delta f(0)},$$

wo Fx eine Function von x bezeichnet, welche den Werth:

$$1 + \left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\frac{\Delta^2 f(0)}{1.2.\Delta f(0)} + \left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{x}{\Delta x} - 2\right)\frac{\Delta^3 f(0)}{1.2.3.\Delta f(0)} +$$

hat. Für den erſten Näherungswerth von x nimmt man:

$$\xi_0 = \Delta x \cdot \frac{fx - f(0)}{\Delta f(0)},$$

für den zweiten Näherungswerth:

$$\xi_1 = \frac{\Delta x}{F\xi_0} \cdot \frac{fx - f(0)}{\Delta f(0)},$$

für den dritten:

$$\xi_2 = \frac{\Delta x}{F\xi_1} \cdot \frac{fx - f(0)}{\Delta f(0)},$$

und ſo fort.

Das Problem der Interpolation umfaßt als beſondern Fall das der E ſchaltung, welches darin beſteht, zwiſchen den durch eine Tafel gegeb Werthen eine beſtimmte Anzahl zwiſchen liegender Werthe einzuſchalten, man nimmt gewöhnlich an, daß die eingeſchalteten Glieder um dieſelben ferenzen von einander verſchieden ſein müſſen, wie die Glieder der urſpr lichen Tafel.

§. 604. Wenn die Tafel die Werthe der Function nicht für Werth unabhängigen Veränderlichen gäbe, welche nach gleichen Differenzen fortſc ten, wie es im Vorhergehenden vorausgeſetzt iſt; ſo müßte man zu an Interpolationsformeln ſeine Zuflucht nehmen, und es ließen ſich deren mittelſt der Rechnung mit endlichen Differenzen ableiten; allein es iſt facher, und für unſern Zweck hinreichend, geradezu mit Lagrange

$$y = X_0 y_0 + X_1 y_1 + X_2 y_2 + \ldots\ldots + X_n y_n$$

zu ſetzen, wo $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ wieder die gegebenen Werthe der Fun y bezeichnen, welche den Werthen $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ der Veränderlich entſprechen, und wo X_i eine Function von x iſt, welche ſich für $x = x_i$ die Einheit reducirt und für $x = x_{i'}$ auf Null, wenn der Inder i' jeden dern Werth als i hat. Offenbar wird dieſer doppelten Bedingung ge wenn man

$$X_i = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots\ldots(x_i - x_n)}$$

ſetzt, was übrigens auch auf unendlich viele andere Weiſen geſchehen kö weil das Problem der Interpolation nothwendig unbeſtimmt iſt.

Drittes Kapitel.

ieorie der Gleichungen mit endlichen Differenzen zwiſchen zwei discontinuirlichen Veränderlichen.

Integration unter endlicher Form der Differenzengleichungen mit zwei Veränderlichen.

§. 605. Die Theorie der Gleichungen mit endlichen Differenzen, welche Beziehung auf wichtige Anwendungen bei weitem nicht ſo fruchtbar iſt, als der Differenzialgleichungen, verdient dennoch auch in einem Elementarwerke as näher erörtert zu werden; denn die Vergleichung beider Theorien zeigt hnlichkeiten und Verſchiedenheiten, wodurch ſich beide gegenſeitig beleuchten, welche die allgemeinen Geſetze der Analyſis beſſer hervortreten laſſen.

Wir wollen nur die Differenzengleichungen mit zwei Veränderlichen x, y r etwas näher betrachten, und zwar ſucceſſive unter zwei verſchiedenen Getspunkten, nämlich zunächſt als Ausdruck des Geſetzes der Reihe der Werthe y, welche einer Reihe beſtimmter Werthe von x entſprechen, und dann als druck einer Eigenſchaft der Function y, welche, wie die unabhängige Vererliche x ſtetig zunimmt.

Man kann immer vorausſetzen, daß das Intervall Δx der auf einander enden Werthe der unabhängigen Veränderlichen conſtant und der Einheit ich iſt (§. 583). Wenn Δx keine conſtante Zahl, ſondern eine Function x allein, oder von x und y zugleich wäre; ſo könnte man x und y als nctionen der poſitiven oder negativen ganzen Zahl i betrachten, welche den ng des Gliedes x_i in der Reihe der Werthe von x und den des correſponenden Gliedes y_i in der Reihe der Werthe von y beſtimmt. Die Vererlichen x, y würden alsdann durch zwei Differenzengleichungen, auf welche n das im §. 165 für die Differenzialgleichungen angegebene Eliminationsfahren anwenden könnte als Functionen des Index i beſtimmt, ſo daß man eine Endgleichung käme, woraus eine der Veränderlichen x, y, und ihre fferenzen verſchwunden wären, und in dieſer Endgleichung, welche im Allneinen von einer höhern Ordnung, als die der einen oder der andern der ebenen Gleichungen ſein würde, würde ſich die unabhängige Veränderliche ach conſtanten und der Einheit gleichen Incrementen ändern.

Uebrigens wird bei den meiſten Aufgaben, auf welche ſich die Integration Differenzengleichungen anwenden läßt, in ſo fern ſie den Zweck hat, das emeine Glied einer Reihe auszudrücken, das Geſetz der Erzeugung der ihe, welches durch die Differenzengleichung ausgedrückt wird, unmittelbar ch den Index ausgedrückt, welcher alſo die Stelle einer unabhängigen ränderlichen vertritt, ohne daß eine vorläufige Transformation erforderiſt.

§. 606. Eine Differenzengleichung der n^{ten} Ordnung, worin die unängige Veränderliche x conſtante und der Einheit gleiche Incremente hat, n allgemein ausgedrückt werden durch:

$$F(x, y, \Delta^2 y, \ldots\ldots \Delta^n y) = 0,$$

: durch:

$$F(x, y, y_1, y_2, \ldots\ldots y_n) = 0,$$

wenn die ſucceſſiven Differenzen als Functionen der auf einander folgenden Werthe von y ausgedrückt werden (§. 582). Man leitet alſo aus einer Differenzengleichung der erſten Ordnung y_1, durch y ausgedrückt, aus einer Differenzengleichung der zweiten Ordnung y_2, durch y_1 und y ausgedrückt, ab, und allgemein gibt eine Differenzengleichung der n^{ten}. Ordnung den Zahlenwerth eines Gliedes der Reihe, durch die Werthe der n vorhergehenden Glieder ausgedrückt. Umgekehrt, das Integral der Differenzengleichung, oder der analytiſche Ausdruck des allgemeinen Gliedes der erzeugten Reihe muß ebenſo viele willkürliche Conſtanten enthalten, als die Ordnungszahl der Gleichung Einheiten hat, wo die Beſtimmung dieſer n Conſtanten gleichbedeutend ſein muß mit der Beſtimmung der n Glieder, welche man willkürlich annehmen muß, um die Reihe vermittelſt der gegebenen Differenzengleichung numeriſch conſtruiren zu können. Dieſe Bemerkungen ſind den ſich in der Theorie der Differenzialgleichungen darbietenden ſo analog, daß die bloße Andeutung derſelben hier genügt, obgleich wir bald gewiſſe Folgerungen daraus ziehen werden, nachdem wir einige Fälle unterſucht haben, wo die Differenzengleichungen ein eigentliches Integral geſtatten, ſo daß man das allgemeine Glied der entſprechenden Reihe mit ſo viel willkürlichen Conſtanten, als die Ordnungszahl der Differenzgleichung Einheiten hat, analytiſch ausdrücken kann.

§. 607. Betrachten wir zunächſt die allgemeine Differenzengleichung vom erſten Grade und von der erſten Ordnung:

$$\Delta y + yfx = fx$$

und ſetzen, wie im §. 440, $y = \theta t$, ſo erhalten wir:

$$\theta\Delta t + t\Delta\theta + \Delta\theta \cdot \Delta t + \theta t \cdot fx = fx.$$

Wegen der Unbeſtimmtheit der Functionen θ, t kann dieſe Gleichung in die beiden folgenden:

$$\theta\Delta t + \Delta\theta \cdot \Delta t = fx, \quad \Delta\theta + \theta fx = 0$$

zerlegt werden. Setzt man zur Erleichterung der Integration der zweiten $\theta = e^z$; ſo erhält man (§. 589):

$$\Delta\theta = e^z(e^{\Delta z} - 1) = \theta(e^{\Delta z} - 1),$$

folglich:

$$e^{\Delta z} = 1 - fx, \quad \Delta z = \log.(1 - fx), \quad z = \Sigma \cdot \log.(1 - fx),$$

und endlich:

$$\theta = e^z = Fx,$$

wo Fx das Product aller Werthe bezeichnet, welche die Function $1 - fx$ innerhalb der Grenzen des Integrales Σ annimmt. Iſt dieſe Function F ſo beſtimmt, ſo hat man:

$$\theta + \Delta\theta = F(x+1), \quad \Delta t = \frac{fx}{F(x+1)}$$

$$y = Fx \cdot \sum \cdot \frac{fx}{F(x+1)}.$$

Wenn die Function fx ſich auf eine Conſtante $1 - a$ reducirt, ſo gibt dieſe Formel:

$$y = a^x \sum \cdot \frac{fx}{a^{x+1}},$$

b wenn ſich die Function fx auch auf eine Conſtante b reducirt, ſo erlt man:

$$y = a^x \left(\frac{b}{(1-a)a^x} + \text{const.} \right).$$

lgemein, wenn die Function f conſtant wird, ſo läßt ſich die Integration esmal verrichten, wenn f eine rationale und ganze Function bezeichnet.

Man ſieht ſchon ein, daß man y nicht als eine ſtetige Function von x rde betrachten können, wenn die Conſtante a negativ wäre (§. 2), wofern willkürliche Conſtante nicht verſchwindet, wodurch a^x aus der vorhergehenn Gleichung verſchwinden würde. Aber wenn y das allgemeine Glied einer ihe und x einen Index bezeichnet, welcher nur ganze Werthe haben kann, kann die Conſtante a ſehr wohl negativ ſein, woraus blos folgt, daß die f einander folgenden Werthe von a^x abwechſelnd poſitiv und negativ ſind.

§. 608. Betrachten wir die lineare Gleichung mit endlichen Differenzen n einer beliebigen Ordnung, welche die allgemeine Form:

$$\Delta^n y + P \cdot \Delta^{n-1} y + Q \cdot \Delta^{n-2} y + \ldots\ldots + Uy = V$$

t, wo P, Q, ... U, V Functionen von x bezeichnen, oder was auf daſſelbe ausläuft, weil ſich die Differenzen der verſchiedenen Ordnungen als lineare nctionen der ſucceſſiven Werthe der unabhängigen Veränderlichen ausdrücken ſen:

$$y_{x+n} + Py_{x+n-1} + Qy_{x+n-2} + \ldots\ldots + Uy_x = V, \qquad (a)$$

o wie bei den analogen Differenzialgleichungen wird bewieſen, daß ſich die eichung (a) auf folgende:

$$y_{x+n} + Py_{x+n-1} + Qy_{x+n-2} + \ldots\ldots + Uy_x = 0 \qquad (b)$$

ückführen läßt.

Wenn man durch $y_x^{(1)}$, $y_x^{(2)}$, ꝛc. Werthe von y_x bezeichnet, welche der eichung (b) genügen, ſo hat dieſe, wie die entſprechende Differenzialgleichung charakteriſtiſche Eigenſchaft, daß ſie auch durch den Werth $y_x = \Sigma \cdot C_i y_x^{(i)}$ rificirt wird, wo die Coefficienten C_i willkürliche Conſtanten bezeichnen. enn man alſo n particuläre Auflöſungen oder Integrale der Gleichung (b) nt, ſo hat man auch das allgemeine Integral derſelben mit den erforderen n Conſtanten. Die Ordnung der zu integrirenden Gleichung ſinkt um e Einheit herab, wenn man ein particuläres Integral derſelben kennt, u. ſ. f. 462).

Die n particulären Integrale laſſen ſich leicht erhalten, wenn die Coefenten P, Q, ... U Conſtanten ſind; denn wenn man $y_x = m^x$, folglich $_i = m^{x+i}$ ſetzt, ſo hat man zur Beſtimmung von m die algebraiſche Gleichung:

$$m^n + Pm^{n-1} + Qm^{n-2} + \ldots\ldots + U = 0, \qquad (m)$$

o wenn man die Wurzeln derſelben mit $m_1, m_2, \ldots m_n$ bezeichnet, ſo mmt das allgemeine Integral der Gleichung (b) folgende Form an:

$$y_x = C_1 m_1^x + C_2 m_2^x + \ldots\ldots + C_n m_n^x.$$

§. 609. Wir wollen das Vorhergehende auf eine merkwürdige Aufgabe combinatoriſchen Analyſis anwenden, welche ſich folgendermaßen ausdrücken it, wenn man der Kürze wegen die Zahl m den Exponenten einer Comation aus je m Elementen nennt:

„Unter der Geſammtzahl der Combinationen, welche man s x Elementen bilden kann, wenn man ſie zu je 1, je 2, je 3,... x verbindet, die Anzahl der Combinationen zu beſtimmen,

deren Exponenten, durch einen gewiſſen Modulus n dividirt, eine der Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots n-1$ zum Reſte geben."

Wir wollen die geſuchten Zahlen, welche ebenſo viele discontinuirliche Functionen von x ſind, mit $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots y^{(n)}$ bezeichnen.

Wenn x um eine Einheit zunimmt, ſo iſt klar, daß die Combinationen der r^{ten} Claſſe, d. h. die, deren Exponent durch n dividirt, den Reſt r gibt, durch Verbindung mit dem neuen Elemente Combinationen der $r+1^{ten}$ Claſſe werden, und daß ferner dieſes Element, allein genommen, eine neue Combination mit dem Exponenten 1 gibt. Man hat alſo:

$$\Delta y^{(0)} = y^{(n-1)},\ \Delta y^{(1)} = y^{(0)} + 1\ \Delta y^{(2)} = y^{(1)}, \ldots.$$
$$\ldots. \Delta y^{(n-1)} = y^{(n-2)}, \qquad (c_1)$$

und folglich:

$$\Delta^2 y^{(0)} = \Delta y^{(n-1)},\ \Delta^2 y^{(1)} = \Delta y^{(0)},\ \Delta^2 y^{(2)} = \Delta y^{(1)}, \ldots.$$
$$\ldots. \Delta^2 y^{(n-1)} = \Delta y^{(n-2)}. \qquad (c_2)$$

Beſtimmt man die ſucceſſiven Differenzen bis zu denen der n^{ten} Ordnung, ſo findet man endlich:

$$\Delta^n y^{(0)} = \Delta^{n-1} y^{(n-1)},\ \Delta^n y^{(1)} = \Delta^{n-1} y^{(0)}, \ldots. \Delta^n y^{(n-1)} = \Delta^{n-1} y^{(n-2)}, \qquad (c_n)$$

und die Elimination zwiſchen den Gleichungen $(c_1), (c_2), \ldots (c_n)$ gibt:

$$\Delta^n y^{(0)} = y^{(0)} + 1 \qquad (d_0)$$
$$\Delta y^{(1)} = y^{(1)},\ \Delta^n y^{(2)} = y^{(2)}, \ldots. \Delta^n y^{(n-1)} = y^{(n-1)}. \qquad (d)$$

Jede der Gleichungen (d) iſt von der Form $\Delta^n y_x = y_x$, woraus folgt, wenn man die Differenzen durch die ſucceſſiven Werthe ausdrückt (§. 582):

$$y_{x+n} - \frac{n}{1} \cdot y_{x+n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot y_{x+n-2} - \ldots. \pm y_x = y_x.$$

Wenn n eine gerade Zahl iſt, ſo verſchwindet das Glied mit y_x, die Ordnung der Gleichung ſinkt um eine Einheit herab, und man hat:

$$y_{x+n-1} - \frac{n}{1} \cdot y_{x+n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot y_{x+n-3} - \ldots. - \frac{n}{1} \cdot y_x = 0. \qquad (d_1)$$

Wenn n eine ungerade Zahl iſt, ſo hat man:

$$y_{x+n} - \frac{n}{1} \cdot y_{x+n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot y_{x+n-2} - \ldots. - 2y_x = 0. \qquad (d_2)$$

Im erſten Falle verwandelt ſich die Gleichung (m) in:

$$\frac{(m-1)^n - 1}{m} = 0,$$

und im zweiten in:

$$(m-1)^n - 1 = 0,$$

woraus folgt (§. 79):

$$m = 1 + \cos.\frac{2i\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \cdot \sin.\frac{2i\pi}{n}$$
$$= 2\cos.\frac{i\pi}{n}\left(\cos.\frac{i\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \cdot \sin.\frac{i\pi}{n}\right),$$

und wenn man die imaginären Exponentialgrößen gehörig transformirt:

$$\left.\begin{aligned} y_x &= C \cdot 2^x \\ &+ M_1 \left(2\cos.\frac{\pi}{n}\right)^x \cos.\frac{\pi x}{n} + M_2 \left(2\cos.\frac{2\pi}{n}\right)^x \cos.\frac{2\pi x}{n} + \text{ꝛc.} \\ &+ N_1 \left(2\cos.\frac{\pi}{n}\right)^x \sin.\frac{\pi x}{n} + N_2 \left(2\cos.\frac{2\pi}{n}\right)^x \sin.\frac{2\pi x}{n} + \text{ꝛc.} \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

Wenn man nun für y_x ſucceſſive jede der Functionen $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(n-1)}$ nimmt, ſo ergeben ſich aus der Formel (e) die Werthe aller dieſer Functionen von x, welche ſich nur durch die Beſtimmung der willkürlichen Conſtanten C, M_1, N_1, M_2, N_2, ꝛc. unterſcheiden, und was die Gleichung (d_0) anlangt, ſo iſt klar, daß die Formel (e) auch das Integral derſelben gibt, wofern man zu dem zweiten Theile die conſtante Zahl — 1 addirt. Ueberdies iſt nach dem binomiſchen Lehrſatze bekanntlich:

$$y^{(0)} + y^{(1)} + y^{(2)} + \ldots\ldots + y^{(n-1)} = 2^x - 1.$$

Wenn man z. B. $n = 4$ ſetzt, und die willkürlichen Conſtanten gehörig beſtimmt, ſo findet man:

$$y^{(0)} = \frac{1}{4} \cdot 2^x + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^x \cos.\frac{1}{4}\pi x - 1,$$

$$y^{(1)} = \frac{1}{4} \cdot 2^x + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^x \sin.\frac{1}{4}\pi x,$$

$$y^{(2)} = \frac{1}{4} \cdot 2^x - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^x \cos.\frac{1}{4}\pi x,$$

$$y^{(3)} = \frac{1}{4} \cdot 2^x - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^x \sin.\frac{1}{4}\pi x.$$

§. 610. Zuweilen kann man die Integrale der Differenzengleichungen durch gewöhnliche beſtimmte Integrale ausdrücken, und um den Geiſt des Verfahrens kennen zu lehren, wollen wir die Differenzengleichung:

$$y_{x+1}(m + x) + y_x(m + 2x) = 0$$

betrachten, worin m eine poſitive Conſtante ſein ſoll. Wir wollen

$$y_x = \int \Omega \omega^x d\omega$$

ſetzen, wo Ω eine Function von ω bezeichnet, worin x nicht vorkommt, ſo kommt es darauf an, dieſe Function und die Grenzen des Integrales ſo zu beſtimmen, daß die gegebene Differenzengleichung erfüllt wird.

Dieſe Gleichung gibt:

$$(m + x)\int \Omega \omega^{x+1} d\omega + (m + 2x)\int \Omega \omega^x d\omega = 0,$$

oder:

$$m\int \Omega (1 + \omega)\omega^x d\omega + \int \Omega (2\omega + \omega^2) d \cdot \omega^x = 0. \quad (f)$$

Aber wenn man theilweiſe integrirt, ſo erhält man:

$$\int \Omega (2\omega + \omega^2) d \cdot \omega^x = \Omega (2\omega + \omega^2)\omega^x - \int \omega^x d[\Omega (2\omega + \omega^2)].$$

Folglich verwandelt ſich die Gleichung (f), wenn man zwei Wurzeln der Gleichung:

$$\Omega (9\omega + \omega^2) = 0 \quad (\omega)$$

zu den Grenzen des Integrales nimmt, in:

$$\int \{m(1 + \omega)\Omega d\omega - d[\Omega (2\omega + \omega^2)]\}\omega^x = 0,$$

und man genügt derſelben unabhängig von x, wenn man die Function Ω durch die Differenzialgleichung:

$$m(1+\omega)\,\Omega d\omega - d[\Omega(2\omega+\omega^2)] = 0$$

beſtimmt, welche gibt:

$$\Omega = C(2\omega+\omega^2)^{\frac{m}{2}-1},$$

wo C eine willkürliche Conſtante bezeichnet. Subſtituirt man dieſen Werth von Ω in die Gleichung (ω), ſo verwandelt ſie ſich in:

$$C(2\omega+\omega^2)^{\frac{m}{2}} = 0,$$

und da m nach der Vorausſetzung poſitiv iſt, ſo geſchieht derſelben Genüge, wenn man $\omega = 0$, $\omega = -2$ zu den Grenzen des Integrales nimmt, woraus folgt:

$$y_x = C\int_0^{-2}(2\omega+\omega^2)^{\frac{m}{2}-1}\,\omega^x d\omega.$$

Der Ausdruck wird eleganter, wenn man

$$\omega = \cos.\alpha - 1,\quad 2\omega+\omega^2 = -\sin.^2\alpha,\quad d\omega = -\sin.\alpha\,d\alpha$$

ſetzt, welches gibt:

$$y_x = C(-1)^x\int_0^{\pi}(1-\cos.\alpha)^x(\sin.\alpha)^{m-1}\,d\alpha.$$

Zur Beſtimmung der willkürlichen Conſtanten C vermittelſt des anfänglichen Werthes y_0 hat man ferner die Gleichung:

$$y_0 = C\int_0^{\pi}(\sin.\alpha)^{m-1}\,d\alpha.$$

§. 611. Um ein Beiſpiel der Integration für den Fall zu geben, wo die Differenz der einen Veränderlichen nicht als conſtant betrachtet wird, wollen wir annehmen, es ſollte die Größe y_x als Function von x beſtimmt werden, welche der Gleichung:

$$y_{2x} = y_x^2 - 2 \qquad (g)$$

genügt, oder das allgemeine Glied der Reihe der Werthe von y, welche man vermittelſt dieſer Gleichung conſtruirte, wenn die anfänglichen Werthe von x, y reſp. x_0, y_0 ſind. Es ſei i der Index der in den Reihen der Werthe von x und von y einander entſprechenden beiden Glieder, ſo hat man:

$$x_{i+1} = 2x_i, \qquad (g_1) \qquad y_{i+1} = y_i^2 - 2. \qquad (g_2)$$

Die Gleichung (g_1) iſt linear und ihr Integral iſt:

$$x_i = x_0 \cdot 2^i.$$

Wenn man den anfänglichen Werth y_0 auf die Form:

$$y_0 = c + \frac{1}{c} \qquad (h)$$

bringt, ſo gibt die Gleichung (g_2):

$$y_1 = c^2 + \frac{1}{c^2},\quad y_2 = c^4 + \frac{1}{c^4},\quad \ldots\ y_i = c^{2^i} + \frac{1}{c^{2^i}}$$

und folglich:

$$y_x = c^{\frac{x}{x_0}} + c^{-\frac{x}{x_0}}.$$

Es iſt zu bemerken, daß die letzte Gleichung, welche das vollſtändige Integral von (ε) iſt, zwei willkürliche und unabhängige Conſtanten x_0, c, oder x_0, y_0 enthält, weil in der That die Gleichung (ε) erſt dann conſtruirt werden kann, wenn man ſie in das Syſtem der Gleichungen (ε_1), (ε_2), transformirt, und x_0, y_0 willkürlich angenommen hat.

II. Ueber die arithmetiſche Conſtruction der Differenzengleichungen mit zwei Veränderlichen. — Folgerungen in Beziehung auf die Vielheit der allgemeinen Integrale, auf die Exiſtenz der ſingulären Integrale, und in Beziehung auf den Uebergang von dem Endlichen zu dem unendlich Kleinen.

612. Wir wollen wieder die Differenzengleichung:

$$F(x, y, \Delta y) = 0 \qquad (F)$$

arithmetiſch zu conſtruiren ſuchen, und annehmen, daß man aus derſelben zwei Werthe von Δy als Functionen von x, y ableiten kann. Nachdem man den anfänglichen Werth y_0, welcher einem beſtimmten Werthe von x, z. B. $x = 0$ entſpricht, willkürlich angenommen hat, erhält man, je nachdem man den einen, oder den andern der beiden durch die Gleichung F gegebenen Werthe von Δy wählt, zwei verſchiedene Werthe von y_1, wovon jedem aus demſelben Grunde zwei verſchiedene Werthe von y_2 entſprechen, ſo daß man für die Partialreihe (y_0, y_1, y_2) vier verſchiedene Syſteme von Werthen hat. Für die Partialreihe (y_0, y_1, y_2, y_3), welche ein Glied mehr enthält, würde man acht verſchiedene Syſteme von Werthen erhalten, u. ſ. f. Allgemein, wenn die Gleichung (F) für Δy, m verſchiedene Werthe gibt, ſo kann die Partialreihe $(y_0, y_1, y_2, \ldots y_n)$ nach dieſer Gleichung auf eben ſo viele verſchiedene Weiſen conſtruirt werden, als Einheiten in m^n enthalten ſind. Die als Beiſpiel genommene Differenzengleichung iſt zwar nur von der erſten Ordnung; allein dieſelben Bemerkungen ſind auch auf eine Differenzengleichung von einer beliebigen Ordnung anwendbar.

Wenn ſich unter den auf dieſe Weiſe aus der Gleichung (F) arithmetiſch abgeleiteten verſchiedenen Reihen mehrere befinden, deren allgemeines Glied durch eine algebraiſche oder transcendente Function des Index und des anfänglichen Werthes y_0, oder einer die Stelle deſſelben vertretenden willkürlichen Conſtante ausgedrückt werden kann; ſo hat die gegebene Gleichung mehrere verſchiedene Integrale, welche aber alle vollſtändig ſind, weil ſie eine willkürliche Conſtante enthalten. Zu dieſem Reſultate gelangt man in der That auf eine indirecte Weiſe, wenn man, ſtatt von der Differenzengleichung zu dem vollſtändigen Integrale mit einer willkürlichen Conſtante über zu gehen, von einer Gleichung zwiſchen x, y, und einer Conſtanten zu einer Differenzengleichung übergeht, woraus dieſe Conſtante eliminirt iſt.

Wir wollen z. B. die ſehr einfache Gleichung:

$$y = ax + a^2 \qquad (1)$$

nehmen, welche durch Differenziren für $\Delta x = 1$

$$\Delta y = a, \qquad (2)$$

und durch die Elimination der Conſtanten (a):

$$\Delta y^2 + x\Delta y - y = 0 \qquad (3)$$

gibt, woraus folgt, daß die Gleichung (1) das vollſtändige Integral der Gleichung (3) iſt.

Betrachten wir nun in der Gleichung (1) den Parameter a als eine veränderliche Function von x und ſetzen den Theil der Veränderung des zweiten Theiles der Gleichung (1), welcher von der Veränderung von a herrührt, für ſich = 0, damit die Gleichungen (2) und (3) noch ſtattfinden; ſo erhalten wir:

$$\Delta a\,(\Delta a + 2a + x + 1) = 0,$$

und dieſe Gleichung zerfällt in die beiden andern:

$$\Delta a = 0,\quad \Delta a + 2a + x + 1 = 0. \qquad (4)$$

Die erſte gibt $a = \text{const.}$, ſo daß man wieder auf die Gleichung (1) kommt, und auf die zweite könnte man die allgemeine Formel im §. 607 für die Integration der linearen Differenzengleichungen der erſten Ordnung anwenden; allein wenn man unmittelbar $a = u + mx + n$ ſetzt, wo u eine neue Function von x und m, n willkürliche Conſtanten bezeichnen; ſo erhält man:

$$\Delta u + 2u + (2m + 1)\,x + 2n + m + 1 = 0,$$

oder einfacher, wenn man $m = -\frac{1}{2}$, $n = -\frac{1}{4}$ ſetzt:

$$\Delta u + 2u = 0. \qquad (5)$$

Das vollſtändige Integral der Gleichung (5), welche man auf die Form $u_{x+1} + u_x = 0$ bringen kann, iſt:

$$u_x = b\,(-1)^x,\ \text{folglich:}\ a = b\,(-1)^x - \frac{x}{2} - \frac{1}{4},$$

wo (b) eine willkürliche Conſtante bezeichnet. Dieſer Werth von a muß in die Gleichung (1) ſubſtituirt werden, und wenn man zur Erleichterung dieſer Subſtitution dieſe Gleichung auf die Form

$$y = \left(a + \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}$$

bringt, ſo erhält man:

$$y = \left[b\,(-1)^x - \frac{1}{4}\right]^2 - \frac{x^2}{4}. \qquad (6)$$

Man erhält alſo eine Gleichung mit x, y, welche die Eigenſchaft hat, daß ſie der Gleichung (3) genügt, und welche, ſowohl als die Gleichung (1) ein vollſtändiges Integral derſelben iſt, weil ſie die willkürliche Conſtante (b) enthält.

§. 613. Der Geometer Charles, welcher zuerſt die Vielheit der Integrale der Differenzengleichungen angegeben hat, unterſcheidet dieſe Integrale in directe und indirecte. Nach ſeiner Sprache wäre alſo die Gleichung (1) das directe, und die Gleichung (6) das indirecte Integral der Gleichung (3), allein dieſe Ausdrücke müſſen verworfen werden, weil ſie zu unrichtigen Vorſtellungen Veranlaſſung geben. Wenn es wahr iſt, daß, wenn man auf die oben angegebene Weiſe verfährt, d. h. das Integral (1) unmittelbar annimmt, um daraus die Differenzengleichung (3), und dann das zweite Integral (6) abzuleiten, dieſe nur auf eine indirecte Weiſe erhalten iſt, ſo iſt es auch wahr, daß, wenn man zuerſt die Differenzengleichung annimmt, die beiden derſelben genügenden Integrale, welche beide durch eine willkürliche Conſtante ergänzt werden, ebenfalls directe ſind, obgleich das eine zufällig eine einfachere algebraiſche Form haben kann. Denn nichts hindert, die Gleichung (6) ebenſo zu behandeln, wie man die Gleichung (1) behandelt hat, indem man den Parameter b als eine Function von x betrachtet, und die

Summe der von der Veränderung dieſes Parameters herrührenden Glieder für ſich $= 0$ ſetzt. Die Gleichung mit b iſt nach allen vorgenommenen Vereinfachungen:

$$\Delta b + 2b + \tfrac{1}{2}(-1)^x = 0,$$

und wenn man darauf die Formel im §. 607 anwendet, ſo erhält man:

$$b = \tfrac{1}{2}x(-1)^x + c(-1)^x,$$

wo c eine willkürliche Conſtante bezeichnet. Wird dieſer Werth von b in die Gleichung (6) ſubſtituirt, ſo erhält man:

$$y = \left[\frac{1}{2}x(-1)^{2x} + c(-1)^{2x} - \frac{1}{4}\right]^2 - \frac{x^2}{4} = \left(\frac{1}{2}x + c - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{x^2}{4},$$

und wenn man endlich die Conſtante vertauſcht, indem man $c - \frac{1}{4} = a$ ſetzt, ſo kommt man wieder auf die Gleichung (1), welche folglich auf dieſelbe Weiſe aus dem Integrale (6) entſpringt, wie die Gleichung (6) aus dem Integrale (1).

Man kann auch durch ein anderes Verfahren die Integralen (1) und (6) zu gleicher Zeit erhalten; denn wenn man die Gleichung (3) differenzirt, ſo erhält man die Differenzengleichung der zweiten Ordnung:

$$\Delta^2 y(\Delta^2 y + 2\Delta y + x + 1) = 0,$$

welche in die beiden andern:

$$\Delta^2 y = 0, \quad \Delta^2 y + 2\Delta y + x + 1 = 0$$

zerfällt. Die erſte gibt $\Delta y = a$, und wenn man dieſen Werth von Δy in die Gleichung (3) ſubſtituirt, ſo erhält man das Integral (1) wieder. Wenn man die zweite Gleichung, wie die zweite der Gleichungen (4) ein erſtes Mal integrirt, ſo erhält man:

$$\Delta y = b(-1)^x - \frac{x}{2} - \frac{1}{4},$$

und wenn dieſer andere Werth von Δy ſeinerſeits in die Gleichung (3) ſubſtituirt wird, ſo erhält man das Integral (6) wieder.

Man bemerkt leicht die Aehnlichkeit, welche zwiſchen dieſen Rechnungen und denen ſtattfindet, welche die ſingulären Integrale der Differenzialgleichungen geben, deren allgemeines Integral man kennt; allein dieſe Aehnlichkeit iſt bei weitem nicht vollſtändig, weil hier jedes der beiden erhaltenen Integrale eine willkürliche Conſtante enthält, und weil, wenn in einer gewiſſen Beziehung eine Aehnlichkeit mit den ſingulären Integralen ſtattfinden ſollte, die Reciprocität der zwiſchen den beiden Integralen der Differenzengleichung ſtattfindenden Verhältniſſe es nothwendig machen würden, daß man jedes dieſer Integrale als ein ſinguläres Integral in Beziehung auf das andere betrachten müßte.

§. 614. Poiſſon hat dieſe Art der gegenſeitigen Ableitung aus einem andern Geſichtspunkte betrachtet, welcher gekannt zu werden verdient.

Wir wollen uns die Gleichung (1), als in Beziehung auf die Conſtante aufgelöſ't und auf die Form:

$$(a - u)(a - v) = 0 \qquad (7)$$

gebracht, vorſtellen, wo u, v im Allgemeinen Functionen von x, y ſind. Es ſeien u_1, v_1 die Werthe von u, v, wenn ſich x, y reſp. in $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ verwandeln, ſo hat man auch:

$$(a - u_1)(a - v_1) = 0, \qquad (8)$$

und die Elimination von a läuft auf die Elimination derſelben Conſtanten zwiſchen der urſprünglichen Gleichung (1) und ihrer Differenzengleichung (2) hinaus. Das Reſultat dieſer Elimination iſt offenbar die Differenzengleichung:

$$(u_1 - u)(u_1 - v)(v_1 - u)(v_1 - v) = 0, \qquad (9)$$

welche folglich mit der Gleichung (3) identiſch ſein muß. Nun zerfällt aber die auf dieſe Form gebrachte Endgleichung in die vier andern:

$$u_1 - u = 0,\ v_1 - v = 0,\ u_1 - v = 0,\ v_1 - u = 0.$$

Die beiden erſten geben unmittelbar die übereinſtimmenden Integrale $u = a$, $v = a$, wenn man vermittelſt der urſprünglichen Gleichung (1) die Wurzelgrößen fortſchafft, und die beiden andern Gleichungen führen genau auf das Integral, welches Charles im Gegenſatz zu dem urſprünglichen Integrale, von welchem man ausgegangen iſt, das indirecte Integral nennt.

In dem betrachteten Beiſpiele hat man:

$$u = \tfrac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 + 4y}),\ v = \tfrac{1}{2}(-x - \sqrt{x^2 + 4y}),$$

welches gibt:

$$u_1 - v = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{(x+1)^2 + 4(y + \Delta y)} + \sqrt{x^2 + 4y}) = 0$$

$$v_1 - u = \tfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{(x+1)^2 + 4(y + \Delta y)} - \sqrt{x^2 + 4y}) = 0.$$

Zur Erleichterung der Integration wollen wir die Veränderliche vertauſchen, indem wir $\sqrt{x^2 + 4y} = z$ ſetzen; ſo verwandeln ſich dieſe Gleichungen in:

$$-1 + z_1 + z = 0,\quad 1 + z_1 + z = 0,$$

oder vielmehr:

$$\Delta z + 2z - 1 = 0,\quad \Delta z + 2z + 1 = 0,$$

und die Integration gibt:

$$z = \tfrac{1}{2} + b'(-1)^x,\quad z = -\tfrac{1}{2} + b''(-1)^x,$$

wo b', b'' willkürliche Conſtanten bezeichnen. Hieraus ergibt ſich:

$$y = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} + b'(-1)^x\right]^2 - \frac{x^2}{4},$$

$$y = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2} + b''(-1)^x\right]^2 - \frac{x^2}{4},$$

und dieſe Gleichungen ſind mit dem Integrale (6) identiſch, wenn man, wie es erlaubt iſt, $b' = -2b$, $b'' = 2b$ ſetzt.

Wenn man die Hülfsveränderliche z beibehält, ſo nimmt die Gleichung (9), welche eine Transformation der Gleichung (3) iſt, folgende Form an:

$$(-1 + z_1 - z)(-1 + z_1 + z)(-1 - z_1 - z)(-1 - z_1 + z) = 0, \qquad (10)$$

und es wird derſelben offenbar Genüge geleiſtet, entweder durch einen Werth von z als Function von x, welcher einen der Factoren für alle Zahlenwerthe von x zu Null macht, oder durch einen Werth von z, welcher ſucceſſive bald den einen und bald den andern dieſer Factoren auf Null reducirt. Dieſer letzte Fall findet ſtatt, wenn man für z das Integral der Gleichung:

$$-1 + (-1)^X z_1 - z = 0 \qquad (11)$$

nimmt, wo X eine beliebige Function von x bezeichnet, welche für alle ganzen Werthe von x eine ganze Zahl iſt; denn die Function $(-1)^X$ nimmt den Werth $+1$ oder -1 an, je nachdem X eine gerade oder ungerade Zahl

ſt, und der erſte Theil der Gleichung (11) fällt mit dem erſten oder mit em dritten Factor der Gleichung (10) zuſammen.

Um die Gleichung (11) zu integriren, braucht man nur den erſten Theil erſelben durch:

$$(-1)^{\Sigma X}$$

multipliciren; denn alsdann nimmt ſie die Form:

$$-(-1)^{\Sigma X} + \Delta[(-1)^{\Sigma X} z] = 0$$

, woraus folgt:

$$(-1)^{\Sigma X} z = \text{const.} + \Sigma \cdot [(-1)^{\Sigma X}].$$

Dieſes Reſultat wird vereinfacht, wenn man bemerkt, daß das Integral X, wie die Function X für alle ganzen Werthe von x ebenfalls ganze erthe annehmen muß. Das Quadrat der Function:

$$(-1)^{\Sigma X}$$

folglich beſtändig $= 1$, und wenn man daher die beiden Theile der vorgehenden Gleichung zum Quadrate erhebt, indem man X für die willkürhe Function ΣX ſetzt, ſo erhält man:

$$z^2 = x^2 + 4y = [\text{const.} + \Sigma(-1)^X]^2. \qquad (12)$$

Aus dieſer Formel ergibt ſich das Integral (1) oder das Integral (6) ieder, je nachdem man $X = 1$ oder $X = x$ nimmt; aber man kann daraus ch unendlich viele andere Integrale ableiten, wenn man der Function X ndere Formen gibt.

Wenn man durch X' eine Function von x bezeichnet, welche, wie X, r alle ganzen Werthe von x eine ganze Zahl iſt, ſo muß das Integral der leichung:

$$-1 + (-1)^X z_1 - (-1)^{X'} z = 0$$

enfalls der Gleichung (z) genügen; aber wenn man dieſe Integration verhtet, ſo findet man, daß die beiden willkürlichen Functionen X und X' in m Integrale in eine einzige zuſammenfallen, und man kommt wieder auf die leichung (12).

Dieſe Bemerkungen über die unbeſtimmte Vielheit der Integrale gewiſſer ifferenzengleichungen rühren ebenfalls von Poiſſon her und machen den egenſtand einer Abhandlung aus, durch welche dieſer eminente Geometer ne ſo glorreiche und für die Wiſſenſchaften ſo erfolgreiche Laufbahn begonnen t. Man ſieht übrigens leicht ein, daß dieſe unbeſtimmte Vielheit der Inrale davon herrühren muß, daß man arithmetiſch unendlich viele verſchiedene eihen conſtruiren kann, welche alle ein gemeinſchaftliches erſtes Glied haben, ıd alle derſelben Differenzengleichung Genüge leiſten, wenn dieſe in Bethung auf die Differenz der höchſten Ordnung aufgelöſ'te Gleichung mehrere urzeln hat. Aber es kam darauf an, zu beweiſen, daß es unter allen dieſen eihen unendlich viele gibt, deren allgemeines Glied man analytiſch ausdrücken nn, was durch die vorhergehende Unterſuchung außer allen Zweifel geſetzt wird.

§. 615. Es iſt wohl zu bemerken, daß der Uebergang von einem Factor einem andern nicht blos für die Integrale, welche man in der vorherhenden Analyſe durch die Einführung des Factors $(-1)^X$ erhält, ſondern ch für die von Charles ſogenannten directen und indirecten Integrale ſtattden kann. Geſetzt z. B., man hätte für $x = 0$, $y = 1$, und folglich $z = 2$, geben die vier Factoren des erſten Theiles der Gleichung (10), einzeln 0 geſetzt und nach dieſer anfänglichen Bedingung integrirt:

$z = x + 2$, folglich: $y = x + 1$,

$z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(-1)^x$, $y = \frac{1}{16}\{[3(-1)^x + 1]^2 - 4x^2\}$,

$z = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}(-1)^x$, $y = \frac{1}{16}\{[5(-1)^x - 1]^2 - 4x^2\}$,

$z = -x + 2$, $y = -x + 1$.

Die erſte Gleichung gibt für z einen negativen Werth, wenn x negative Werthe annimmt, welche numeriſch größer als 2 ſind, wogegen die vierte Gleichung für alle größern poſitiven Werthe von x, als 2 negative Werthe von z gibt, und der aus der zweiten oder dritten Gleichung abgeleitete Werth von z iſt poſitiv oder negativ, je nachdem man für x eine gerade oder ungerade Zahl nimmt. Die Gleichung $y = x + 1$ genügt alſo der Differenzengleichung:

$$\Delta y = \tfrac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 + 4y}) \qquad (13)$$

für alle Werthe von $x > -2$, und dagegen der Differenzengleichung:

$$\Delta y = \tfrac{1}{2}(-x - \sqrt{x^2 + 4y}) \qquad (14)$$

für alle Werthe von $x < -2$. Was die Gleichungen:

$$y = \frac{1}{16}\{[3(-1)^x + 1]^2 - 4x^2\}$$

$$y = \frac{1}{16}\{[5(-1)^x - 1]^2 - 4x^2\}$$

anlangt, ſo leiſten ſie abwechſelnd der Gleichung (13) und der Gleichung (14) Genüge.

§. 616. Die verſchiedenen Integrale, welche eine endliche Differenzengleichung haben kann, ſtehen in ähnlichen Beziehungen zu einander, wie die ſingulären und allgemeinen Integrale der Differenzialgleichungen; allein dieſe Analogie iſt, wie ſchon bemerkt, nur eine partielle und unvollſtändige. Wenn man es als eine charakteriſtiſche Eigenſchaft der ſingulären Integrale betrachtet, daß ſie durch keine willkürliche Conſtante vollſtändig gemacht werden können, ſo verſchwindet die in Rede ſtehende Analogie; aber andererſeits kann man, wie Poiſſon ebenfalls gezeigt hat, für gewiſſe Differenzengleichungen ſinguläre Integrale angeben, welche nicht auf die durch die vorhergehenden Methoden beſtimmten Integrale zurückkommen, und welche den ſingulären Integralen der Differenzialgleichungen in ſo fern analog ſind, daß ſie nicht durch eine willkürliche Conſtante zu vollſtändigen Integralen gemacht werden können. Denn die Rechnung im §. 477 iſt auf die Differenzengleichungen, wie auf die Differenzialgleichungen anwendbar, und hieraus folgt ebenfalls, daß jeder Werth von y als Function von x, welcher die Eigenſchaft hat, einer gegebenen Differenzengleichung Genüge zu leiſten und zugleich den Differenzialcoefficienten $\frac{d\Delta y}{dy}$ unendlich zu machen, nur ein ſinguläres Integral der gegebenen Gleichung in dem eben erklärten Sinne ſein kann. Es ſei die Differenzengleichung:

$$y + \frac{4}{3}\Delta y - \frac{4}{9}(64)^x \Delta y^3 = 0 \qquad (15)$$

gegeben, deren vollſtändiges Integral:

$$y = \frac{a}{4^x} - \frac{3}{16}a^2 \qquad (16)$$

, wo a eine willkürliche Conſtante bezeichnet; ſo ergibt ſich daraus der erth:

$$\frac{d\Delta y}{dy} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(64)^x \Delta y^2 - 1},$$

lcher unendlich wird, wenn man:

$$(64)^x \Delta y^2 - 1 = 0$$

ßt. Eliminirt man Δy zwiſchen dieſer Gleichung und der gegebenen, ſo erlt man:

$$y^2 = \frac{64}{81} \cdot \frac{1}{64^x},$$

ıd dieſer letzten Gleichung wird genügt, wenn man:

$$y = \pm\frac{8}{9}\left(\frac{1}{8}\right)^x, \text{ oder } y = \pm\frac{8}{9} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^x$$

ßt; aber das erſte Werthepaar genügt der gegebenen Gleichung nicht, wähnd die beiden letzten Werthe von y, welche dieſer Gleichung genügen, zwei ıguläre Integrale der Gleichung (15) geben.

Die Gleichung (16), welche die Werthe der willkürlichen Conſtanten a r jedes Syſtem der anfänglichen Werthe von x und y beſtimmt, hat im llgemeinen drei ungleiche Wurzeln; aber ſie bekommt zwei gleiche Wurzeln, nn die x und y beigelegten Werthe dem ſingulären Integrale Genüge leiſten.

Der Werth $y = 0$ erfüllt die gegebene Gleichung, iſt aber kein ſinguläres ntegral derſelben, weil man denſelben erhält, wenn man in der Gleichung 6), $a = 0$ ſetzt.

§. 617. Eine Gleichung, worin ein conſtanter Parameter nur auf der ſten Potenz vorkommt; aber worin die Veränderliche y zum Quadrate oder höhern Potenzen erhoben iſt, führt durch die Elimination dieſes Parameters Beziehung auf Δy zu einer Differenzengleichung von einem höhern Grade. ir wollen z. B. die Gleichung:

$$ay^2 - x = 0 \qquad (17)$$

ımen, ſo ergibt ſich daraus durch Elimination von a die Differenzengleichung:

$$\Delta y^2 + 2y\Delta y - \frac{y^2}{x} = 0, \qquad (18)$$

er in Beziehung auf Δy aufgelöſ't:

$$\Delta y = y\left(-1 \pm \sqrt{\frac{x+1}{x}}\right).$$

Offenbar gibt die arithmetiſche Conſtruction dieſer Differenzengleichung : daſſelbe Syſtem anfänglicher Werthe unendlich viele verſchiedene Reihen, d dennoch kann man, indem man die Conſtante a in der Gleichung (17) riiren läßt, auf indirecte Weiſe keine andern Integrale aus der Gleichung 3) ableiten. Aber wenn man dieſelbe Gleichung (17) in Beziehung auf y löſ't, ſo nimmt ſie nicht blos die Werthe:

$$y = \sqrt{\frac{x}{a}}, \quad y = -\sqrt{\frac{x}{a}}$$

an, welche ſich allein daraus ableiten laſſen, wenn man y blos als eine ſtetige Function von x betrachtet, ſondern auch unendlich viele andere in der allgemeinen Formel:

$$y = \sqrt[a]{\frac{X}{}} \cdot (-1)^x$$

enthaltene Werthe, wo X eine Function von x iſt, welche blos der Bedingung zu genügen hat, daß ſie für alle ganzen Werthe von x ebenfalls ganze Werthe gibt. Die unbeſtimmte Vielheit der in dieſer Formel enthaltenen Functionen entſpricht der unbeſtimmten Vielheit von Reihen, welche man vermittelſt der Differenzengleichung arithmetiſch conſtruiren kann.

§. 618. Wir haben bisher der Einfachheit wegen $\Delta x = 1$ angenommen, und wir wollen nun den immer conſtanten Zahlenwerth dieſer Differenz unbeſtimmt laſſen. Die als Beiſpiel betrachtete Gleichung:

$$y = ax + a^2 \tag{1}$$

führt durch Elimination der Conſtanten a auf die Differenzengleichung:

$$\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + x\frac{\Delta y}{\Delta x} - y = 0. \tag{19}$$

Statt der zweiten der Gleichungen (4) hat man die Gleichung:

$$\Delta a + 2a + x + \Delta x = 0,$$

und das Integral derſelben iſt:

$$a = b\left(-1\right)^{\frac{x}{\Delta x}} - \frac{x}{2} - \frac{\Delta x}{4},$$

woraus ſich folgendes andere vollſtändige Integral der Gleichung (1) ergibt:

$$y = \left[b\,(-1)^{\frac{x}{\Delta x}} - \frac{\Delta x}{4}\right]^2 - \frac{x^2}{4}. \tag{20}$$

Wenn man nun annimmt, daß Δx und folglich Δy unendlich kleine Größen werden, ſo geht die Gleichung (19) in die Differenzialgleichung:

$$\frac{dy^2}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0 \tag{21}$$

über, und das Integral (1), worin die Differenz Δx nicht vorkommt, iſt wieder das vollſtändige Integral dieſer Differenzialgleichung wegen der darin vorkommenden willkürlichen Conſtanten. Aber da das Integral (20) eine Function:

$$b\,(-1)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

von der im §. 2 angegebenen Art enthält, welche discontinuirlich bleibt, ſelbſt wenn ſich der Exponent ſtetig ändert, ſo kann man nicht bewirken, daß der aus der Gleichung (20) gezogene Werth von y eine ſtetige Function wird, und folglich hat dieſes Integral in Beziehung auf die Gleichung (21) keinen Sinn, wofern man nicht die discontinuirliche Function dadurch fortſchafft, daß man die willkürliche Conſtante $b = 0$ ſetzt. In dieſem Falle verſchwindet

das Glied $\frac{\Delta x}{4}$ ebenfalls an der Grenze, und die Gleichung (20) gibt den Werth:

$$y = -\frac{x^2}{4},$$

welcher der Gleichung (21) genügt und ein ſinguläres Integral derſelben iſt, weil man es nicht aus der Gleichung (1) durch eine ſchickliche Beſtimmung der willkürlichen Conſtanten a ableiten kann.

Daſſelbe erhellet vielleicht noch deutlicher, wenn man:

$$b \cos. \frac{\pi x}{\Delta x} \text{ für } b(-1)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

ſetzt, was erlaubt iſt, ſo lange x eine discontinuirliche Veränderliche bezeichnet, welche nach conſtanten Incrementen Δx wächſt. Den Werth dieſes letzten Ausdruckes angeben, wenn Δx verſchwindet, hieße die Grenze angeben, gegen welche derſelbe convergirt, wenn Δx gegen Null convergirt. Dieſe Grenze iſt aber nach der Natur der Function unbeſtimmt, und läßt ſich nicht angeben. Man weiß blos, daß der Factor $\cos. \frac{\pi x}{\Delta x}$ immer zwiſchen den Grenzen $+1$ und -1 liegt, und daß folglich die unbeſtimmte Größe $b \cos. \frac{\pi x}{\Delta x}$ jedesmal verſchwindet, wenn man die Conſtante $b = 0$ ſetzt.

§. 619. Dieſe analytiſchen Facta ſtimmen vollkommen mit dem überein, was wir über die Natur der continuirlichen und discontinuirlichen Functionen, und von dem Uebergange von dem Endlichen zu dem unendlich Kleinen durch die Betrachtung der Grenzen wiſſen, ohne daß man daraus, wie Lagrange gethan hat *), den allgemeinen Schluß ziehen darf: „daß man bei dem Uebergange von dem Endlichen zu dem unendlich Kleinen alle die Glieder ganz hinweglaſſen muß, welche das unendlich Kleine enthalten können, obgleich dieſe Glieder ſelbſt nicht unendlich klein ſein könnten, und daß der Uebergang von dem Endlichen zu dem unendlich Kleinen, wenn er auch als ein mechaniſches Rechnungshülfsmittel zuläſſig iſt, nicht dazu dienen kann, die Natur der Differenzialgleichungen kennen zu lehren;“ ſondern wir dürfen aus dem Vorhergehenden blos ſchließen, daß von den unendlich vielen vollſtändigen Integralen gewiſſer Differenzengleichungen alle, mit Ausnahme einer einzigen, Functionen von Δx enthalten, welche für $\Delta x = 0$ discontinuirlich werden. Denn wenn dieſes nicht der Fall wäre, ſo könnte man daraus, indem man zu der Grenze überginge, mehrere vollſtändige Integrale einer entſprechenden Differenzialgleichung ableiten, was ungereimt iſt. Wenn dieſe Differenzialgleichung eine ſinguläre Auflöſung geſtattet, ſo kann dieſe bald aus einem ſingulären Integrale der Differenzengleichung und bald aus einem ihrer vollſtändigen Integrale abgeleitet werden, wenn man die darin vorkommende willkürliche Conſtante gleich Null ſetzt, um die Function von Δx fortzuſchaffen, deren Vorhandenſein den Uebergang von dem Endlichen zu dem unendlich Kleinen verhindert.

Die als Beiſpiel gewählte Gleichung:

*) Leçons sur le calcul des fonctions, p. 303 et 304 de l'édit. de 1806.

$$y = \frac{a}{4^x} - \frac{3}{16}a^3 \qquad (16)$$

führt durch Elimination von a, wenn Δx einen beliebigen constanten Werth hat, auf die Differenzengleichung:

$$y + \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{1 - \frac{1}{4^{\Delta x}}} - \frac{3}{16} \cdot 64^x \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x^3} \cdot \left(\frac{\Delta x}{1 - \frac{1}{4^{\Delta x}}}\right)^3 = 0, \qquad (22)$$

welche an der Grenze:

$$y + \frac{1}{\log. 4} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{3}{16} \cdot \frac{64^x}{(\log. 4)^3} \cdot \frac{dy^3}{dx^3} = 0 \qquad (23)$$

gibt, und man kann in der That darthun, daß die Gleichung (16) das allgemeine Integral der Gleichung (23) ist. Nimmt man der Gleichung (16) in Beziehung auf (a) die Ableitung, so hat man zur Bestimmung des Werthes von a als Function von x, welcher den singulären Auflösungen der Gleichung (23) entspricht:

$$a^2 = \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{4^x},$$

woraus sich ergibt:

$$a = \pm\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^x}, \quad a = \pm\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^x,$$

und folglich:

$$y = \pm\frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8^x}, \quad y = \pm\frac{8}{9} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^x.$$

Aber das erste Werthepaar genügt der Gleichung (23) nicht, und das andere kann keine stetige Function ausdrücken. Die Gleichung (23) gestattet also keine singuläre Auflösung, obgleich die entsprechende Differenzengleichung (22) solche Auflösungen zuläßt.

Viertes Kapitel.

Von den endlichen Differenzengleichungen zwischen stetigen Veränderlichen. — Von den gemischten Differenzengleichungen und von den endlichen Differenzengleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

I. Von den endlichen Differenzengleichungen zwischen stetigen Veränderlichen.

§. 620. Wenn man eine Differenzengleichung als eine Bedingungsgleichung betrachtet, welcher eine stetige Function der unabhängigen Veränderlichen genügen muß, so kann die Function in ihrem ganzen Verlaufe nur dann bestimmt werden, wenn man die Form der Function in dem Intervalle Δx

ier auf einander folgender Werthe der unabhängigen Veränderlichen will-
lich annimmt, oder durch Bedingungen bestimmt, welche von der gegebenen
hung unabhängig sind, wenn diese von der ersten Ordnung ist, oder
man die Form der Function innerhalb des Intervalles $\Delta x + \Delta x_1$ be-
mm.., wenn die Differenzengleichung von der zweiten Ordnung ist, u. s. f.

Wenn z. B. die Differenzengleichung:

$$f(x, y, \Delta y) = 0 \qquad (1)$$

egeben ist, wo der Einfachheit wegen angenommen wird, daß x nach con-
anten, der Einheit gleichen Incrementen wächst, so kann man die Curve,
eren Ordinate y ist, für alle Werthe von x nur in so fern construiren, als
an diese Curve zwischen zwei Abscissen $x_0, x_0 + 1$, wovon die eine will-
rlich ist, nach Belieben construirt, und die Differenzengleichung bestimmt
dann den Zug der Curve in ihrem ganzen übrigen Verlaufe, weil sich daraus
e Werthe von y ergeben, welche den Abscissen:

$$\ldots; x-3, x-2, x-1, x+1, x+2, x+3, \ldots$$

tsprechen, indem x einen beliebigen zwischen x_0 und $x_0 + 1$ liegenden Werth
r Abscisse bezeichnet. Das Integral der Gleichung (1) muß also, um den-
lben Grad von Allgemeinheit zu haben, als die Gleichung, woraus es ab-
leitet ist, eine willkürliche Function einer besondern Art enthalten.

Wenn die Differenzengleichung von der zweiten Ordnung oder von der
orm:

$$f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y) = 0 \qquad (2)$$

, so muß man, um die Curve, deren Ordinate y ist, zu construiren, die-
lbe zuerst nicht blos zwischen den Abscissen $x_0, x_0 + 1$, sondern auch zwi-
)en den Abscissen $x_0 + 1, x_0 + 2$ willkürlich zeichnen, d. h. zwischen den
bscissen $x_0, x_0 + 1$ die beiden Curven zeichnen, deren Ordinaten y und Δy
id. Umgekehrt, das zweite Integral der Gleichung (2) muß, um die mög-
hst größte Allgemeinheit zu haben, zwei willkürliche Functionen enthal-
1, u. s. f.

§. 621. Wenn x eine nach constanten Incrementen sich ändernde unab-
ngige Veränderliche ist, so sind zur Einführung dieser willkürlichen Functionen
ine anderen Rechnungsverfahren erforderlich, als die bei der Integration der
ifferenzengleichungen befolgten, wenn durch diese Operation das allgemeine
lied einer Reihe bestimmt werden sollte. In der That hindert nichts, die
rch die Integration eingeführten willkürlichen Constanten als periodische
nctionen, wie:

$$\varphi\left(\sin.\ \frac{2\pi x}{\Delta x},\ \cos.\ \frac{2\pi x}{\Delta x}\right),$$

betrachten, welche jedesmal dieselben Werthe wieder annehmen, wenn x
n Δx zunimmt und übrigens willkürlich sind, sodaß $\Delta\varphi$ vermöge dieser Vor-
ssetzung für alle Werthe von x gleich Null ist, gerade so, wie wenn φ
nen constanten Parameter bezeichnete. So lange die Veränderliche y nur
e successiven Glieder einer Reihe ausdrückt, deren Index x ist, ist diese
terscheidung von weiter keiner Wichtigkeit, weil die Function φ ebenso wohl,
s eine eigentliche willkürliche Constante für die ganze Reihe der Werthe von
immer denselben Zahlenwerth behalten würde; aber wenn dagegen x und y
tige Veränderliche sind, so ändert sich die Function φ mit x, und es kommt
dann blos noch darauf an, sie so zu bestimmen, daß die Curve, deren
rdinate y ist, mit einer zwischen den Abscissen $x_0, x + \Delta x$ willkürlich be-
riebenen Curve zusammenfällt.

Es ſei $F(x, y, a) = 0$ das Integral einer Differenzengleichung der erſten Ordnung mit der willkürlichen Conſtanten a, ſo verwandelt ſich daſſelbe in

$$F(x, y, \varphi) = 0,$$

wenn man für die willkürliche Conſtante a die willkürliche Function φ ſetzt. Wir nehmen an, daß das Integral $F = 0$ keine Function wie $(-1)^x$ enthält, welche mit der vorausgeſetzten Stetigkeit der Veränderlichen x, y unverträglich iſt.

Es bezeichne fx die Ordinate der willkürlich zwiſchen den Abſciſſen $x_0, x_0 + \Delta x$ beſchriebenen Curve, ſo hat man für die zwiſchen dieſen Grenzen liegende Werthe von x:

$$F(x, fx, \varphi) = 0, \quad \text{folglich} \quad \varphi = \Phi x,$$

wo Φ eine beſtimmte und bekannte Function bezeichnet. Man braucht alſo die zwiſchen den Grenzen $x_0, x_0 + \Delta x$ gegebene Function Φx nur in eine convergirende trigonometriſche Reihe zu entwickeln, und dieſe Reihe für φ in das Integral (3) zu ſubſtituiren (Buch 5, Kap. 12).

Wenn man das zweite Integral einer Differenzengleichung der zweiten Ordnung mit zwei willkürlichen Conſtanten a, b hätte, ſo könnte man daraus zwei Gleichungen von der Form:

$$F(x, y, \Delta y, a) = 0, \quad F_1(x, y, \Delta y, b) = 0$$

ableiten, oder wenn man für a, b zwei willkürliche periodiſche Functionen φ, φ_1 ſetzt:

$$F(x, y, \Delta y, \varphi) = 0, \quad F_1(x, y, \Delta y, \varphi_1) = 0.$$

Zwiſchen den Grenzen $x_0, x_0 + \Delta x$ ſei $y = fx$, $\Delta y = f_1 x$, ſo kommt:

$$F(x, fx, f_1 x, \varphi) = 0, \quad F_1(x, fx, f_1 x, \varphi_1) = 0,$$

folglich:

$$\varphi = \Phi x, \quad \varphi_1 = \Phi_1 x,$$

und es kommt blos noch darauf an, die gegebenen Functionen Φx, $\Phi_1 x$ in trigonometriſche Reihen zu entwickeln, um dieſelben alsdann ſtatt a, b in das zweite Integral zu ſubſtituiren. Dieſelbe Rechnung iſt auf Integrale von einer beliebigen Ordnung anwendbar; aber es iſt eine Modification derſelben erforderlich, wenn die Veränderliche x ſich nicht mehr nach conſtanten Differenzen ändert.

§. 622. Wir wollen z. B. die ſchon weiter oben (§. 611) betrachtete Differenzengleichung:

$$y_{2x} = y_x^2 - 2$$

nehmen, deren Integration, wenn x und y als ſtetige Veränderliche betrachtet werden, auf die Beſtimmung der Function ψ nach der Bedingung:

$$\psi(2x) = (\psi x)^2 - 2 \tag{4}$$

hinausläuft.

Wir haben gefunden, daß man derſelben Genüge leiſtet, wenn man:

$$y = \psi x = c^{\frac{x}{x_0}} + c^{-\frac{x}{x_0}} \tag{5}$$

ſetzt; allein hier verlieren die Conſtanten x_0, c die Bedeutung, welche ſie hatten, als x, y die correſpondirenden Glieder zweier verſchiedenen Reihen bezeichneten, und wenn die Gleichung (5) als eine Auflöſung der Gleichung (4) betrachtet wird; ſo kann man, ohne die Ausdehnung dieſer Auflöſung zu beſchränken, c für $c^{\frac{1}{x_0}}$, oder was daſſelbe iſt, $x_0 = 1$ ſetzen. Man hat alſo:

$$y = \psi x = c^x + c^{-x}. \qquad (6)$$

Nun wollen wir bemerken, daß ſich dieſe Gleichung aus der Elimination zwiſchen den beiden Gleichungen:

$$x = 2^i, \quad y = e^{2^i} + e^{-2^i}$$

ergibt, wenn i eine Veränderliche bezeichnet, welche nach conſtanten und der Einheit gleichen Incrementen zunimmt. Man kann alſo für die Conſtante e eine periodiſche Function von i, wie $\varphi(\sin. 2\pi i, \cos. 2\pi i)$ ſetzen, welche ihren Werth nicht verändert, wenn i um die Einheit zunimmt, d. h. man kann ſtatt der Gleichung (6) ſetzen:

$$y = \psi x = \left[\varphi\left(\sin. \frac{2\pi \log. x}{\log. 2}, \cos. \frac{2\pi \log. x}{\log. 2}\right)\right]^x + \left[\varphi\left(\sin. \frac{2\pi \log. x}{\log. 2}, \cos. \frac{2\pi \log. x}{\log. 2}\right)\right]^{-x}, \qquad (7)$$

wo alle Formen der Function ψ, welche in der vorhergehenden Formel enthalten ſind, der Gleichung (4) genügen.

Es iſt leicht einzuſehen, daß man die Function ψ in der ganzen Ausdehnung ihres Verlaufes vermittelſt der Gleichung (4) conſtruiren könnte, wenn man die Curve, deren Ordinate durch dieſe Function ausgedrückt wird, zwiſchen den Abſciſſen x_0, $2x_0$ willkürlich beſchriebe, wo x_0 irgend eine von Null verſchiedene Abſciſſe bezeichnet. Es ſei fx dieſer zwiſchen den vorhergehenden Grenzen gegebene Werth von ψx, ſo hat man:

$$f(2^i) = \varphi 2^i_i + \frac{1}{\varphi 2^i}, \quad \text{folglich:} \quad \varphi = \Phi i. \qquad (\varphi)$$

Folglich iſt φ eine Function von i, welche immer dieſelben Werthe wieder annimmt, wenn i um die Einheit zunimmt, und zwiſchen den Grenzen:

$$i_0 = \frac{\log. x_0}{\log. 2}, \quad i_0 + 1 = \frac{\log. 2x_0}{\log. 2}$$

mit einer gegebenen Function von i zuſammenfällt. Man kann alſo φ in eine trigonometriſche Reihe von i entwickeln, für i ſeinen Werth als Function von x wieder ſetzen, und dieſen Werth von φ in die Gleichung (7) ſubſtituiren, ſo daß die Function ψx vermittelſt dieſes Werthes den entſprechenden Ausdruck bekommt.

Die beiden Glieder des letzten Theiles der Gleichung (7) reduciren ſich für $x = 0$ auf die Einheit, weil die Größen von der Form $\sin.(\pm\infty)$, $\cos.(\pm\infty)$, obgleich ſie unbeſtimmt ſind, zwiſchen endlichen Grenzen liegen (§. 618). Außerdem ergibt ſich aus der Gleichung (4) direct $\psi(0) = 2$, was für eine beſondere Form die Function ψ auch haben mag, wofern ſie nur beſtändig poſitiv bleibt, ohne welche Bedingung die Formel (7), deren letzter Theil nothwendig poſitiv iſt, nicht ſtattfinden könnte.

Differenzirt man die Gleichung (4) in Beziehung auf x, ſo erhält man $\psi'(2x) = \psi x \cdot \psi' x$, folglich $\psi'(0) = 0$, was für eine beſondere Form die Function ψ auch haben mag.

Die Formel (7) kann ſich nicht auf negative Werthe von x erſtrecken, weil in der That die Function φx vermittelſt der Gleichung (φ) nur für poſitive Werthe von $x = 2^i$ conſtruirt werden kann, nachdem man die Form der Function fx zwiſchen den Abſciſſen x_0, $2x_0$, wo x_0 eine poſitive Abſciſſe bezeichnet, angenommen hat.

Wir wollen hier noch eine wesentliche Bemerkung hinzufügen, welche die Schriftsteller, die diesen Theil der Analysis behandelt haben, nicht in Betracht gezogen zu haben scheinen, nämlich, daß die Formel (7), ungeachtet ihrer Allgemeinheit, der Gleichung (4) nicht auf die möglichst allgemeinste Weise Genüge leistet, eben weil die Anwendung dieser Formel voraussetzt, daß die Function ψ beständig positiv bleibt, und daß folglich die zwischen den Grenzen x_0, $2x_0$ gegebene Function fx, selbst zwischen diesen Grenzen, stets positiv ist. Nun würde aber nichts hindern, die Function ψ vermöge der Gleichung (4) außerhalb dieser Grenzen zu construiren, selbst wenn die Function fx zwischen den Grenzen x_0, $2x_0$ beständig negativ wäre, oder vom Positiven zum Negativen überginge.

§. 623. Man hat die Bestimmung der willkürlichen Functionen in den Integralen der partiellen Differenzialgleichungen auf die Integration der Differenzengleichungen zwischen stetigen Veränderlichen zurückgeführt, und obgleich es scheint, daß man dadurch auf keine wirklich nützlichen Anwendungen geführt wird; so wird es des Zusammenhanges der Theorien wegen doch nicht unnütz sein, Einiges hierüber zu sagen, und ein einziges Beispiel ist zu diesem Zwecke hinreichend.

Es sei die Gleichung:

$$z = \varphi(x + ay) + \psi(x - ay)$$

gegeben, welche von der Integration der partiellen Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = a^2 \frac{d^2z}{dy^2}$$

herrührt, und wo man die darin vorkommenden willkürlichen Functionen φ, ψ so bestimmen will, daß

$$z = fx \quad \text{für} \quad y = mx, \quad \text{und} \quad z = fx \quad \text{für} \quad y = nx$$

ist, was darauf hinausläuft, die Durchschnittscurven der krummen Fläche, deren veränderliche Coordinaten x, y, z sind, mit zwei durch die Axe der z gelegten Ebenen zu bestimmen.

Es ist:

$$fx = \varphi[x(1 + am)] + \psi[x(1 - am)]$$
$$fx = \varphi[x(1 + an)] + \psi[x(1 - an)],$$

und wenn man successive:

$$x(1 - am) = v, \quad x(1 - an) = v$$

setzt, so verwandeln sich diese Gleichungen in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} f\left(\frac{v}{1-am}\right) &= \varphi\left(\frac{1+am}{1-am} \cdot v\right) + \psi v \\ f\left(\frac{v}{1-an}\right) &= \varphi\left(\frac{1+an}{1-an} \cdot v\right) + \psi v \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

Verbindet man diese Gleichungen durch Subtraction, so wird die Function ψ eliminirt, und man hat:

$$\varphi\left(\frac{1+am}{1-am} \cdot v\right) - \varphi\left(\frac{1+an}{1-an} \cdot v\right) = f\left(\frac{v}{1-am}\right) - f\left(\frac{v}{1-an}\right),$$

oder einfacher:

$$\varphi(hu) - \varphi u = Fu, \qquad (9)$$

enn man

$$\frac{1+an}{1-an}\cdot v = u, \qquad \frac{(1+am)(1-an)}{(1-am)(1+an)} = h$$

t, und wenn man durch Fu eine Function bezeichnet, deren Zuſammen-ung gegeben iſt. Nun iſt aber einleuchtend, daß die Gleichung (9), wie e Gleichung (4) im vorhergehenden § ſich auf eine Differenzengleichung zu-ückführen, und auf eine ähnliche Weiſe behandeln läßt. Wenn man alſo u nd φu als Functionen des Index i betrachtet, welcher nach conſtanten und r Einheit gleichen Differenzen zunimmt, ſo hat man:

$$u_{i+1} = hu_i, \quad \varphi_{i+1} - \varphi_i = Fu_i, \quad \text{folglich: } u_i = u_0 h^i, \quad \varphi_i = \Sigma \cdot F(u_0 h^i).$$

achdem die durch das Zeichen Σ angedeutete Integration verrichtet iſt, ſetzt an für i ſeinen Werth als Function von u, ſo erhält man φu als Function on u ausgedrückt, wo dieſe Function ſtatt der willkürlichen Conſtanten eine illkürliche Function enthalten muß, welche ihren Werth nicht verändert, wenn in hu verwandelt wird, oder eine Function von der Form:

$$\omega\left(\sin.\frac{2\pi \log. u}{\log. h}, \cos.\frac{2\pi \log. u}{\log. h}\right).$$

n φu ſetzt man für u ſeinen durch v ausgedrückten Werth, und irgend eine r Gleichungen (8) beſtimmt alsdann die Form der Function ψ.

Aber es iſt wohl zu bemerken, daß die Data der Aufgabe die Form der unction φu nur zwiſchen Abſciſſen, wie u_0, hu_0, kennen lehren und folglich cht auf die Beſtimmung der in dem Integrale der Gleichung (9) vorkom-enden willkürlichen Function ω führen, abgeſehen davon, daß dieſes Integral, gleich es ein vollſtändiges iſt, nicht dieſelbe Ausdehnung haben kann, als e Gleichung (9), wie bereits im vorhergehenden § bei dem Integrale der leichung (4) bemerkt worden. Man muß alſo dieſes Verfahren zur Be-immung der in den Integralen der partiellen Differenzialgleichungen vorkom-enden willkürlichen Functionen als eine bloße analytiſche Transformation trachten, wodurch die Auflöſung der Aufgabe im Grunde nicht weiter ge-rdert wird, mit welchem Verfahren ſich die Geometer beſchäftigt haben, noch e die phyſikaliſchen Anwendungen dieſelbe Aufgabe aus einem andern Ge-chtspunkte betrachten ließen.

§. 624. Von den Aufgaben der reinen Geometrie, deren Auflöſung ſich r Integration der Differenzengleichungen zwiſchen ſtetigen Veränderlichen nſchließen läßt, wollen wir die folgende, unter dem Namen des Problemes r reciproken Trajectorien bekannte hier anführen, welche darin beſteht: ne Curve MM′ (Fig. 104) von ſolcher Beſchaffenheit zu beſchreiben, daß, enn man die ihr in Beziehung auf die Axe der y ſymmetriſche Curve NN′ nſtruirte, und dieſer eine zu der Axe der y parallele fortrückende Bewegung theilte, letztere die erſte Curve immer unter einem conſtanten Winkel $\alpha = 90°$ rchſchneidet, wo as, at die Tangenten der beiden Curven in dem Punkte nd, wo ſie die Axe der y durchſchneiden.

Es ſeien p, q zwei auf der Axe der x in gleichen Entfernungen vom nfangspunkte genommene Punkte; wir wollen die Ordinaten pm, qnn′ und ie Trajectorie νν′ ziehen, welche durch den Punkt n′ geht, ſo iſt der Winkel n′q = Nnq, weil die Trajectorie NN′, parallel zu der Axe der y fortrückend, die Lage νν′ gekommen iſt. Der Winkel Nnq iſt wegen der Symmetrie r Curven MM′, NN′ in Beziehung auf dieſelbe Axe dem Winkel Mmp gleich, nd folglich iſt der Winkel an′ν = an′q + qn′ν = an′q + Mmp. Aber es iſt

auch nach der Vorausſetzung $an'\nu = \alpha$, und wenn man die Ordinate der Curve MM' mit fx, ſowie die Abſciſſen Oq, Op reſp. mit x und $-x$ bezeichnet, ſo hat man:

$$\text{tang. } an'q = \frac{1}{f'x}, \quad \text{tang. } Mmp = \frac{1}{f'(-x)},$$

und folglich muß die Function $f'x$ nach den Bedingungen der Aufgabe der Relation:

$$\text{arc. tang. } \frac{1}{f'x} + \text{arc. tang. } \frac{1}{f'(-x)} = \alpha \qquad (10)$$

genügen.

Wir wollen:

$$-\frac{1}{2}\alpha + \text{arc. tang. } \frac{1}{f'x} = fx \qquad (11)$$

ſetzen, ſo verwandelt ſich die Gleichung (10) in $fx + f(-x) = 0$ und drückt aus, daß die Function f, welche übrigens willkürlich angenommen werden kann, eine impaare Function iſt.

Aus der Gleichung (11) ergibt ſich:

$$f'x = \frac{1}{\text{tang. } (\frac{1}{2}\alpha + fx)} = \frac{1 - \text{tang. } \frac{1}{2}\alpha \cdot \text{tang. } fx}{\text{tang. } \frac{1}{2}\alpha + \text{tang. } fx}$$

aber wenn fx eine beliebige impaare Function bezeichnet, ſo bezeichnet tang. fx auch eine beliebige impaare Function; man kann alſo

$$f'x = \frac{1 - \text{tang. } \frac{1}{2}\alpha \cdot fx}{\text{tang. } \frac{1}{2}\alpha + fx}$$

und folglich:

$$fx = \int \frac{1 - \text{tang. } \frac{1}{2}\alpha \cdot fx}{\text{tang. } \frac{1}{2}\alpha + fx} dx$$

ſetzen, wo durch die Integration eine willkürliche Conſtante eingeführt wird.

Wenn man dieſe Auflöſung durch Differenzenintegrale erhalten wollte, ſo müßte man

$$\text{arc. tang. } \frac{1}{f'x} = y_i, \quad \text{arc. tang. } \frac{1}{f'(-x)} = y_{i+1}, \quad x_{i+1} = -x_i$$

ſetzen, folglich iſt:

$$x_i = a(-1)^i, \quad y_i = \tfrac{1}{2}\alpha + b(-1)^i,$$

und wenn man i eliminirt:

$$y_x = \frac{1}{2}\alpha + \frac{b}{a}x = \frac{1}{2}\alpha + cx.$$

Die Buchſtaben a, b, c bezeichnen in dem Falle der discontinuirlichen Veränderlichen willkürliche Conſtanten, welche in dem entgegengeſetzten Falle Functionen von i werden, welche blos der Bedingung zu genügen haben, daß ſie ihren Werth nicht verändern, wenn i um eine Einheit zunimmt, oder wenn x ſich in $-x$ verwandelt. In der Gleichung:

$$\text{arc. tang. } \frac{1}{f'x} = \frac{1}{2}\alpha + cx \qquad (12)$$

drückt alſo c eine beliebige paare Function, und cx irgend eine impaare Function von x aus, vermöge welcher die durch die Gleichungen (11) und

2) ausgedrückten Reſultate zuſammenfallen. Dieſer Schluß hat die erforliche Strenge, weil man ſich vorſtellen kann, daß der Uebergang von der iscontinuität zu der Continuität nur nach der Elimination der discontinuirhen Function $(-1)^i$ ſtattfindet; allein wir haben eben geſehen, daß es ufacher iſt, nicht darauf zurückzugehen.

II. Von den Gleichungen mit gemiſchten Differenzen.

§. 625. Unter **Gleichungen mit gemiſchten Differenzen** verſteht an diejenigen, worin zugleich die Differenzialcoefficienten und die endlichen ifferenzen einer Function, ſowie auch die, worin die Differenzialcoefficienten ner Differenz oder die Differenzen eines Differenzialcoefficienten vorkommen. leichungen dieſer Art kommen nicht blos bei Gelegenheit geometriſcher Aufben, welche, wie die im vorhergehenden §, nur ein Gegenſtand der Wißgierde ſind, ſondern auch in den analytiſchen Unterſuchungen vor, welche ſich die vollſtändige Integration der partiellen Differenzialgleichungen, und an e Beſtimmung der willkürlichen Functionen nach gegebenen phyſiſchen Bengungen anſchließen.

Wir wollen z. B. annehmen, daß eine Function fx der Gleichung:

$$f'x - f'(x+2l) - k^2[fx + f(x+2l)] = 0, \qquad (13)$$

orin l, k Conſtanten bezeichnen, Genüge leiſten muß, ſo nimmt dieſe Gleiung, wenn man $fx = y$, $2l = \Delta x$ ſetzt, folgende Form an:

$$\frac{d\Delta y}{dx} + k^2(\Delta y + 2y) = 0,$$

ıd iſt nach der eben gegebenen Definition eine Gleichung mit **gemiſchten ifferenzen**.

Man genügt derſelben, wenn man

$$y = fx = A\cos.\lambda x + B\sin.\lambda x$$

ßt, wo A, B, λ Conſtanten bezeichnen; denn aus dieſer Annahme folgt:

$$fx + f(x+2l) = 2[A\cos.\lambda(x+l) + B\sin.\lambda(x+l)]\cos.\lambda l$$

$$fx - f(x+2l) = 2[A\sin.\lambda(x+l) - B\cos.\lambda(x+l)]\sin.\lambda l$$

$$f'x - f'(x+2l) = 2[A\cos.\lambda(x+l) + B\sin.\lambda(x+l)]\lambda\sin.\lambda l,$$

ıd folglich iſt vermöge der Gleichung (13):

$$2[A\cos.\lambda(x+l) + B\sin.\lambda(x+l)][\lambda\sin.\lambda l - k^2\cos.\lambda l] = 0.$$

Wenn man alſo durch A_i, B_i unbeſtimmte Conſtanten, und durch λ_i eine der ıendlich vielen Wurzeln der transcendenten Gleichung:

$$\lambda\sin.\lambda l - k^2\cos.\lambda l = 0 \qquad (14)$$

ezeichnet, ſo kann man wegen der linearen Form der Gleichung (13)

$$fx = \Sigma\cdot A_i\cos.\lambda_i x + \Sigma\cdot B_i\sin.\lambda_i x$$

ßen, wo ſich die Summationszeichen auf alle Werthe des Index i erſtrecken.

Die vorhergehende Formel gibt:

$$\Sigma\cdot A_i\cos.\lambda_i x = \tfrac{1}{2}[fx + f(-x)] = fx \qquad (15)$$

$$\Sigma\cdot B_i\sin.\lambda_i x = \tfrac{1}{2}[fx - f(-x)] = Fx, \qquad (16)$$

ıd durch dieſe Gleichungen kann man die Coefficienten A_i, B_i beſtimmen, enn die Function fx zwiſchen den Grenzen $-l$, $+l$, oder die Functionen :, Fx, wovon die erſte nothwendig eine paare, und die zweite eine unpaare , zwiſchen den Grenzen 0, l gegeben ſind.

Denn wenn man durch i' einen particulären, aber übrigens beliebigen Werth des Index i bezeichnet, ſo ergibt ſich aus der Gleichung (15):

$$\int_0^l \cos.\lambda_{i'}\xi \cdot f\xi d\xi = \Sigma \cdot A_i \left(\frac{\sin.(\lambda_i - \lambda_{i'})l}{2(\lambda_i - \lambda_{i'})} \pm \frac{\sin.(\lambda_i + \lambda_{i'})l}{2(\lambda_i + \lambda_{i'})}\right)$$

$$= \Sigma \cdot A_i \left(\frac{\lambda_i \sin.\lambda_i l \cdot \cos.\lambda_{i'}l - \lambda_{i'} \sin.\lambda_{i'}l \cdot \cos.\lambda_i l}{\lambda_i^2 - \lambda_{i'}^2}\right).$$

Vermöge der Gleichung (14) verſchwindet der Coefficient von A_i für alle von i' verſchiedenen Werthe von i. Wenn $i = i'$ iſt, ſo erſcheint dieſer Coefficient unter der Form $\frac{0}{0}$ und hat den Werth:

$$\frac{2\lambda_i l + \sin.2\lambda_i l}{4\lambda_i},$$

woraus ſich ergibt:

$$A_i = \frac{4\lambda_i \int_0^l \cos.\lambda_i\xi \cdot f\xi d\xi}{2\lambda_i l + \sin.2\lambda_i l}.$$

Die Gleichung (16) gibt:

$$\Sigma \cdot B_i \lambda_i^2 \cos.\lambda_i x = F'x,$$

und folglich iſt:

$$B_i = \frac{4 \int_0^l \cos.\lambda_i\xi \cdot F'\xi d\xi}{2\lambda_i l + \sin.2\lambda_i l}.$$

Die Integrale aller linearen gemiſchten Differenzengleichungen laſſen ſich ausdrücken durch Summen von Exponentialgrößen, Sinuſſen oder Coſinuſſen, welche die unendlich vielen Wurzeln einer transcendenten Gleichung zu Parametern haben und mit conſtanten willkürlichen Coefficienten multiplicirt ſind.

Wenn ſich die lineare oder nicht lineare gemiſchte Differenzengleichung integriren läßt, zunächſt in Beziehung auf die endlichen Differenzen, und dann in Beziehung auf die Differenziale, oder umgekehrt; ſo ſagt man, daß ſie eine ſucceſſive Differenzengleichung ſei, und man kann ſich vorſtellen, daß ſie entweder unmittelbar aus einer Differenziation einer Differenz, oder aus einer Differenzenbildung nach einer Differenziation entſtanden iſt. Man kann alſo die Gleichung (10) als eine Gleichung mit ſucceſſiven Differenzen betrachten; denn es iſt zuerſt die Function $f'x$ durch eine Operation beſtimmt, welche mit der Integration einer Differenzengleichung gleichbedeutend iſt, und dann wurde die Function fx durch eine eigentliche Integration aus der Function $f'x$ abgeleitet.

III. Ueber die endlichen Differenzengleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

§. 626. Wir können dieſen Gegenſtand nicht verlaſſen, ohne von der Anwendung der Rechnung mit endlichen Differenzen auf Functionen mit zwei unabhängigen Veränderlichen auch einige Worte zu ſagen.

Es ſei z eine Function der beiden Veränderlichen x, y, welche nach conſtanten Differenzen Δx, Δy wachſen, und es ſeien $\Delta_x z$, $\Delta_y z$, Δz reſp. die partiellen Differenzen in Beziehung auf die Veränderlichen x, y und die Totaldifferenz; ſo hat man:

$$\Delta_x\Delta_y z = \Delta_y\Delta_x z, \quad z + \Delta z = z + \Delta_x z + \Delta_y(z + \Delta_x z),$$

raus sich das Resultat:

$$\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z + \Delta_x\Delta_y z$$

ibt, welches man durch die symbolische Gleichung:

$$\Delta z = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) - 1]z$$

drücken kann. Ebenso fände man:

$$\Delta^2 z = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) - 1]^2 z$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^n z = [(1 + \Delta_x)(1_x + \Delta_y) - 1]^n z,$$

d wenn u eine Function von einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen y, z .... bezeichnete, so hätte man auch:

$$\Delta^n u = [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y)(1 + \Delta_z) \ldots - 1]^n u.$$

Da die Differenzen Δx, Δy als constant vorausgesetzt sind, so kann m sie der Einheit gleich setzen (§. 583) und annehmen, daß die Veränder- hen x, y die Reihe der natürlichen Zahlen durchlaufen, und in diesem Falle zeichnet die Function $z_{x,y}$ das allgemeine Glied einer Tafel mit doppeltem ngange (§. 116), wo x und y die Indices oder Ordnungszahlen der beiden ngänge der Tafel, oder der Horizontal- und Verticalreihe sind, welchen das ch mit dem Werthe $z_{x,y}$ zugleich angehört.

Von welcher Beschaffenheit die constanten oder veränderlichen Werthe der ifferenzen Δx, Δy auch sein mögen, so lassen sich die verschiedenen Werthe r Function z doch nur dann bestimmen und in eine Tafel bringen, wenn m die Reihen von Werthen bestimmt, welche die Veränderlichen x, y resp. rchlaufen. Es seien i, i' die Indices dieser beiden Reihen, so ist x eine timmte Function des Inder i und y eine bestimmte Function des Inder i'. an kann also z als eine Function der Indices i, i' betrachten, welche dis- ntinuirliche Veränderliche sind und namentlich die Eigenschaft haben, nach nstanten, der Einheit gleichen Differenzen zu wachsen. Bei allen den von r Form der Function $z_{x,y}$ unabhängigen Schlüssen kann man also umgekehrt $x = 1$, $\Delta y = 1$ setzen, ohne ihre Allgemeinheit zu beeinträchtigen.

§. 627. Blos um die Natur der durch die Differenzengleichungen, worin hrere unabhängige Veränderliche vorkommen, ausgedrückten Relationen an- euten, wollen wir die sehr einfache Gleichung:

$$z_{x+1,y+1} = z_{x,y+1} + z_{x,y} \qquad (\alpha)$$

rachten, und annehmen, daß die Function $z_{x,0} = f_0 x$ gegeben sei; so ergibt aus der gegebenen Gleichung:

$$z_{x+1,1} = z_{x,1} + z_{x,0}, \quad \text{oder} \quad \Delta_x z_{x,1} = f_0 x,$$

d folglich:

$$z_{x,1} = \Sigma f_0 x = f_1 x.$$

enso würde man $z_{x,2}$, $z_{x,3}$, ... und endlich $z_{x,y}$ bestimmen, indem y eine liebigen positiven, und x einen positiven oder negativen Werth hat.

Die anfängliche Function $f_0 x$ bleibt willkürlich, und außerdem werden ch die successiven Integrationen in die Functionen $f_1 x$, $f_2 x$, ꝛc. willkürliche nstanten eingeführt, deren ins Unendliche fortlaufende Reihe implicite be- mmt wird, wenn die Function $z_{0,y}$ für alle positiven Werthe von y gegeben

Aber wenn die Function $z_{0,y} = F_0 y$ für alle negativen und positiven

Werthe gegeben wird, ſo bleibt die Function $z_{x,0} = f_0 x$ nur für die negativen Werthe von x willkürlich und iſt dagegen für alle poſitiven Werthe derſelben Veränderlichen implicite beſtimmt. Denn aus der Gleichung (α) folgt:

$$z_{1,y} = F_0 y + F_0(y-1), \quad z_{2,y} = F_0 y + 2F_0(y-1) + F_0(y-2),$$

und ebenſo würde man $z_{3,y}, z_{4,y}, \ldots z_{x,y}$ beſtimmen, wenn x einen beliebigen poſitiven und y einen poſitiven oder negativen Werth hat.

Man kann die Ausdehnung des Ausdruckes von $z_{x,y}$, welcher ſich auf alle Werthe von y und auf die poſitiven Werthe von x erſtreckt, als mit der des Ausdruckes derſelben Function, welcher ſich auf alle Werthe von x und auf die poſitiven Werthe von y erſtreckt, vergleichbar betrachten; jedoch enthält der erſte nothwendig nur eine willkürliche Function $F_0 y$, welche zwiſchen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ gegeben ſein muß, während der zweite zwei willkürliche Functionen enthält, nämlich $f_0 x$, welche zwiſchen den Grenzen $-\infty$, $+\infty$ gegeben ſein muß, und $F_0 y$, welche blos zwiſchen den Grenzen $0, +\infty$ gegeben zu ſein braucht. Dieſes analytiſche Factum rührt daher, daß die Veränderlichen x, y in der Gleichung (α) nicht ſymmetriſch vorkommen, und es hat mit der Reduction der willkürlichen Functionen in den Integralen der gewöhnlichen partiellen Differenzialgleichungen, worin die höchſten Ableitungen der Function nicht in Beziehung auf jede der unabhängigen Veränderlichen von derſelben Ordnung ſind, Aehnlichkeit; aber es bietet den merkwürdigen Umſtand dar, welcher bis jetzt noch nicht bemerkt zu ſein ſcheint, daß ſich die Anzahl der unabhängigen willkürlichen Functionen mit dem Zeichen der Zahlenwerthe der unabhängigen Veränderlichen ändert.

Für die negativen Werthe von y läßt ſich die Tafel der Größen $z_{x,y}$ conſtruiren, ohne daß man weiter etwas zu kennen braucht, als die Function $f_0 x$ zwiſchen den Grenzen $\pm\infty$; denn die Gleichung (α) gibt:

$$z_{x,-1} = f_0(x+1) - f_0 x, \quad z_{x,-2} = f_0(x+2) - 2f_0(x+1) + f_0 x, \text{ u. ſ. f.}$$

Dagegen muß zur Conſtruction der Tafel für die negativen Werthe von x die Function $F_0 y$ zwiſchen den Grenzen $\pm\infty$ und außerdem die Function $f_0 x$ zwiſchen den Grenzen $0, -\infty$ gegeben ſein; denn aus der gegebenen Gleichung ergibt ſich die Differenzengleichung:

$$z_{-1,y+1} + z_{-1,y} = F_0(y+1),$$

woraus man $z_{-1,y}$ nur durch eine Integration in Beziehung auf y, wodurch eine willkürliche Conſtante eingeführt wird, erhalten kann. Durch den Uebergang von $z_{-1,y}$ zu $z_{-2,y}$ würde eine neue willkürliche Conſtante eingeführt, u. ſ. f.

Geſetzt, man wollte die Tafel der Werthe der Function $z_{x,y}$ blos für die poſitiven Werthe von x, y conſtruiren, und man hätte für alle poſitiven Werthe von x, $z_{x,0} = f_0 x = 1$. Ferner wollen wir annehmen, es wäre für alle poſitiven Werth des Index y, $z_{0,0} = 1$ und $z_{0,y} = F_0 y = 0$; ſo ergibt ſich nach dieſen Vorausſetzungen:

$$z_{x,1} = \Sigma \cdot 1 = x$$

$$z_{x,2} = \Sigma \cdot x = \frac{x(x-1)}{1.2}$$

$$z_{x,3} = \Sigma \cdot \frac{x(x-1)}{1.2} = \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_{x,y} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-y+1)}{1.2.3\ldots y},$$

d. h. die durch die Gleichung (α) bestimmte Function $z_{x,y}$ ist vermöge der Voraussetzungen über die anfänglichen Functionen der Coefficient $a^{x-y}b^y$ in der Entwickelung der Potenz $(a+b)^x$.

Wenn x, y stetige Veränderliche bezeichneten, so könnte die krumme Fläche, deren verticale Ordinate $z_{x,y}$ ist, für alle positiven Werthe von x construirt werden, wenn der Werth der Function für alle Werthe von y, und für die zwischen 0 und + 1 liegenden Werthe von x gegeben wäre, oder der zwischen der Ebene der yz und einer in der Entfernung $x=1$ zu derselben gelegten parallelen Ebene liegende Streifen der krummen Fläche. Denn es sei $F(x,y)$ die zwischen diesen Grenzen gegebene Function, so hat man:

$$z_{x+1,y} = F(x,y) + F(x,y-1)$$
$$z_{x+2,y} = F(x,y) + 2F(x,y-1) + F(x,y-2),$$
u. s. f.

§. 628. Betrachten wir noch die Gleichung:

$$z_{x+1,y} + z_{x-1,y} = z_{x,y+1} + z_{x,y-1}, \qquad (\beta)$$

welcher man die Form:

$$\Delta_x^2 z_{x-1,y} = \Delta_y^2 z_{x,y-1} \qquad (B)$$

geben kann, und welche der Gleichung der schwingenden Saiten:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2} \qquad (b)$$

analog ist; so findet hier das Merkwürdige statt, daß das allgemeine Integral der partiellen Differenzialgleichung (b), nämlich:

$$z = \varphi(x+y) + \psi(x-y), \qquad (z)$$

wo φ, ψ willkürliche Functionen bezeichnen, auch den endlichen Differenzengleichungen (β) und (B) Genüge leistet, wie sich leicht darthun läßt.

Die Tafel der Werthe der Function $z_{x,y}$ läßt sich vermöge der Gleichung (β) für alle Werthe der Veränderlichen x, y construiren, wenn für alle Werthe von x die beiden Functionen $z_{x,0} = f_0 x$, $z_{x,1} = f_1 x$ willkürlich gegeben sind; denn alsdann hat man:

$$z_{x,2} = f_1(x+1) + f_1(x-1) - f_0 x$$
$$z_{x,3} = f_1(x+2) + f_1 x + f_1(x-2) - f_0(x+1) - f_0(x-1), \text{ ꝛc.}$$
$$z_{x,-1} = f_0(x+1) + f_0(x-1) - f_1 x$$
$$z_{x,-2} = f_0(x+2) + f_0 x + f_0(x-2) - f_1(x+1) - f_1(x-1), \text{ ꝛc.}$$

Vermittelst derselben Data könnte man die Functionen φ und ψ in dem Integrale (z) bestimmen, denn man hätte:

$$\varphi x + \psi x = f_0 x, \quad \varphi x + \psi(x-2) = f_1(x-1),$$

woraus folgt:

$$\psi x - \psi(x-2) = f_0 x - f_1(x-1),$$

eine endliche Differenzengleichung zwischen zwei Veränderlichen, welche die Function ψ, und folglich die Function φ gibt.

Wenn zwischen den Functionen f_0, f_1 die Relation:

$$f_1 x = \tfrac{1}{2} f_0(x+1) + \tfrac{1}{2} f_0(x-1)$$

stattfindet, so ergibt sich $\varphi = \psi$, und das Integral nimmt alsdann die Form an:

$$z_{x,y} = \tfrac{1}{2} f_0(x+y) + \tfrac{1}{2} f_0(x-y).$$

Wir wollen annehmen, daß die Function $z_{x,y}$ nur zwiſchen den Grenzen $x=0$, $x=1$ gegeben ſei; aber daß die Functionen $z_{0,y}$, $z_{1,y}$ für alle Werthe von y verſchwinden, ſo hat man vermöge dieſer Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} f_0 y &= -f_0(-y) \\ f_0(1+y) &= -f_0(1-y) \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{aligned} f_0 x &= -f_0(-x) \\ f_0(1+x) &= f_0(x-1). \end{aligned}\right.$$

Die erſte dieſer Gleichungen zeigt, daß die in ihrer ganzen Ausdehnung genommene Function f_0 eine impaare iſt und die zweite zeigt, daß dieſe Function periodiſch iſt, ſo daß ſie nur zwiſchen den Grenzen 0, 1 einer Periode gegeben zu ſein braucht, damit ſie in der ganzen Ausdehnung ihres Verlaufes als gegeben betrachtet werden kann.

Wenn x, y continuirliche Veränderliche bezeichnen, ſo iſt die Gleichung (z) nur noch ein particuläres Integral der Gleichung (β), welcher man allgemeiner durch die Formel:

$$z_{x,y} = \varphi[x+y, \omega(x,y)] + \psi[x-y, \omega_1(x,y)] \qquad (Z)$$

genügt, wo ω, ω_1 willkürliche Functionen von x, y ſind, welche aber ihren Werth nicht ändern dürfen, wenn dieſe Veränderlichen um eine Einheit zunehmen.

Statt $\Delta x = 1$, $\Delta y = 1$ zu ſetzen, kann man $\Delta x = h$, $\Delta y = h$ ſetzen, wo h eine beliebige Conſtante bezeichnet, und das allgemeine Integral der Gleichung:

$$z_{x+h,y} + z_{x-h,y} = z_{x,y+h} + z_{x,x-h}, \qquad (\beta_1)$$

welche man wegen $\Delta x = \Delta y = h$ auf die Form:

$$\frac{\Delta_x^2 z_{x-h,y}}{\Delta x^2} = \frac{\Delta_y^2 z_{x,y-h}}{\Delta y^2} \qquad (B_1)$$

bringen kann, wird wieder durch die Gleichung (z) oder durch (Z) ausgedrückt, je nachdem man die Veränderlichen x, y als discontinuirlich, oder als continuirlich betrachtet. In dieſem Falle dürfen die Functionen ω, ω_1 den Werth nicht ändern, wenn x oder y um h zunimmt, oder ω und ω_1 ſind Functionen der Größen:

$$\sin.\frac{2\pi x}{h},\ \cos.\frac{2\pi x}{h},\ \sin.\frac{2\pi y}{h},\ \cos.\frac{2\pi y}{h}. \qquad (H)$$

Wenn man die Conſtante h gegen Null convergiren läßt, ſo verwandelt ſich die Gleichung (B_1) an der Grenze in die Gleichung (b), und da die Functionen (H) für $h=0$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erfahren, ſo drückt die von dieſen discontinuirlichen Functionen befreite Gleichung (z), welche überdies von (h) unabhängig iſt, in der Vorausſetzung der Stetigkeit der Veränderlichen und für $h=0$ das allgemeinſte Integral der Gleichung (B_1) aus, d. h. ſie gibt das allgemeinſte Integral der Gleichung (b), wie dieſes unmittelbar aus der Theorie der partiellen Differenzialgleichungen folgt.

Inhalt.

Erſtes Buch.

Principien.

Seite

Kap. Von den Functionen im Allgemeinen und der Theorie der Functionen ins Beſondere 3

Kap. Ueber die Klaſſifikation der Functionen und ihre Entwickelung in Reihen 13

Kap. Theorie der abgeleiteten Functionen und der Unterbrechungen der Stetigkeit der verſchiedenen Ordnungen. — Grundbegriffe über die Theorie der Fluxionen 27

Kap. Von den Differenzen und den Annäherungen der verſchiedenen Ordnungen. — Theorie der unendlich kleinen Größen und Principien der Infinitesimalrechnung 42

Zweites Buch.

ifferenzirung der entwickelten Functionen mit einer einzigen veränderlichen Größe.

Kap. Differenzirung der algebraiſchen und transcendenten Functionen . . 59

Kap. Vergleichung der logarithmiſchen, Exponential- und Kreistranscendenten. — Moivre'ſche Formel und Grundbegriffe über die Theorie der Winkelſchnitte 74

Kap. Beſtimmung des Werthes der entwickelten Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe, wenn ſie für einen beſonderen Werth dieſer letztern unter einer unbeſtimmten Form erſcheinen. — Beſtimmung der Maxima und Minima ſolcher Functionen 93

Kap. Taylor'ſche und Maclaurin'ſche Formel 104

Drittes Buch.

ifferenzirung der entwickelten und unentwickelten Functionen mit mehreren Veränderlichen.

Kap. Von den entwickelten Functionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen und von ihrer Differenzirung. — Grundbegriffe über die Stetigkeitsunterbrechungen der Functionen von zwei und drei Veränderlichen 126

Seite

2. Kap. Differenziirung der unentwickelten Functionen von einer oder mehreren unabhängigen Veränderlichen. — Vertauschung der Veränderlichen. 144

3. Kap. Bestimmung des Werthes der entwickelten und unentwickelten Functionen von mehreren veränderlichen Größen, wenn diese Functionen unter unbestimmten Formen erscheinen. — Theorie der Maxima und Minima dieser Functionen 155

4. Kap. Ausdehnung der Taylor'schen und Maclaurin'schen Formel auf entwickelte Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen. — Lagrange's Formel zur Entwickelung der unentwickelten Functionen 172

Viertes Buch.

Anwendungen der Differenzialrechnung auf die Theorie der krummen Linien und Flächen.

1. Kap. Von den Tangenten, den Normalen und den Asymptoten ebener Curven. Anwendung der Polarcoordinaten 193

2. Kap. Theorie der ebenen Umhüllungslinien 205

3. Kap. Theorie der Evoluten und der Krümmungshalbmesser ebener Curven. — Brennlinien. — Theorie der Berührungen der verschiedenen Ordnungen zwischen ebenen Curven 212

4. Kap. Von den singulären Punkten ebener Curven und der gegenseitigen Beziehung zwischen der Geometrie und Algebra 228

5. Kap. Grundbegriffe der Theorie der Curven von doppelter Krümmung . 238

6. Kap. Ueber die Berührungsebenen der krummen Flächen 253

7. Kap. Analytische Merkmale der Hauptfamilien der krummen Flächen . . 257

8. Kap. Von den Umhüllungsflächen 270

9. Kap. Von den Evoluten im Allgemeinen 283

10. Kap. Von der Krümmung der Flächen 286

Fünftes Buch.

Von den Integralen.

1. Kap. Integration der algebraischen Functionen 303

2. Kap. Integration transcendenter Functionen 319

3. Kap. Integration durch Reihen. — Ueber die merkwürdigen Fälle, welche sich bei dem Uebergange von den unbestimmten zu den bestimmten Integralen darbieten 326

4. Kap. Principien der Theorie der elliptischen Functionen 334

5. Kap. Geometrische Anwendungen der Berechnung der einfachen bestimmten Integrale 346

6. Kap. Vielfache bestimmte Integrale. — Geometrische und physikalische Anwendungen derselben — 359

7. Kap. Theorie der Variation der Integrale. — Principien der Methode, welche insbesondere die Variationsrechnung genannt wird 376

8. Kap. Anwendungen der Berechnung der Variationen einfacher Integrale. — Ausdehnung der Methode der Variationen auf doppelte Integrale . 390

9. Kap. Von den Bedingungen der Integrabilität der Differenzialfunctionen von mehreren unabhängigen veränderlichen Größen, und von ihrer Integration 404

Seite

10. Kap. Von den zwischen speciellen Grenzen genommenen bestimmten Integralen. — Verschiedene Beispiele der Bestimmung bestimmter Integrale 412

11. Kap. Von den als Functionen veränderlicher Parameter betrachteten bestimmten Integralen. — Euler'sche Functionen 425

12. Kap. Entwickelung der Functionen in trigonometrische Reihen. — Theorem von Fourier 435

Sechstes Buch.

Integration der Differenzialgleichungen mit einer einzigen unabhängigen veränderlichen Größe.

1. Kap. Von der Integration der Differenzialgleichungen mit zwei Veränderlichen und von der ersten Ordnung 447

2. Kap. Ueber die Integration der Differenzialgleichungen der höhern Ordnungen, und insbesondere über die Integration der linearen Differenzialgleichungen 457

3. Kap. Ueber die Integration der Differenzialgleichungen durch Reihen und durch bestimmte Integrale 471

4. Kap. Theorie der singulären Integrale der Differenzialgleichungen mit zwei Veränderlichen 481

5. Kap. Geometrische Anwendungen der Theorie der Integration der Differenzialgleichungen mit zwei veränderlichen Größen 495

6. Kap. Ueber die Integration der gleichzeitigen Differenzialgleichungen . . 510

7. Kap. Ueber die Construction der Differenzialgleichungen mit einer einzigen unabhängigen veränderlichen Größe 520

Siebentes Buch.

Integration der Differenzialgleichungen mit mehreren unabhängigen veränderlichen Größen.

1. Kap. Ueber die Integration der Gleichungen mit totalen Differenzialen. — Geometrische Anwendungen 530

2. Kap. Ueber die Integration der partiellen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung unter endlicher Form 537

3. Kap. Ueber die Integration der partiellen Differenzialgleichungen höherer Ordnungen mit drei Veränderlichen unter endlicher Form. — Bemerkungen über die singulären und particulären Integrale der partiellen Differenzialgleichungen 549

4. Kap. Von der Integration der partiellen Differenzialgleichungen durch Reihen, und insbesondere der linearen Differenzialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen und mit constanten Coefficienten 558

5. Kap. Ueber die Integration der linearen partiellen Differenzialgleichungen durch bestimmte Integrale 575

6. Kap. Ueber die Construction der partiellen Differenzialgleichungen . . . 584

Achtes Buch.

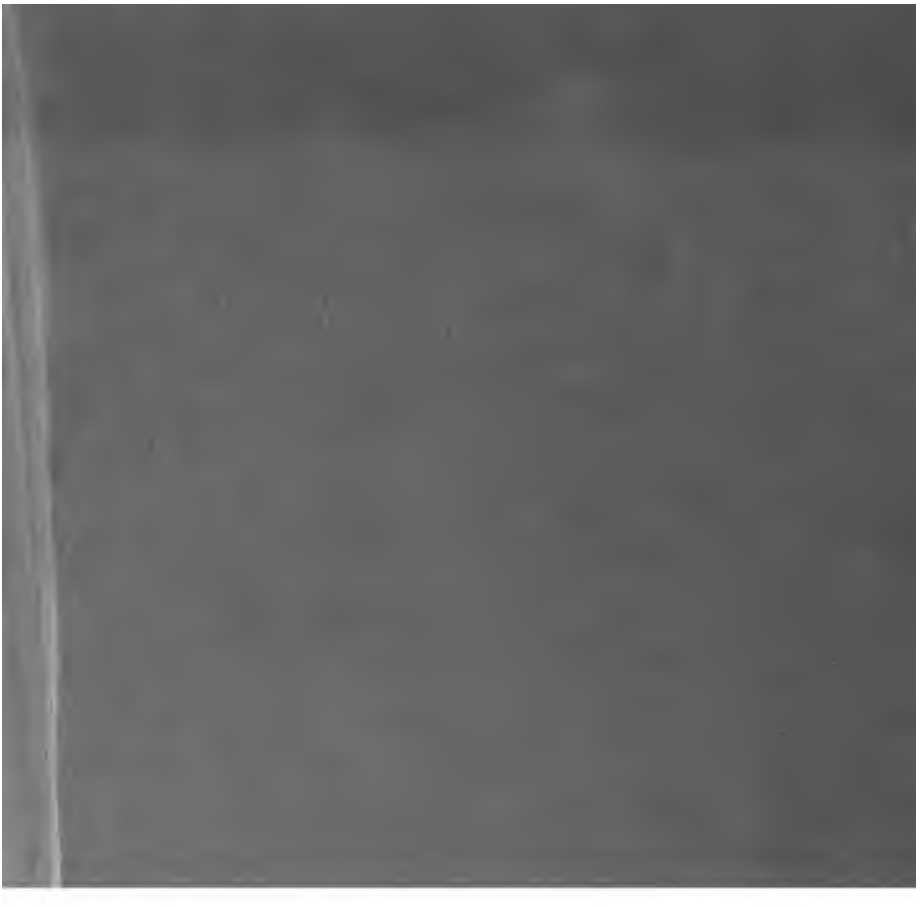
Rechnung mit endlichen Differenzen.

1. Kap. Rechnung mit endlichen Differenzen und Integralen oder Summen endlicher Differenzen für die entwickelten Functionen mit einer einzigen veränderlichen Größe 591

2. Kap. Euler's Formel zur Bestimmung der Summen durch gewöhnliche Integrale und der Integrale durch die Summen. — Anwendung auf die Stirling'sche Formel. — Ueber die Interpolation . . 601

3. Kap. Theorie der Gleichungen mit endlichen Differenzen zwischen zwei discontinuirlichen Veränderlichen 615

4. Kap. Von den endlichen Differenzengleichungen zwischen stetigen Veränderlichen. — Von den gemischten Differenzengleichungen und von den endlichen Differenzengleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen 630



MAR 26 1931